

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра  
боты без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение  $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$ .
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром  $O$  вписана в трёхгранный угол с вершиной  $S$  и касается его граней в точках  $K, L, M$  (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол  $KSO$  и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью  $KLM$ , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой  $SO$ , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . На первой окружности выбрана точка  $C$ , а на второй – точка  $D$ . Оказалось, что точка  $B$  лежит на отрезке  $CD$ , а  $\angle CAD = 90^\circ$ . На перпендикуляре к  $CD$ , проходящем через точку  $B$ , выбрана точка  $F$  так, что  $BF = BD$  (точки  $A$  и  $F$  расположены по разные стороны от прямой  $CD$ ). Найдите длину отрезка  $CF$ .
- б) Пусть дополнительно известно, что  $BC = 10$ . Найдите площадь треугольника  $ACF$ .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел  $(x, y)$ , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

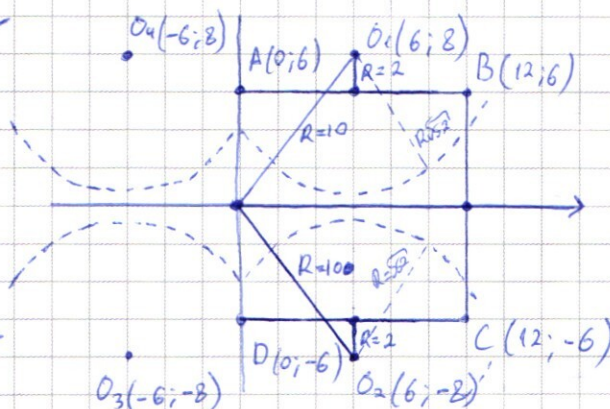
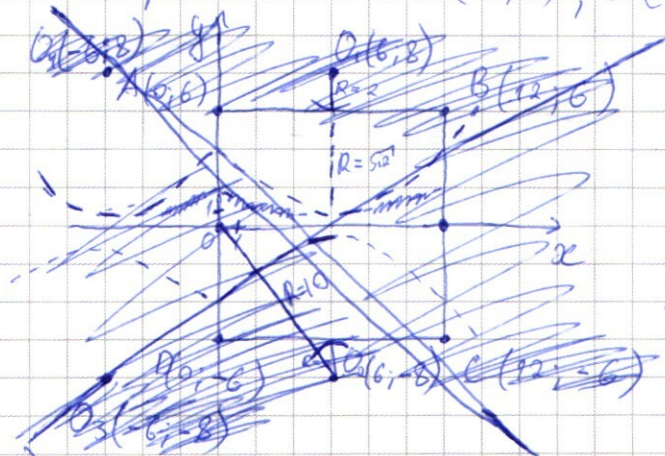
Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5) 
$$\begin{cases} |x-6-y|+|x-6+y|=12 & (I) \\ (|x|-6)^2+(|y|-8)^2=a & (II) \end{cases}$$

1) (I) уравнение задаёт квадрат с ~~вершинами~~ вершинами  $A(0;6)$ ,  $B(12;6)$ ,  $C(12;-6)$ ,  $D(0;-6)$



2) (II) уравнение задаёт 4 окружности:

- 1)  $x \geq 0, y \geq 0$  - окружность с центром  $O_1(6;8)$
  - 2)  $x \geq 0, y \leq 0$  - окружность с центром  $O_2(6;-8)$
  - 3)  $x \leq 0, y \leq 0$  - окружность с центром  $O_3(-6;-8)$
  - 4)  $x \leq 0, y \geq 0$  - окружность с центром  $O_4(-6;8)$
- радиусы у всех окружностей равны  $5a$

- 3)
- 1) при  $R < 2$  - 0 решений
  - 2) при  $R = 2$  - 2 решения  $O_1$  и  $O_2$  имеют по 1 общей точке
  - 3) при  $2 < R < 10$  - 4 решения
  - 4) при  $R = 10$  - 2 решения

5) при  $R > 10$  - 0 решений

Ответ: 4; 100

2)

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - 2 \sin 5x \cos 2x = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 0$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) (\sqrt{2} \cos 2x - (\cos 5x + \sin 5x)) = 0$$

a)  $\cos 5x = \sin 5x$

~~при  $x=0$~~

~~$\cos 5x = \sin 5x$~~

~~$\cos 5x = 0$~~

$$\cos 5x = 0 \Rightarrow \sin 5x = \pm 1$$

$\cos 5x = 0$  - не является корнем

$$1 = \tan 5x$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z}$$

б)  $\sqrt{2} \cos 2x = \cos 5x + \sin 5x$

$$\sqrt{2} \cos 2x = \sqrt{2} \cos \left( 5x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$1) 2x = 5x - \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \quad 2) 2x + 5x - \frac{\pi}{4} + 2\pi y = 0, y \in \mathbb{Z}$$

$$3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$7x = \frac{\pi}{4} + 2\pi y, y \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi y}{7}, y \in \mathbb{Z}$$

Ответ:  $\frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}; \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}; \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi y}{7}; n, y, k \in \mathbb{Z}$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3)

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} & (1) \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y > 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

$$(2) \quad 2y^2 - (x+8)y - x^2 - 4x = 0$$

$$D = (x+8)^2 + 8x^2 + 32x = x^2 + 16x + 64 + 8x^2 + 32x = (3x+8)^2$$

$$y = \frac{x+8-3x-8}{4} = -\frac{1}{2}x$$

$$y = \frac{x+8+3x+8}{4} = x+4$$

(1)

$$\lg y \lg\left(\frac{x^4}{y^2}\right) = \lg(-xy) \lg(-x)$$

$$\lg y (\lg x^4 - \lg y^2) - \lg(-x) (\lg(-x) + \lg y) = 0$$

$$4 \lg y \lg(-x) - 2 \lg^2 y - \lg^2(-x) - \lg(-x) \lg y = 0$$

$$3 \lg(-x) \lg y - 2 \lg^2 y - \lg^2(-x) = 0$$

$$2 \lg^2 y - 3 \lg(-x) \lg y + \lg^2(-x) = 0$$

$$D = 9 \lg^2(-x) - 8 \lg^2(-x) = \lg^2(-x)$$

$$\lg y = \frac{3 \lg(-x) - \lg(-x)}{4} = \frac{1}{2} \lg(-x)$$

$$\lg y = \frac{3 \lg(-x) + \lg(-x)}{4} = \lg(-x)$$

$$y = -x$$

$$y = \sqrt{-x}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = -x \\ y = \sqrt{-x} \\ y = -\frac{1}{2}x \\ y = x+4 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2}x = -x \\ -x = x+4 \\ \sqrt{-x} = -\frac{1}{2}x \\ \sqrt{-x} = x+4 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \\ x=0 \\ \text{невозможно } x=\emptyset \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -2 \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{array} \right.$$

$$2y^2 + 2y - 4 + 8 - 8y = 0$$

$$y^2 - 3y + 2 = 0$$

$$D = 9 - 8 = 1$$

$$y = \frac{3-1}{2} = 1 - \text{н.к.} \quad (1) \quad 16^{\lg 1} \neq 2^{\lg 2}$$

$$y = \frac{3+1}{2} = 2$$

Ответ:  $(-2; 2)$ .

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} &= (-x)^{\lg(-xy)} \\ \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} &= (-x)^{\lg(-xy)} \end{aligned} \right.$

$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$

$-(x+2)^2 + 4 + 2y^2 - xy - 8y = 0$

$-xy = x^2 + 4x + 8y - 2y^2$

$(x+2)^2 - 4 - 2(y^2 - 4y)$

$(x+2)^2 - 4 - 2(y-2)^2 + 4$

$(x+2)^2 - 4 - 2(y-2)^2 + 8$

$(x+2)^2 - 2(y-2)^2 + 4 = -xy$

$x^2 + 4x + 4 - 2y^2 + 8y - 8 = -xy$

$2y^2 - (x+8)y - x^2 - 4x = 0$

$D = (x+8)^2 + 8x^2 + 32x$

$x^2 + 16x + 64 + 8x^2 + 32x$

$9x^2 + 48x + 64$

$(3x+8)^2$

$y = \frac{x+8+3x+8}{4} = \frac{4x+16}{4} = x+4$

$y = \frac{x+8-3x-8}{4} = \frac{-2x}{4} = -\frac{1}{2}x$

$\begin{cases} x+4=y \\ -\frac{1}{2}x=y \end{cases}$

$\begin{cases} y=x \\ y=5-x \end{cases}$

$-\frac{1}{2}x + x = 0$

$x - 2x = 0$

$-x = 0$

$x - \frac{1}{2}x = 0$

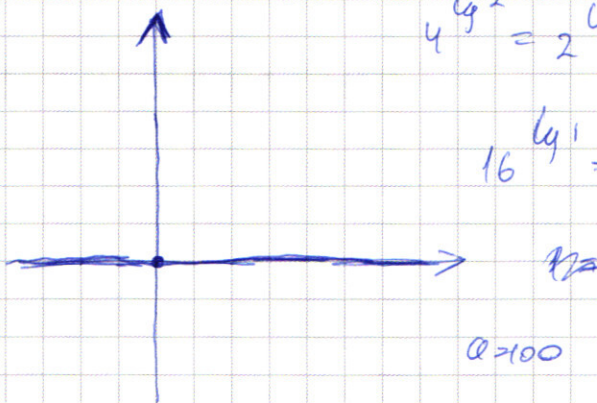
$\frac{1}{2}x = 0$

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\ (x-6)^2 + (y-2)^2 = a \end{cases}$$

$$\left(\frac{16}{4}\right)^{\lg 2} = 2^{\lg 4}$$

$$4^{\lg 2} = 2^{\lg 4}$$

$$16 \lg 1 = 2 \lg 2$$



$Q=100 \quad \lg 1 \lg 16 = \lg 2 \lg 2$

Q-1

$$x=1 \quad y=1$$

$$25 + 49 =$$

4 16-30

52

$$16^{\lg 1} = 2^{\lg 16}$$

$$|x-y-6| + |x+y-6| = 12$$

$$x - y = 14 \quad x + y = 10$$

$$x = 12 \quad y = -2$$

$$2 - y - 6 = 10 \quad 2 + y + 6 = 2$$

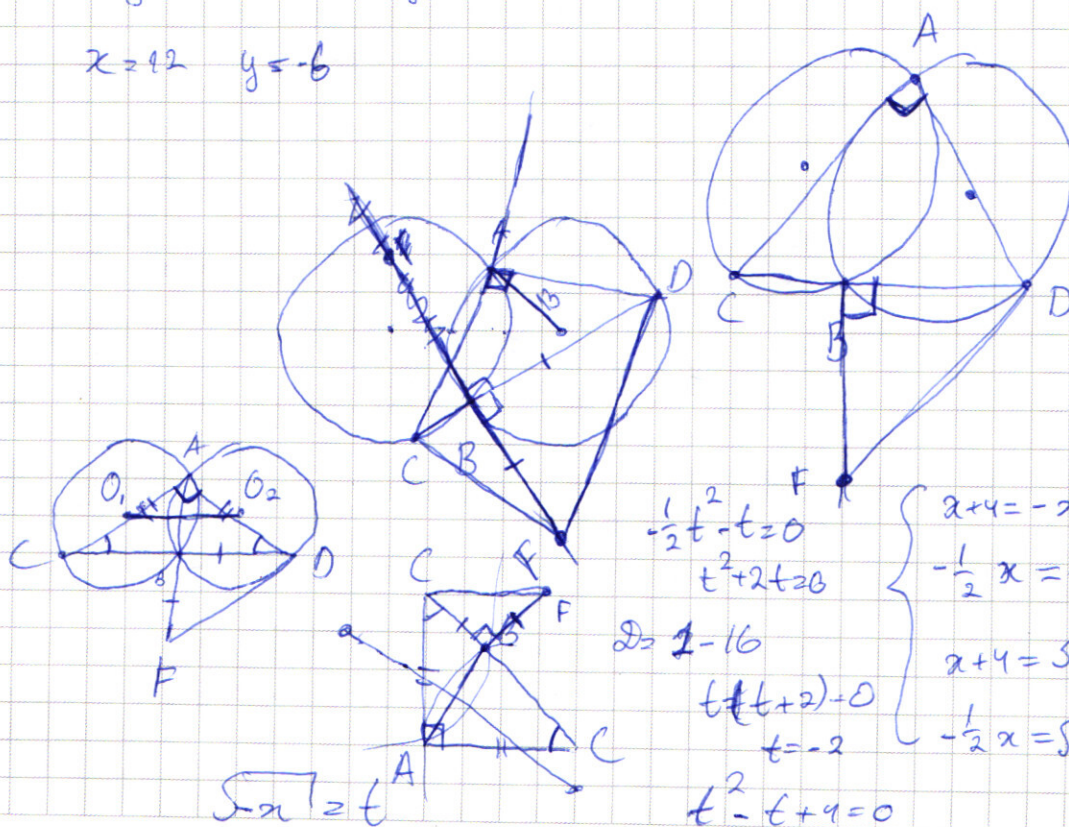
$$x - y = 16 \quad x + y = 8$$

$$x=12 \quad y=-4$$

$$x - y - 6 = 12 \quad x + y - 6 = 0$$

$$x - y = 18 \qquad x + y = 6$$

$$x = 12 \quad y = -6$$

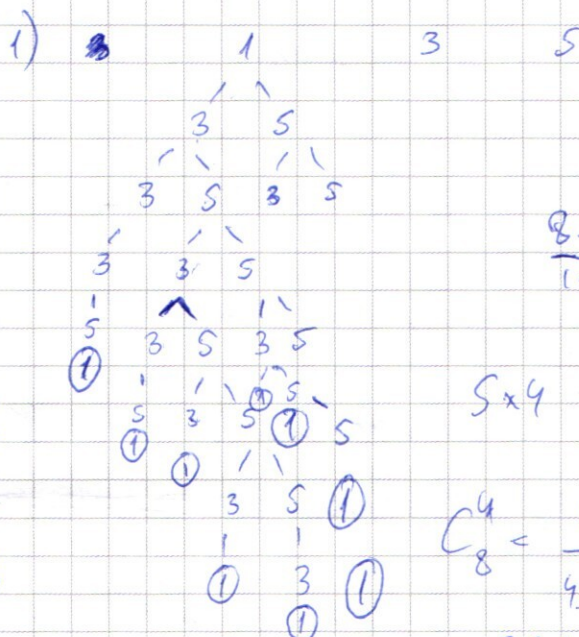


$$\sqrt{-2} = -2$$

☒ черновик      ☐ чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № \_\_\_\_  
(Нумеровать только чистовики)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\begin{array}{r} 8-7-6-5-4-3-2 \\ \hline 1-2-3-4-5-6-7 \end{array}$$

$5 \times 4 \quad 3 \times 3 \quad 1 \times 1$

$$C_8^4 = \frac{8!}{4!4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 70$$

$$70 + C_4^3 =$$

$$C_5^4 = 5$$

$$8fC_7^4 = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$$

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 3 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 3 & 3 & 3 & \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{array}$$

$$C_8^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 56$$

$$2) \quad \cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$-2 \sin 5x \sin 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \sin 2x$$

$$-\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \sin^2 5x = 4 \sin 5x \sin 2x$$

$$252) \sin^2 5x - 4 \sin 5x \sin 2x - 52 = 0$$

$$2\sqrt{2} \sin 5x (\sin 5x - \sqrt{2} \sin 2x) - \sqrt{2} = 0$$

$$\sqrt{2} (2 \sin 5\alpha (\sin 5\alpha - \sqrt{2} \sin 2\alpha) - 1) = 0$$

$$\sin 5x (\sin 5x - \sqrt{2} \sin 2x) = \frac{1}{2}$$

$$\sin^2 5x - \sqrt{2} \sin 5x \sin 2x - \frac{1}{2} = 0$$

$$Q = 2 \sin^2 2x + 2$$

$$\cos(10x - 3x) =$$

$$= \cos 0_x \cos 3x + \sin 0_x \sin 3x + \cos 3x$$

$$-\sqrt{2} \cos 10x = \sin 10x \cos 3x - \cos 10x \sin 3x$$

$$\checkmark \quad \checkmark \quad \checkmark \quad \checkmark \quad \checkmark \quad \checkmark$$

$$\cos 10x \cos 3x + \sin 10x \sin 3x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 10x \cos 3x + \sin 3x \cos 10x - \sin 3x = 0$$

$$\cos 3x (\cos 10x + \sin 10x + 1) + \sin 3x (\cos 10x + \sin 10x - 1) - \sqrt{2} \cos 10x = 0$$

$$\textcircled{1} \quad \sqrt{2} \cos(7x+3x) = \sqrt{2} \cos 7x \cos 3x - \sqrt{2} \sin 7x \sin 3x$$

$$\cos 7x + \sqrt{2} \cos 7x \cos 3x + \cos 3x = \sin 7x + \sin 3x + \sqrt{2} \sin 7x \sin 3x = 0$$

$$\cos 7x (1 + \sqrt{2} \cos 3x) + \cos 3x = \sin 7x (1 + \sqrt{2} \sin 3x) - \sin 3x = 0$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{(\cos 7x + \cos 3x)}{(\sin 7x + \sin 3x)}$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - 2 \sin 5x \cos 2x = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$\cancel{2 \cos 5x \cos 2x - 2 \sin 5x \cos 2x = \sqrt{2} \cos 10x}$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 0$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) (2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)) = 0$$

$$\cos 5x = \sin 5x$$

$$\sin \alpha = 0 \quad 16+36$$

$$\cos 0 \neq \sin 0 \quad \sqrt{2}$$

$$1 \neq 0$$

$$1 = \frac{\sin 5x}{\cos 5x}$$

$$1 = \tan 5x$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z}}$$

$$\sqrt{2} \cos 2x = \cos 5x + \sin 5x$$

$$\sqrt{2} \cos 2x = \sqrt{2} \cos \left( 5x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\cancel{\cos 2x = \cos \left( 5x - \frac{\pi}{4} \right)}$$

$$\cos 2x = \cos \left( 5x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$2x = 5x - \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$2x + 5x - \frac{\pi}{4} + \pi n = 2\pi y, y \in \mathbb{Z}$$

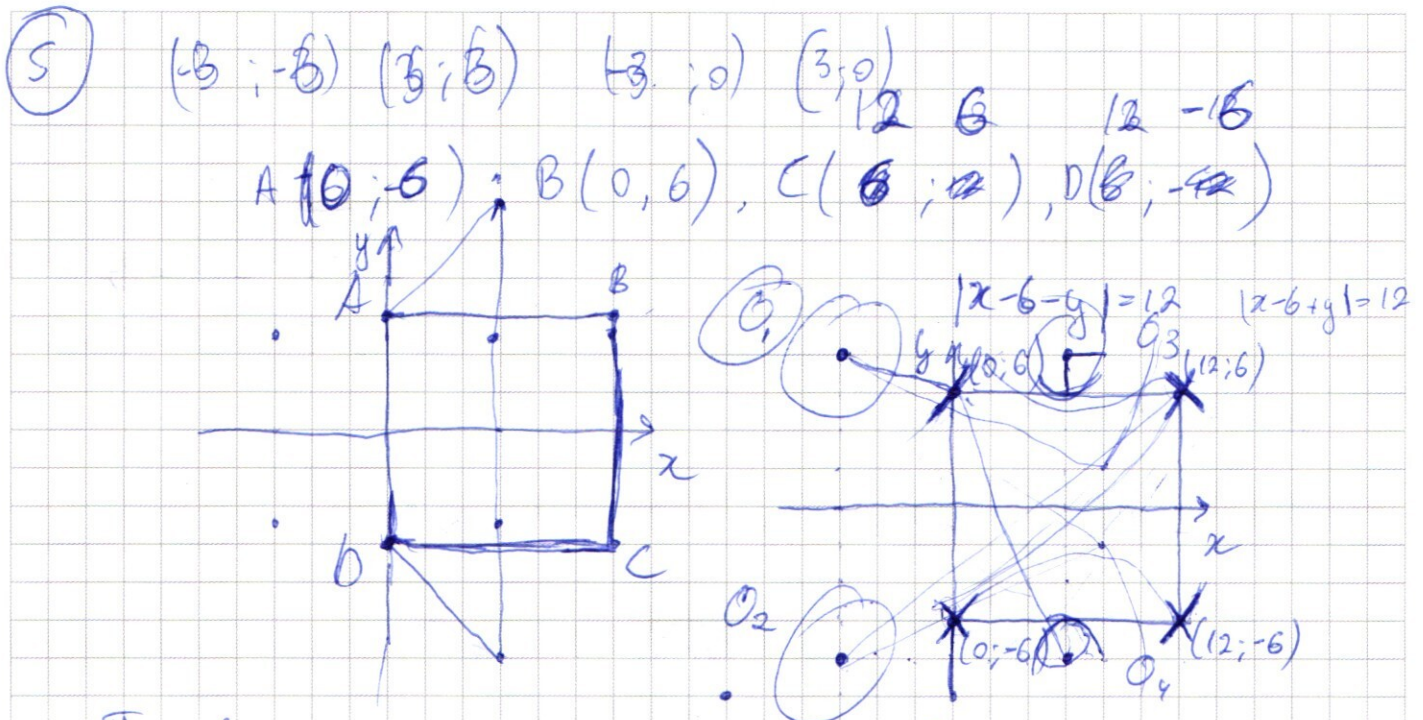
$$3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}}$$

$$7x = \frac{\pi}{4} + 2\pi y, y \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi y}{7}, y \in \mathbb{Z}}$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Уравнение задаёт 4 окружности. При  $x \geq 0$   $y \geq 0$  окружность с центром в  $O_1(6; 8)$ , при  $x \geq 0$ ,  $y \leq 0$   $O_2(6; -8)$ , при  $x \leq 0$ ,  $y \geq 0$  окружность  $O_3(-6; 8)$ , при  $x \leq 0$   $y \leq 0$  окружность с центром  $O_4(-6; -8)$ , радиусы у всех равны 5.

1) при  $R = 2$  окружности  $O_3$  и  $O_4$  будут иметь по 1 пересечению  $\Rightarrow$  2 решения

$$4 + 36 = 40$$

2) при  $2R < \sqrt{40}$  окружности  $O_3$  и  $O_4$  будут иметь по 2 пересечения  $\Rightarrow$  4 решения

$$\sqrt{4^2 + 6^2}$$

3) при  $R = \sqrt{40}$  будет 6 решений

$$5232$$

4) при  $\sqrt{40} < 2R < \sqrt{232}$  будет 8 решений

5) при  $\sqrt{232} < R < \sqrt{520}$  будет 4 решения

6) при  $R = \sqrt{520}$  2 решения

$$\begin{array}{r} 1 \\ 14 \\ \times 14 \\ \hline 56 \\ 14 \\ \times 196 \times 36 \\ \hline 36 \\ \hline 232 \end{array}$$

$$\sqrt{8^2 + 14^2} = \sqrt{196 + 324} = \sqrt{520}$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ \times 18 \\ \hline 144 \\ 18 \\ \hline 324 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 324 \\ \times 196 \\ \hline 520 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ \times 18 \\ \hline 144 \\ 18 \\ \hline 324 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 324 \\ \times 196 \\ \hline 520 \end{array}$$

$$\begin{cases} y > 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

$$\begin{cases} 2x^2 + x^2 - x^2 - 4x + 8x = 0 \\ -2x - x\sqrt{-x} - x^2 - 4x - 8\sqrt{-x} = 0 \end{cases}$$

$$\lg\left(\frac{x^4}{y^2}\right) \lg y = \lg(-x) \lg(-xy)$$

$$(\lg x^4 - \lg y^2) \lg y = \lg(-x) (\lg(-x) + \lg y)$$

$$4\lg x^4 \lg y - 2\lg^2 y = \lg^2(-x) + \lg y \lg(-x)$$

$$3\lg^2 y - 2\lg^2(-x) - \lg^2(-x) = 0$$

$$\lg^2 y - 4\lg^2 x$$

$$\begin{cases} x^2 + 2x = 0 \\ x(x+2) = 0 \end{cases}$$

$$2\lg^2 y - 3\lg^2(-x) + \lg^2(-x) = 0$$

$$x(x+2) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$2 = 9\lg^2(-x) - 8\lg^2(-x) = \lg^2(-x)$$

$$\lg y = \frac{3\lg(-x) \pm \lg(-x)}{4} = \lg(-x)$$

$$= \frac{1}{2} \lg(-x)$$

$$\lg y = \lg(-x)$$

$$\lg y = \frac{1}{2} \lg(-x)$$

$$\begin{cases} y = -x \\ y = \sqrt{-x} \end{cases}$$