

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА'

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа. +

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$. ?

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases} \quad +$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9. ?

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases} \quad +$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases} \quad ?$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① $16875 = 3^3 \cdot 5^4$:

Значит произведение цифр должно содержать в своих множителях 3 и 5. Также цифра числа ~~может~~ может быть единицей и 9.

В числе обязательно должно быть число 5, так как единичная цифра, которую можно представить в виде произведения 5 и группой цифр отличной от нуля - это 5.

А вот для получения множителя 3^3 нам подходят два случая: 1) среди цифр числа есть 3 и 9
2) среди цифр числа ^{есть} 3, 3, 3.

В первом случае набор цифр восьмизначного числа ~~4~~ - 5, 5, 5, 5, 3, 9, 11. Каково такое число

равно $C_8^4 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1 = \frac{8!}{4! \cdot 4!} \cdot 4 \cdot 3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 120 \cdot 7 = 840$.

Какой цифр во втором случае - 5, 5, 5, 5, 3, 3, 3, 1.

Каково такое число $C_8^4 \cdot C_4^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot \frac{4}{1} = 8 \cdot 7 \cdot 5 = 280$.

Суммарное число возможных вариантов $840 + 280 = 1120$.

Ответ: 1120

$$② \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} &= (-x)^{\lg(-xy)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 3y &= 0. \end{aligned} \right.$$

Из первого уравнения заметим, что $\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} > 0$
 Значит $-x > 0 \Rightarrow \underline{x < 0}$. Также $-xy > 0 \Rightarrow \underline{y > 0}$.

Второе уравнение симметричное: $y > 0; x < 0$:

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 3y = 0;$$

$$x^2 + (y+4)x - 2y^2 + 3y = 0;$$

$$D = (y+4)^2 + 8y^2 - 32y = (3y-4)^2;$$

$$x_1 = \frac{-y-4+3y-4}{2} = y-4;$$

$$x_2 = \frac{-y-4-3y+4}{2} = -2y;$$

$$\underline{(x+2y)(x-y+4)=0};$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

$$\frac{(x^4)^{\lg y}}{(y^2)^{\lg y}} = (-x)^{\lg(-x)+\lg y} = (-x)^{\lg(-x)} \cdot (-x)^{\lg y};$$

Положим $t = -x; t > 0$:

$$\left(\frac{t^4}{y^2} \right)^{\lg y} = t^{\lg t} \cdot t^{\lg y};$$

$$(t^3)^{\lg y} = t^{\lg t} \cdot (y^2)^{\lg y};$$

Прологарифмируем по основанию 10

$$\lg(t^3)^{\lg y} = \lg(t^{\lg t}) + \lg(y^2)^{\lg y}$$

$$3 \lg t \cdot \lg y = \lg^2 t + 2 \lg^2 y;$$

$$\lg^2 t - 3 \lg t \cdot \lg y + 2 \lg^2 y = 0;$$

По теореме Виета получаем

$$\begin{cases} \lg t = 2 \lg y \\ \lg t = \lg y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = y^2 \\ t = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x = y^2 \\ -x = y \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Объедини решения каждого уравнения в систему.

$$\begin{cases} x = -2y \\ x = y - 4 \\ x = -y^2 \\ x = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -2y \\ x = -y^2 \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} x = -2y \\ x = -y \end{cases} & (2) \\ \begin{cases} x = y - 4 \\ x = -y^2 \end{cases} & (3) \\ \begin{cases} x = y - 4 \\ x = -y \end{cases} & (4) \end{cases}$$

1) $\begin{cases} x = -2y \\ x = -y^2 \end{cases}$

$$-2y = -y^2$$

$$y^2 - 2y = 0$$

$$\begin{matrix} y = 0; \\ x = 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} y = 2; \\ x = -4; \end{matrix}$$

Точка $(0; 0)$ не подходит по условию

2) $\begin{cases} x = -2y \\ x = -y \end{cases}$

не имеет решения

3) $\begin{cases} x = y - 4 \\ x = -y^2 \end{cases}$

$$y^2 + y - 4 = 0;$$

$$\begin{matrix} y_1 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \\ x_1 = \frac{-9 + \sqrt{17}}{2} \end{matrix}$$

$y_2 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$ - не подходит по условию

4) $\begin{cases} x = y - 4 \\ x = -y \end{cases}$

$$2y - 4 = 0$$

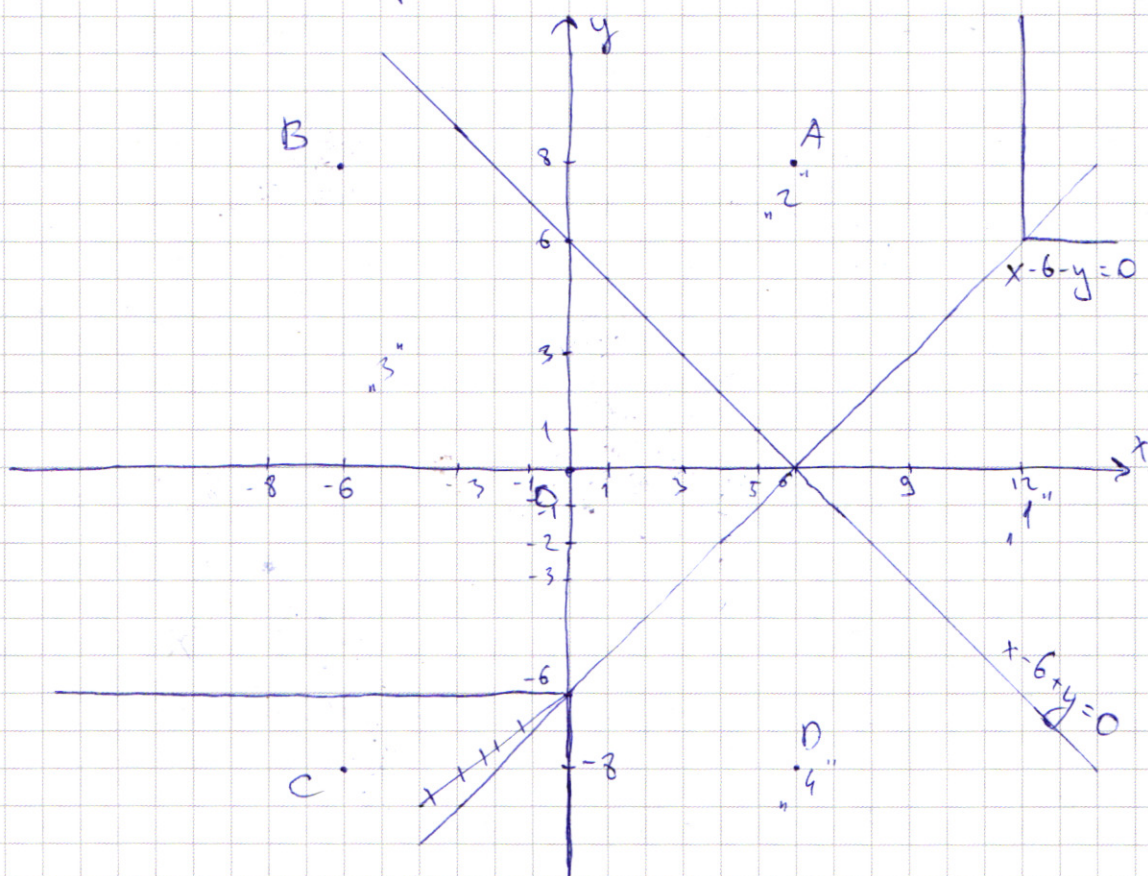
$$\begin{matrix} y = 2 \\ x = -2 \end{matrix}$$

Ответ: $(-4; 2); \left(\frac{-9 + \sqrt{17}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}\right); (-2; 2);$

5)
$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12, \\ (|x|-6)^2 + (|y|-3)^2 = a; \end{cases}$$

$$|x-6-y| + |x-6+y| = 12$$

Получим прямые $x-6-y=0$ и $x-6+y=0$:



В той части ~~плоскости~~ ~~плоскости~~ это же ниже прямой, модуль раскрывается ~~положительный~~ ^{с плюсом}, ниже - с минусом.

На "1" участке раскрыв модуль получаем $y=6$

На "2" $x=12$. На "3" $y=-6$. На "4" $x=0$

$$(|x|-6)^2 + (|y|-3)^2 = a;$$

~~График данной функции - окружность с радиусом~~

Рассмотрим как раскрываются модули во всех четвертях.

В I: $(x-6)^2 + (y-3)^2 = a$; ^{окружность} центр в точке (6; 3):

Радиус в том и во всех остальных случаях $\sqrt{a}$:

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

В II четверти $(x+6)^2 + (y-8)^2 = a$: ~~это~~ окружность
с центром в точке $(-6; 8)$:

В III четверти $(x+6)^2 + (y+8)^2 = a$ - окружность
с центром в точке $(-6; -8)$:

В IV четверти $(x-6)^2 + (y+8)^2 = a$ - окруж-
ность с центром в точке $(6; -8)$:

Обозначим центры A, B, C, D .

Из графика заметим, что окружности при
радиусе 6 будут иметь уже 4 точки пересечения,
а при радиусе меньше 6 и больше 6.

При радиусе 2 окружности будут иметь 1
точку пересечения, а соответственно одно решение.

А при радиусе от 2 до 6 окружности
будут иметь ровно две точки пересечения.

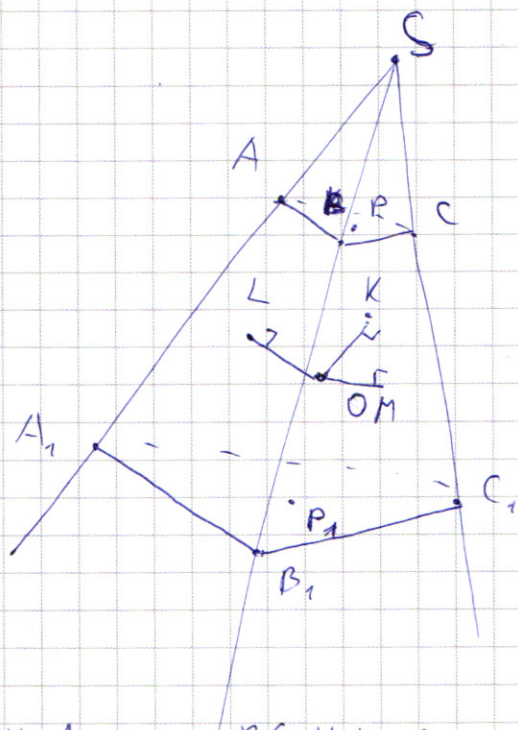
В итоге, если радиус больше 6 - решений 6,

$$2 < \sqrt{a} < 6$$

$$4 < a < 36;$$

$$\text{Ответ: } a \in (4; 36);$$

√4



Решение:

Пусть A, B, C точки пересечения ^{лучей} ~~прямых~~ трехгранного угла одной из плоскостей граней в условии.

A_1, B_1, C_1 - точки пересечения другой плоскости граней в условии с

лучей трехгранного угла. $AB \parallel A_1B_1$, $BC \parallel B_1C_1$, $AC \parallel A_1C_1$, т.к. это линии пересечения двух параллельных плоскостей.

Значит $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ по двум углам.

Пусть P и P_1 точки пересечения прямой SO с данными плоскостями.

k - коэффициент подобия $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$:

$$k = \sqrt{\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} = \frac{SP_1}{SP};$$

$$SP_1 = SP + 2R \quad (R - \text{радиус сферы})$$

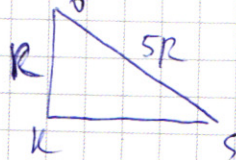
$$3SP + 6R = 2SP;$$

R - радиус сферы

$$\frac{3}{2} = \frac{SP + 2R}{SP} = 1 + 2 \frac{R}{SP};$$

$$SP = 4R;$$

Рассмотрим $\triangle SOK$: $\angle OKS = 90^\circ$:



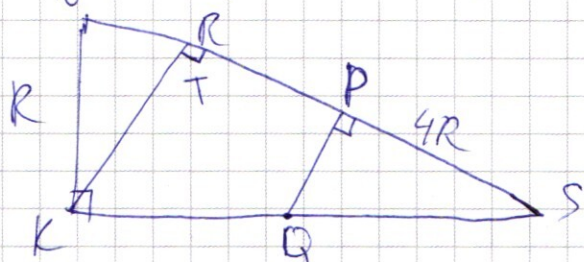
$$\angle KSO = \arcsin\left(\frac{R}{SP}\right) = \arcsin \frac{1}{5};$$

$$\text{Ответ: } \arcsin \frac{1}{5};$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

⑦④ Линии пересечения плоскости (KLM) плоскостей трехгранного угла будут параллельны сторонам $\triangle ABC$.

Рассмотрим $\triangle SKO$:



$PQ \perp SO$, значит PQ

По теор. Пифагора

$$KS = \sqrt{24} R$$

$\triangle SPQ \sim \triangle SKO$ по двум углам
 $k = \frac{SP}{KS} = \frac{4}{\sqrt{24}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$, $PQ = \frac{2}{\sqrt{6}} R$.

$SP = \frac{2\sqrt{3}}{5} R$ в плоскости ABC .

Плоск. $(KLM) \parallel (ABC)$, т.к. две прямые

AB линии пересечения с плоскостями трехгранного угла параллельны.

Приведем $KT \parallel QP$:

$$\triangle KRS \sim \triangle QPS \Rightarrow KT = \frac{KS}{SQ} \cdot PQ = \frac{\sqrt{24} R}{\frac{2\sqrt{3}}{5} R} \cdot \frac{2}{\sqrt{6}} R =$$

$$= \frac{3\sqrt{8} \cdot 2}{5 \cdot R \cdot \sqrt{6}} \cdot K = \frac{12}{5\sqrt{6}} R$$

Площадь сечения (KLM)

ного угла
ответ: $\frac{6}{25}$

$$S = \left(\frac{KT}{SP} \right)^2 S_{ABC} = \frac{144 R^2 \cdot 12}{25 \cdot 6 \cdot 16} \cdot \frac{1}{4} = \frac{6}{25}$$

данного трехгран.

⑦⑤
$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Каждая точка пересечения $y = 3^x + 4 \cdot 3^{81}$ и

$$y = 85 + (3^{81} - 1)x$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{81} = 85 + (3^{81} - 1)x;$$

$$3^x + 3^{81}/(4 - x) = 85 - x;$$

Заметим, что $x=4$ и $x=85$ являются решениями данного уравнения.

Значит все промежуточные по системе $x \in (4; 85)$.

$$y(4) = 81 + 4 \cdot 3^{81};$$

$$y(85) = 3^{85} + 4 \cdot 3^{81};$$

Значит все ~~решения~~ y промежуточные или меньше
в $y \in (81 + 4 \cdot 3^{81}; 3^{85} + 4 \cdot 3^{81})$.

$$(\sqrt{2}) \cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\cos 7x - \sin 7x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 3x - \cos 3x;$$

$$-\sqrt{2} \sin(7x - \frac{\pi}{4}) - \sqrt{2} \cos 10x = \sqrt{2} \sin(7x - \frac{\pi}{4});$$

$$\cos 10x = 2 \sin(5x - \frac{\pi}{4}) \cos 2x.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 16875|9 \\ 18753 \\ 6255 \\ 125125 \\ 1) \end{array}$$

$$16875 = 3^3 \cdot 5^4;$$

Возможные цифры: 3; 9; 5; 1;

В числе обязательно даны 4 - 5^я; обязательно

Вариации с тройками (3; 9); (3; 3; 3);

Пусть N_1 - ^{первое} количество чисел, составленных с помощью первой вариации N_2 :

N - число

$$N_1 = C_4^4 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 4 \cdot 3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 8 \cdot 210 = 1680;$$

$$N_2 = C_8^4 \cdot C_4^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 4 = 8 \cdot 7 \cdot 5 = 280;$$

$$N = N_1 + N_2 = 1680 + 280 = 1960;$$

$$2. \cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x;$$

$$\frac{2 \cos 5x \cos 2x}{2 \cos 5x \cos 2x} - \frac{\sqrt{2} \cos 10x}{-2 \cos 5x + \sqrt{2}} = \frac{2 \sin 5x \cos 2x}{2 \sin 5x \cos 2x};$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} \cos 10x;$$

$$2 \cos 2x \cdot \sqrt{2} \cdot \left(\sin \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) \right) = \sqrt{2} \cos 10x;$$

$$2 \cos 2x \cdot \sqrt{2} \cdot \left(\sin \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) \right) = \sqrt{2} \cos 10x;$$

$$-2 \cos 2x \sin \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) = \cos 10x;$$

$$2 \cos 5x \cdot 4 \cos 2x - \sqrt{2} \cos 3x \cdot \sqrt{2} = 2 \sin 5x \cdot \cos 2x$$

$$\cos 7x - \sin 7x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 3x - \cos 3x;$$

$$-\sqrt{2} \sin \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) - \sqrt{2} \cos 10x = \sqrt{2} \cdot \sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right);$$

$$\sin \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) + \cos 10x = \sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right);$$

$$\cos 10x = 2 \sin \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) \cos 2x;$$

$$1 - 2 \sin^2 5x = 2 \sin \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) \cdot \cos 2x = 0;$$

$$2 \sin 5x + 2 \sin \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) \cdot \cos 2x - 1 = 0;$$

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x = 8y = 0 \end{cases}$$

Из первого уравнения можно заметить, что $x \leq 0$ и $y > 0$:

$$\begin{aligned} x^2 + (4+y)x - 2y^2 + 8y &= 0 & D &= y^2 + 8y + 16 + 8y^2 - 32y = 9y^2 - 24y + 16 = (3y-4)^2 \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x &= 8y = 0 & x_1 &= \frac{-y-4 + 3y-4}{2} = y-4 \\ & & x_2 &= \frac{-y-4 - 3y+4}{2} = -2y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2y(y-4) - x(y+4) - x^2 &= 0; \\ 2y(y-4) - x^2 - x(y+4) &= x^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} &= (-x)^{\lg(-xy)} = (-x)^{\lg(-x)} \cdot (-x)^{\lg y}; \\ \left(\frac{x^4}{y^2 \cdot (-x)}\right)^{\lg y} &= (-x)^{\lg(-x)} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} (x+2y)(x-y+4) = 0; \\ xy = -\frac{1}{2}x; \\ y = x+4; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \left(-\frac{x^3}{y^2}\right)^{\lg y} &= (-x)^{\lg(-x)} \\ \frac{(-x^3)^{\lg y}}{y^{2\lg y}} &= \frac{(-x^3)^{\lg y}}{y^{\lg y^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -x &= t \\ -x^{\lg(-x)} &= t^{\lg t} = (\lg t)^{\lg t} = \text{логарифмическая функция, } \text{но } x = -1; \\ &= (\lg t^{\pm})^{\lg t} = \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} & (1) \\ y = -2x & (2) \\ \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} & (3) \\ y = x+4 & (4) \end{cases}$$

$$(1) (16y)^{\lg y} = (2y)^{\lg(2y^2)}$$

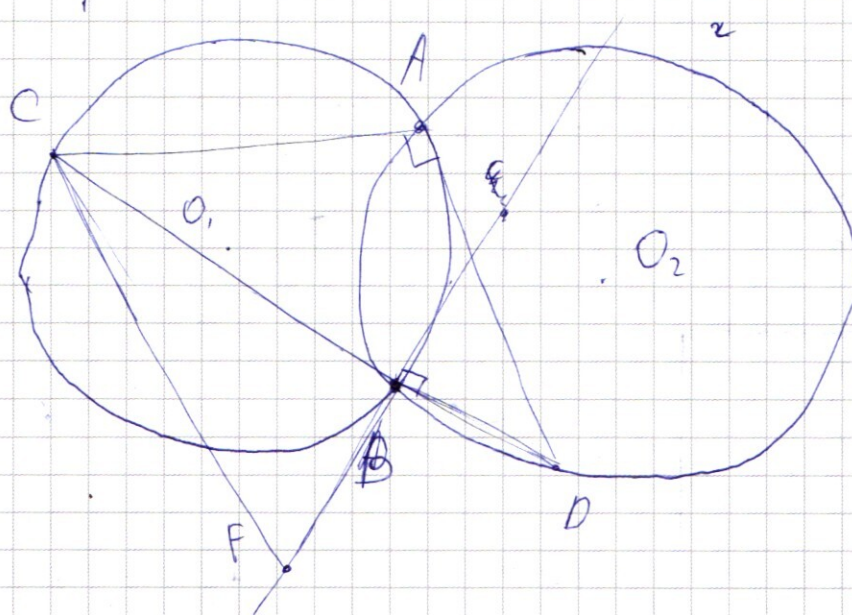
$$\begin{aligned} \lg 16 \cdot \lg y &= \lg 2 \cdot \lg(2y^2) \\ \lg 16 \cdot \lg y &= \lg 2 \cdot (\lg 2 + \lg y^2) \\ \lg 16 \cdot \lg y &= \lg 2 \cdot (\lg 2 + 2\lg y) \end{aligned}$$

$$(2) \left(\frac{x^4}{x^2+8x+16}\right)^{\lg(x+4)} = (-x)^{\lg\left(\frac{-x^2-4x}{-x(x+4)}\right)}$$

$$\lg 16 \cdot \lg y = \lg 2 \cdot (\lg 2 + 2\lg y)$$

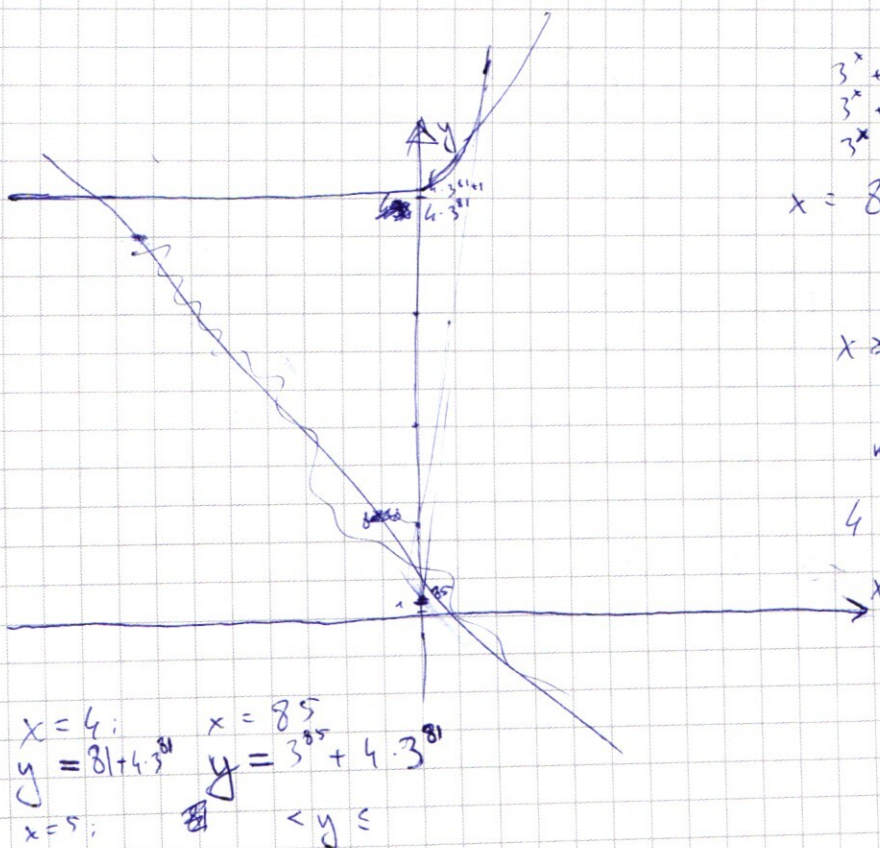
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

⑥



$$R = R_1 = R_2 = 13;$$

7



$$\begin{aligned}
 3^x + 4 \cdot 3^{81} &< 85 + (3^{81} - 1)x, \\
 3^x + 4 \cdot 3^{81} - 3^{81}x &< 85 - x; \\
 3^x + 3^{81}(4 - x) &< 85 - x; \\
 x &= 85
 \end{aligned}$$

$$x = 85$$

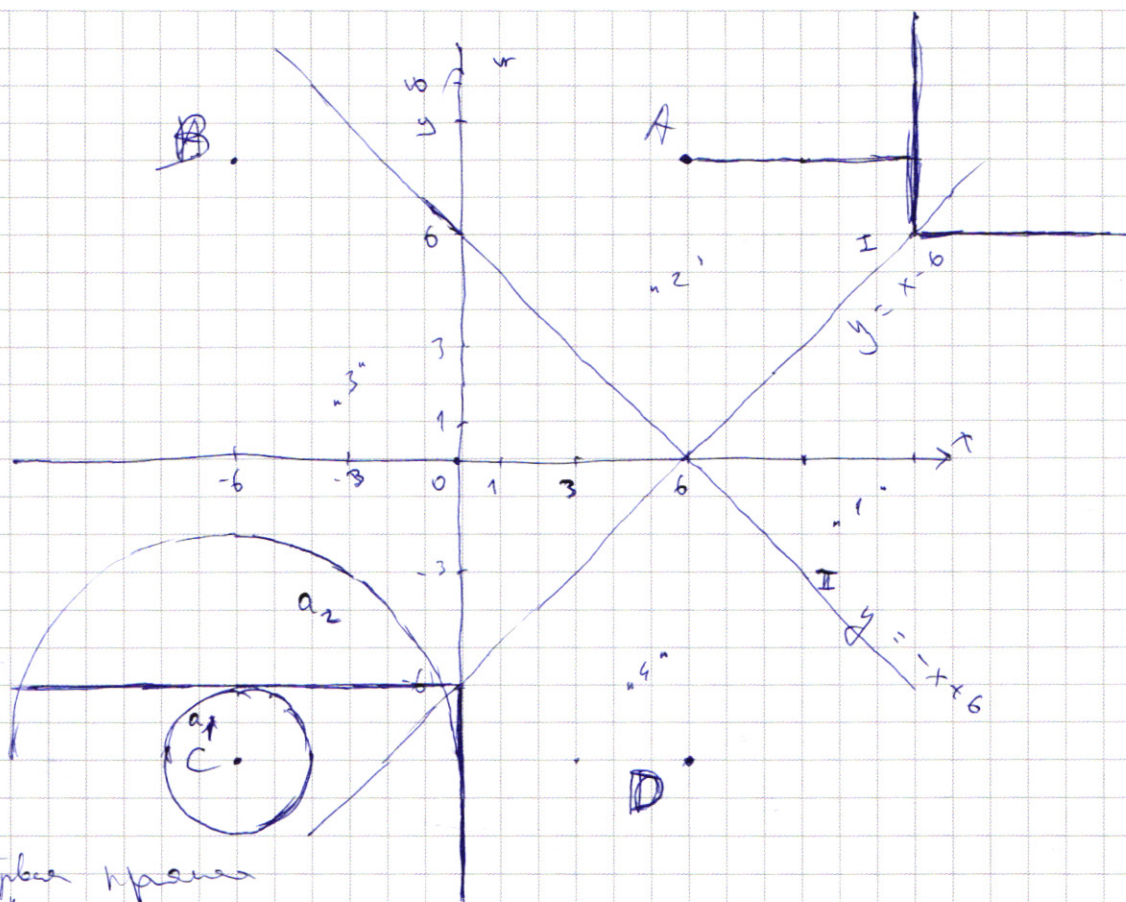
$$3^{35} + 3^{31} \cdot (-3^4) < 0;$$

$$0 < 0;$$

$x \geq 86$:
 $3^x + 3^{81} / (4-x) > 85$
 $85 - x < 0$
 неравенство не выполняется:

$4 \leq x \leq 84$;
 $3^x + 3^{84-x} \leq 0$,
 $35 - x > 0$, иначе
 выразим выразим:

5



Первая прямая

1: $-x + 6 + y + x - 6 + y = 12;$

4: $-x + 6 + y - x + 6 - y = 12;$
 $x = 0;$

$y = 6;$

2: $|x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12;$
 $x = 12;$

3: $x - 6 - y - x + 6 - y = 12;$
 $y = -6;$

Вторая прямая

I: $(x - 6)^2 + (y - 8)^2 = a;$

II: $(x - 6)^2 + (y + 8)^2 = a;$

III: $(x + 6)^2 + (y - 8)^2 = a;$

IV: $(x + 6)^2 + (y + 8)^2 = a;$

$a_1 = 4$

$\sqrt{a_1} = 2;$

$\sqrt{a_2} = 6$

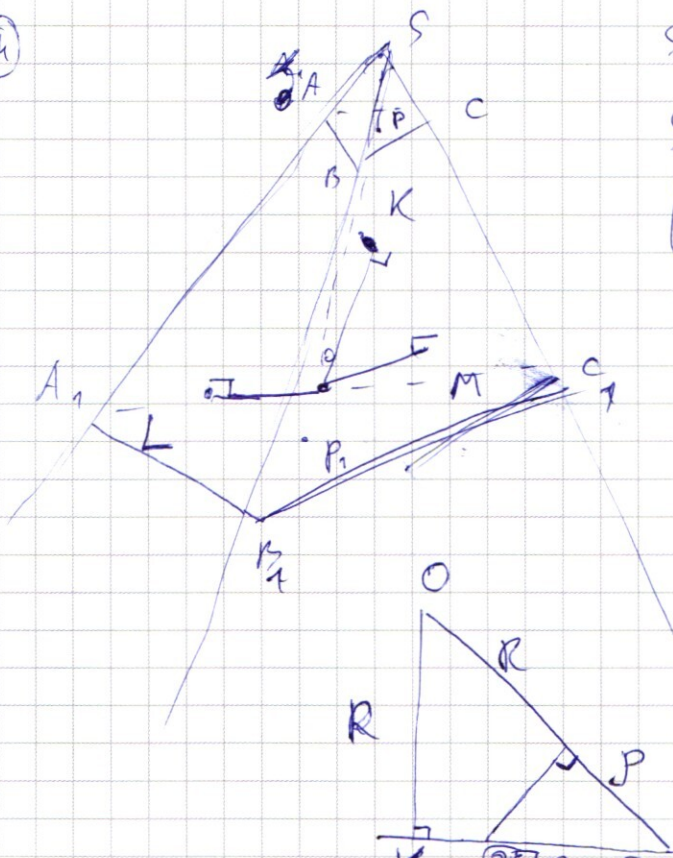
$a_1 = 4$

$a_2 = 36$

$\Rightarrow a \in (a_1; a_2) \exists a \in (4; 36);$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

54



$$SP = p;$$

$$SP_c = p + 2R;$$

$$\left(\frac{p + 2R}{p} \right)^2 = \frac{9}{4};$$

$$1 + 2 \frac{R}{p} = \frac{3}{2};$$

$$\frac{R}{p} = \frac{1}{4};$$

$$p = 4R;$$

$$\angle KSO = \arcsin \left(\frac{R}{5R} \right) = \arcsin \frac{1}{5};$$

52) $\left(\frac{x^4}{y^2} \right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-x)y} = (-x)^{\lg(-x)} \cdot (-x)^{\lg y};$

$$\frac{(x^4)^{\lg y}}{(-x)^{\lg y}} = -x^{\lg(-x)} \cdot y^{\lg y};$$

$$t = -x;$$

$$\frac{(t^4)^{\lg y}}{t^{\lg y}} = t^{\lg t} \cdot (y^2)^{\lg y};$$

логарифмируем по основанию 10:

$$\lg y \cdot \lg(t^4) - 3 \lg y \cdot \lg t = \lg^2 t + 2 \lg^2 y;$$

$$\begin{cases} t = 2y \\ t = -y + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lg^2 t - 3 \lg y \cdot \lg t + 2 \lg^2 y = 0; \\ \lg t = 2 \lg y \\ \lg t = \lg y \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = 2y \\ t = -y + 4 \\ \lg t = 2 \lg y \\ \lg t = \lg y \\ t = y^2 \\ t = y \end{cases}$$

