

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$$16875 = 3^3 \cdot 5^4 \quad \text{т.е. три 3 и четыре 5}$$

Так как это числа 8-ми значные то в каждом числе будет четыре 5 и либо 1, 3, 3, 3, либо 1, 1, 3, 9

Другие варианты 3-5 (например 3-5 или 3³ или 5-5) не подходит т.к. это будут уже не цифры. Других цифр быть не может, иначе их произведение не будет равно 16875.

1.) Число состоит из 1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5

Поставим сначала 1. Вариантов её поставить 8

Вариантов поставить следом 3 тройки на 7 мест, оставшихся свободными.

$$C_7^3 = \frac{7!}{3!4!} = 35$$

Запомним, что для каждой расстановки 1, 3, 3, 3 по 8 местам у нас остается только 1 вариант постановки 5, 5, 5, 5.

Тогда всего $8 \cdot 35 = 280$ вариантов.

2.) 1, 1, 3, 9, 5, 5, 5, 5

Поставить 3 у нас 8 вариантов

Поставить 9 осталось 7 вариантов

Поставить 1, 1 осталось $C_6^2 = \frac{6!}{4!2!} = 15$ вариантов

5, 5, 5, 5 распределяются в оставшиеся 4 места однозначно.

Тогда всего $8 \cdot 7 \cdot 15 = 840$ вариантов

$$840 + 280 = 1120$$

Ответ: 1120

№3.

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0, \end{cases}$$

ОДЗ: ~~$y \neq 0$~~ $\begin{cases} y > 0 \\ x < 0 \end{cases}$

1.) $\lg \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = \lg(-x)^{\lg(-xy)}$

$(-x)^{\lg(-xy)} > 0$ и $\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} > 0$

$$\lg y \cdot (\lg x^4 - \lg y^2) = \lg(-xy) \cdot \lg(-x),$$

$$4 \lg y \cdot \lg |x| - 2 \lg^2 y = \lg(-x) \cdot \lg y + \lg^2(-x),$$

т.к. $x < 0$, то $\lg |x| = \lg(-x)$

Пусть $\lg(-x) = a$, $\lg y = b$, тогда

$$4ab - 2b^2 = ab + a^2,$$

$$a^2 - 3ab + 2b^2 = 0,$$

$$D = 9b^2 - 8b^2$$

$$a = \frac{3b \pm b}{2}$$

$$\begin{cases} a = 2b \\ a = b \end{cases}$$

Проведем обратную замену:

1.) $\lg(-x) = 2 \lg y$
 $-x = y^2$

2.) $\lg(-x) = \lg(y)$
 $-x = y$

Тогда $2y^2 + y^3 - y^4 + 4y^2 - 8y = 0$, $y > 0$

Тогда $2y^2 + y^2 - y^2 + 4y - 8y = 0$,

$$-y^3 + y^2 + 6y - 8 = 0,$$

$$y^3 - y^2 - 6y + 8 = 0$$

$$P(2) = 8 - 4 - 12 + 8 = 0$$

✓ $\begin{cases} y = 2 \\ x = -4 \end{cases}$

$$y^2 = 2y, \quad y > 0$$

✓ $\begin{cases} y = 2 \\ x = -2 \end{cases}$

По схеме Горнера:

	1	-1	-6	8
2	1	1	-4	0

$$y^2 + y - 4 = 0$$

продолжение на след. листе

√3 (продолжение)

$$y^2 + y - 4 = 0,$$

$$D = 1 + 16$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

т.к. $y > 0$, то

$$\begin{cases} y = \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \\ x = -\frac{18 - 2\sqrt{17}}{4} \end{cases}$$

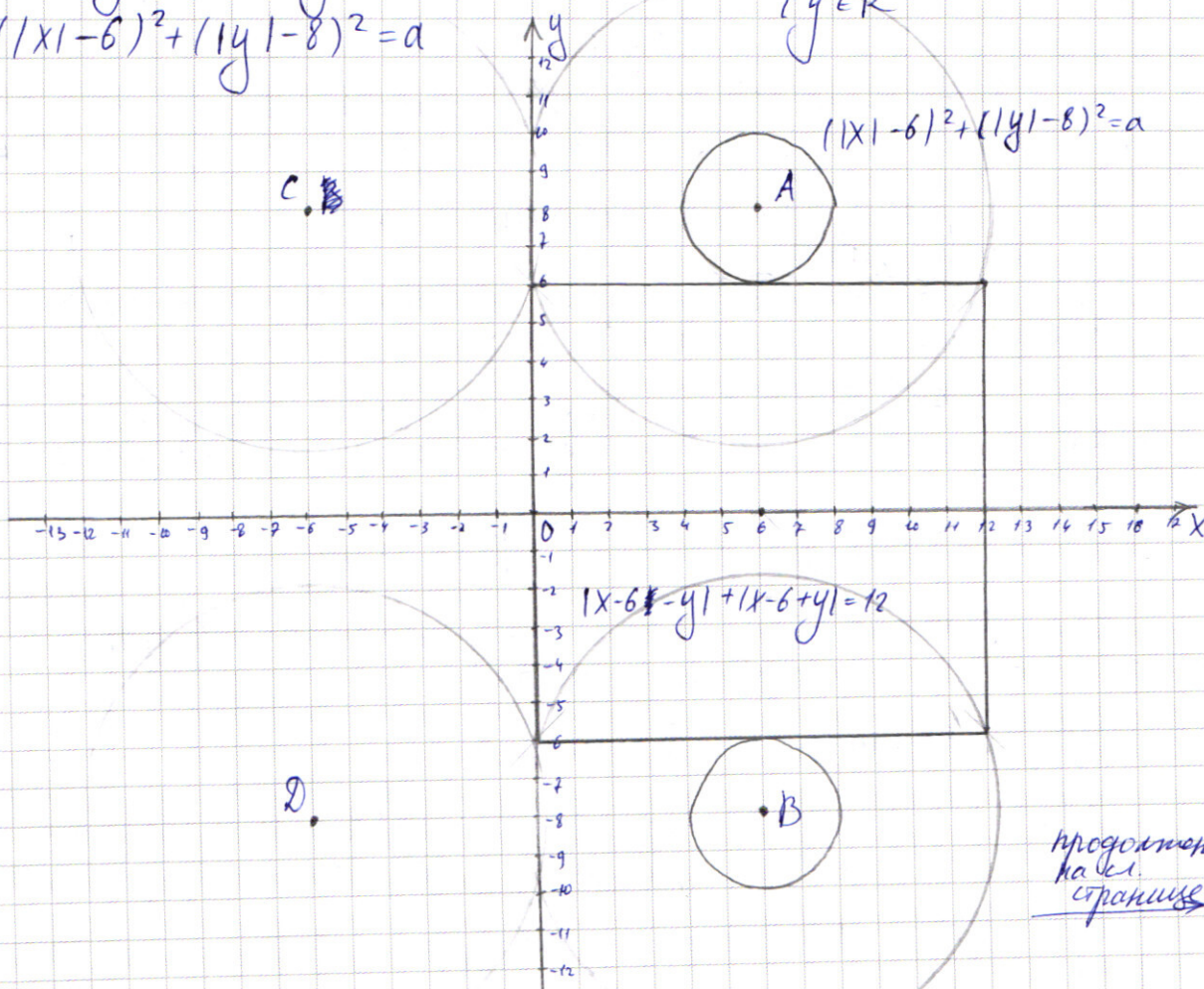
$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{17} - 9}{2} \\ y = \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \end{cases} \quad \checkmark$$

Ответ: $(-4; 2); (-2; 2); \left(\frac{\sqrt{17} - 9}{2}; \frac{\sqrt{17} - 1}{2}\right)$

√5.

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$



продолжение
на сл.
странице

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 (продолжение)

1.) $|x-6-y| + |x-6+y| = 12$ — квадрат со стороной $b=12$ и центром в точке ~~(6,0)~~ $(6,0)$

2.) $(|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a$ — 4 окружности с центрами в точках $A(6,8)$, $(-6,8)$, $B(6,-8)$ и $(-6,-8)$, но при пересечении окружностей какой-либо из осей, эта часть не существует. $R_{\text{окружностей}}^{\text{всех}}$ равен $8a$

а) Если окр. с центром в A , B касается квадрата, то, т.к. квадрат симметричен относительно Ox , окружности с центрами в B также касается квадрата в точке, симметричной относительно оси Ox .

При $R=6$ $R=8-6 \cdot \frac{1}{2} = 2$ окр. A и окр. B касаются квадрата, окр. C и окр. D нигде не пересекают его $\Rightarrow 2$ решения ✓

При $R \in [0; 2\frac{2}{3})$ нет решений X

При $R \in (2\frac{2}{3}; 2\sqrt{10})$ окр. A дважды пересекает квадрат, как и окр. B . $\Rightarrow 4$ решения X

При $R=2\sqrt{10}$ окр. A касается квадрата в 2 точках, в одной из которых его также касается окр. D . Аналогично для C и D $\Rightarrow 4$ решения X

При R от $2\sqrt{10}$ до $\sqrt{8^2+6^2} = 10$

При $R \in [2\sqrt{10}; 10]$ окр. C и D не касаются квадрата и не пересекают его («сведенные» части)

При $R \in [2\sqrt{10}; 10)$ 4 решения

При $R=10$ 2 точки пересечения окр. A и C с квадратом совпадают $\Rightarrow$ остается 2 точки пересечения $\Rightarrow 2$ решения ✓
(0,0) и (12,0)

При $R > 10$ пересечений с квадратом нет $\Rightarrow$ нет решений X на с. листе

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 (продолжение)

Ляками образом $k=2$ и $k=10 \Rightarrow a=4$ или $a=100$
 Ответ: $a=4; 100$

№7.

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{x-1} \\ y < 85 + (3^{x-1} - 1)x \end{cases} \Rightarrow 85 + (3^{x-1} - 1)x - 3^x - 4 \cdot 3^{x-1} > 0$$

$$3^{x-1}(x-4) > 3^x + x - 85$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

Сл.к. обе функции монотонно возрастают, то у них 2 точки пересечения. И отрезок, на котором для y есть решения, непрерывен. Найдём его крайние точки

$$x=1: -3 \cdot 3^{0-1} < 3 + 1 - 85$$

$$x=2: -2 \cdot 3^{1-1} < 9 + 2 - 85$$

$$x=3: -3 \cdot 3^{2-1} < 27 + 3 - 85$$

$$x=4: 0 = 0$$

$$x=5: 3^{4-1} > 3^5 - 80 \leftarrow \text{начало отрезка для } x \in \mathbb{Z}$$

При $x=4$ обе y части равны.

Они будут y равны и при ещё раз.

Пусть $x=85$, тогда $x-85=0$; $x-4=81=3^4 \Rightarrow$

$$3^{81} \cdot 3^4 \checkmark 3^{85}$$

$$3^{85} = 3^{85}$$

Тогда решения есть при $x \in [5; 84]$

каждое решение для каждого x :

$$3^{x-1}(x-4) - 3^x - x + 85$$

$$\begin{aligned} \text{Всего решений: } S &= 3^{81} \cdot (1 + \dots + 80) - (3^5 + 3^6 + \dots + 3^{84}) - (5 + \dots + 84) + 85 \cdot 80 = \\ &= 40 \cdot 3^{85} - (3^5 + 3^6 + \dots + 3^{84}) - 40 \cdot 89 + 85 \cdot 80 \end{aligned}$$

на сл. странице $\rightarrow$

№2 (продолжение)

$$3 + 3^2 + \dots + 3^{84} =$$

$$S = 40 \cdot (3^{85} - 259) - (3^5 + \dots + 3^{84})$$

~~Ответ: $S = 40 \cdot (3^{85} - 259) - (3^5 + \dots + 3^{84})$~~

~~ЗЗЗ~~ Сумма геом. прогрессии

$$S = 40 \cdot (3^{85} - 259) - \frac{3^5 \cdot (3^{80} - 1)}{2}$$

$$S = 40 \cdot 3^{85} - 259 \cdot 40 - \frac{3^{85}}{2} + \frac{3^5}{2}$$

№2 ка
ар. 2

$$3^5 + \dots + 3^{84} = \frac{3^5 \cdot (3^{80} - 1)}{2}$$

(не записано)!

~~Ответ: $S = 3^{85}$~~

~~Ответ: $S = 3^{85} - 39,5 - \frac{3^5 \cdot (3^{80} - 1)}{2}$~~

$S = 40 \cdot (3^{85} - 259) - \frac{3^5 \cdot (3^{80} - 1)}{2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

 $\sqrt{2}$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x, \quad \text{ОДЗ: } x \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt{2} \cos 10x = -(\sin 7x + \sin 3x) + (\cos 7x + \cos 3x),$$

$$\sqrt{2} \cos 10x = -2 \sin 5x \cos 2x + 2 \cos 5x \cos 2x,$$

$$\sqrt{2} \cos 10x = 2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x),$$

$$\sqrt{2} \cos 10x = 2 \cos 2x \cdot \sqrt{2} \cdot \cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\cos 10x = 2 \cos 2x \cdot \cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \cos 8x - 4 \sin^2 2x \cdot \cos 4x = \cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \checkmark$$

$$\cos 8x - 4 \sin^2 2x \cdot \cos 4x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x$$

$$\begin{aligned} (*) \cos 10x &= \\ &= \cos 2x \cdot \cos 8x - \sin 2x \cdot \sin 8x = \\ &= \cos 2x \cdot (\cos 8x - 4 \sin^2 2x \cdot \cos 4x) \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

~~16875~~

$$\begin{array}{r} 16875 \\ 5625 \\ 1875 \\ 625 \\ 125 \\ 25 \\ 5 \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16875 \\ 5625 \\ 1875 \\ 625 \\ 125 \\ 25 \\ 5 \\ 1 \end{array}$$

$16875 = 3^3 \cdot 5^4$
 13335555
 11935555

$$\begin{array}{r} 13 \\ 625 \\ \times 27 \\ \hline 4375 \\ +1250 \\ \hline 16875 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13335555 \\ 11935555 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ \times 35 \\ \hline 280 \end{array}$$

1.) 13335555×8 $8 \cdot 35$

Поставить 1 8 вариантов

$$\begin{array}{l} 1333 \cdot \cdot \cdot \cdot \\ 133 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot \cdot \\ 133 \cdot \cdot \cdot 333 \\ 133 \cdot \cdot \cdot 3 \cdot \cdot \cdot \\ 133 \cdot \cdot \cdot \cdot 3 \cdot \cdot \cdot \\ 13 \cdot 33 \cdot \cdot \cdot \cdot \\ 13 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot \cdot \\ 13 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot 3 \cdot \cdot \cdot \\ 13 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot \cdot 3 \cdot \cdot \cdot \\ 1 \cdot 333 \cdot \cdot \cdot \cdot \\ 1 \cdot \cdot 333 \cdot \cdot \cdot \cdot \end{array}$$

$$\underbrace{5+4+3+2+1}_{=5} + \underbrace{4+3+2+1+3+2+1+2+1+1}_{=10} = 5+10+10+6+4 = 35$$

$$\begin{array}{l} 1333 \cdot \cdot \cdot \cdot \\ 133 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot \cdot \\ 133 \cdot \cdot \cdot 333 \\ 133 \cdot \cdot \cdot 3 \cdot \cdot \cdot \\ 133 \cdot \cdot \cdot \cdot 3 \cdot \cdot \cdot \\ 13 \cdot 33 \cdot \cdot \cdot \cdot \\ 13 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot \cdot \\ 13 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot 3 \cdot \cdot \cdot \\ 13 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot \cdot 3 \cdot \cdot \cdot \\ 1 \cdot 333 \cdot \cdot \cdot \cdot \\ 1 \cdot \cdot 333 \cdot \cdot \cdot \cdot \end{array}$$

$$C_7^3 = \frac{7!}{4!3!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{6} = 5 \cdot 7 = 35$$

$$C_8^3 = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} = 8 \cdot 7 = 56$$

Поставить 55555 1 вар.

2.) $8 \cdot 7$ 8 вар $8 \cdot 7 \cdot 15$

$8 \cdot 3$ 7 вар

$5+4+3+2+1 = 15$

$8 \cdot 7 \cdot 15 = 840$

$840 + 280 = 1120$

Ответ: 1120

✓ 2.

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x \quad \text{ООЗ: } x \in \mathbb{R}$$

$$\cos 7x = \cos(10x - 3x) = \cos 10x \cdot \cos 3x + \sin 10x \cdot \sin 3x$$

$$\sin 7x = \sin(10x - 3x) = \sin 10x \cdot \cos 3x - \cos 10x \cdot \sin 3x$$

$$\cos 10x (\cos 3x + \sin 3x - \sqrt{2}) + \cos 3x (1 - \sin 10x) = \sin 3x (1 - \sin 10x),$$

$$\cos 10x (\cos 3x + \sin 3x - \sqrt{2}) = (1 - \sin 10x) (\sin 3x - \cos 3x)$$

$$\cos 10x = \cos 7x \cos 3x - \sin 7x \cdot \sin 3x$$

$$\cos 7x + \cos 3x = 2 \cos 5x \cdot \cos 2x$$

$$\sin 7x + \sin 3x = 2 \sin 5x \cdot \cos 2x$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 7x \cos 3x = \sin 7x + \sin 3x - \sqrt{2} \sin 7x \cdot \sin 3x$$

$$(\sin 7x - \sin 3x - \sqrt{2})^2 = \sin^2 7x + 2 \sin^2 3x - \sqrt{2} \sin 7x$$

$$\sin 7x - \sin 3x - \sqrt{2} \cos 7x \cos 3x = 2 \sin \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \sin \left(7x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$7x - \frac{\pi}{2} + 7x = 14x - \frac{\pi}{2}$$

$$\cos 3x - \cos \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) = -2 \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) = -\sqrt{2} \sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$-\sqrt{2} \sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) - \sqrt{2} \cos 10x = \sqrt{2} \sin \left(7x - \frac{\pi}{4} \right),$$

$$-\cos 10x = \sin \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right),$$

$$-\cos 10x = 2 \sin \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\sqrt{2} \cos 10x = \cos 7x + \cos 3x - \cos \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) - \cos \left(3x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\sqrt{2} \cos 10x = \cos 7x + \cos 3x - (\sin 7x + \sin 3x),$$

$$\sqrt{2} \cos 10x = 2 \cos 5x \cdot \cos 2x - 2 \sin 5x \cdot \cos 2x,$$

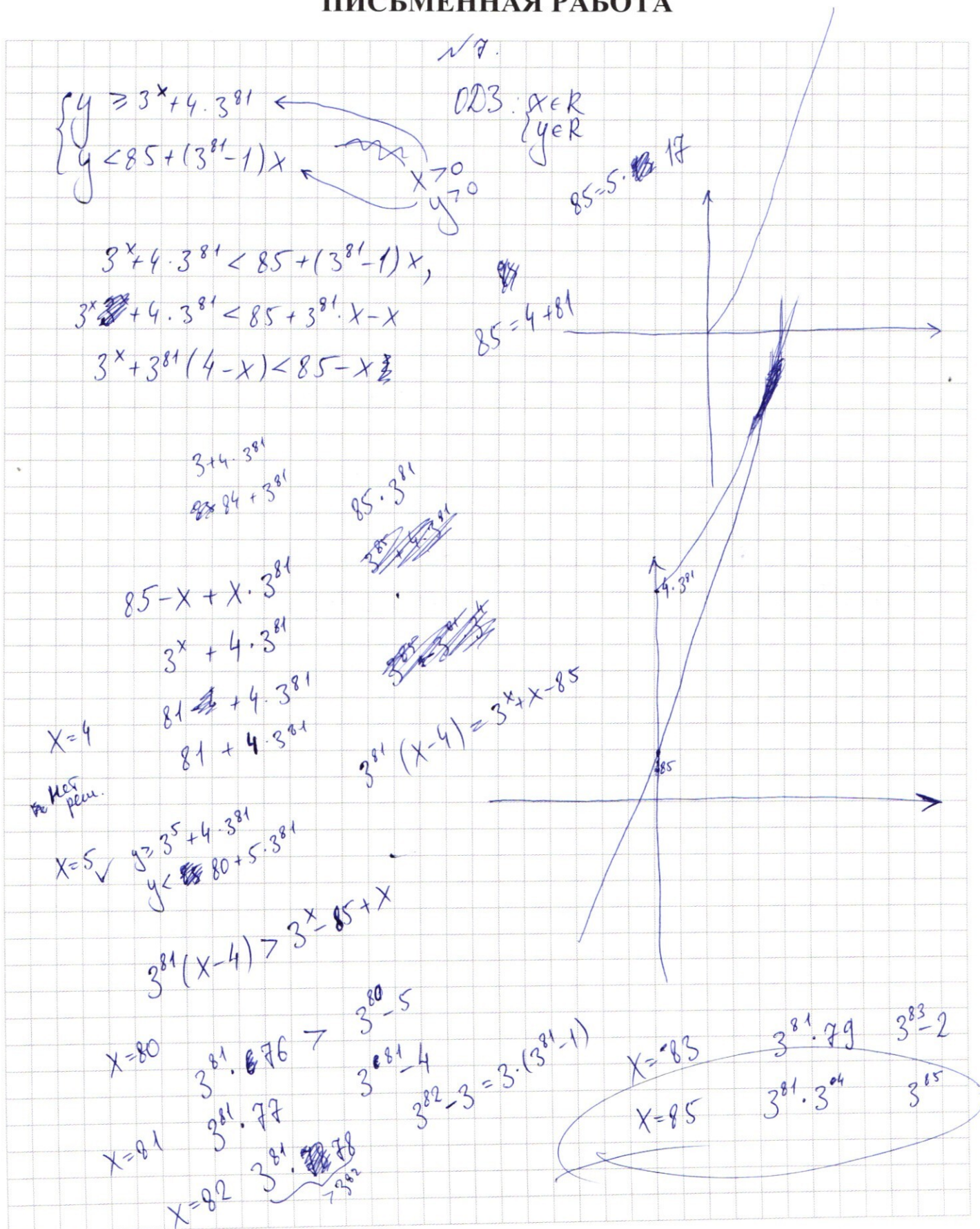
$$\sqrt{2} \cos 10x = 2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x),$$

$$\sqrt{2} \cos 10x = 2 \cos 2x \cdot \sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x \right),$$

$$\cos 10x = 2 \cos 2x \cdot \cos \left(5x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\cos 7x + \cos 3x = 2 \cos 5x \cdot \cos 2x$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\cancel{x \in [5; 85]}$$

$$\cancel{x=6}$$

$$x \in [5; 84]$$

$$x=5$$

$$y \geq 3^5 + 4 \cdot 3^{81}$$

$$y < \cancel{80} + 5 \cdot 3^{81}$$

$$5 \cdot 3^{81} + 80 - 4 \cdot 3^{81} - 3^5 = 3^{81} + 80 - 3^5$$

$$x=6$$

$$y \geq 3^6 + 4 \cdot 3^{81}$$

$$y < 89 + 6 \cdot 3^{81}$$

$$\cancel{6 \cdot 3^{81}}$$

$$x \cdot 3^{81} + 85 - x - 3^x - 4 \cdot 3^{81} = 3^{81} \cdot (x-4) - 3^x - x + 85$$

$$y = \underbrace{a; a+1; a+2; a+3; a+4}_{85}$$

$$y \geq a$$

$$y < a+5$$

$$\frac{\cancel{85} + 84}{2} \cdot 80 = 40 \cdot 89$$

$$\begin{aligned} S &= (3^{81} \cdot (5-4) - 3^5 - 5 + 85) + (3^{81} \cdot (6-4) - 3^6 - 6 + 86) + \dots + (3^{81} \cdot (84-4) - 3^{84} - 84 + 85) \\ &= 3^{81} \cdot (\cancel{1} + \dots + \cancel{84}) - (3^5 + 3^6 + \dots + 3^{84}) - (5 + 6 + \dots + 84) + 85 \cdot 80 = \\ &= 40 \cdot 3^{85} - \cancel{3^5} - 3^5 \cdot (1 + 3^1 + \dots + 3^{79}) - 40 \cdot 89 + 85 \cdot 80 \end{aligned}$$

√3.

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases}$$

ОДЗ: $\begin{cases} y > 0 \\ x < 0 \end{cases}$

$$(-x)^{\lg(-xy)} = (-x)^{\lg(-x) + \lg y}$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-x)} \cdot (-x)^{\lg y}$$

$$\lg\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = \lg(-x)^{\lg(-x)} + \lg(-x)^{\lg y}$$

$$2 \lg y \cdot \lg \frac{x^2}{y} = \lg(-xy) \cdot \lg(-x)$$

$$2y - x - \frac{x^2}{y} - 4\frac{x}{y} - 8 = 0$$

$$2 \lg \cdot \lg \frac{x^2}{y} = (\lg(-x) + \lg y) \cdot \lg(-x)$$

$$\frac{x^2}{y} = 2y - x - 4\frac{x}{y} - 8$$

~~$$2y^2 = x^2 + 4x$$~~

$$\begin{aligned} -xy &= x^2 + 4x + 8y - 2y^2 \\ -xy &= \underbrace{x(x+4)}_{>0} - \underbrace{2y(y+4)}_{>0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 &> |4x| \\ x^2 - 4|x| &> 0 \\ |x|(|x| - 4) &> 0 \\ |x| &> 4 \\ x &< -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+4 &< 0 \\ x &< -4 \end{aligned}$$

$$x(x+4) > 2y(y+4)$$

$$x^2 + 4x > 2y^2 + 8y$$

$$x^2 + 4x > 2 \underbrace{(y^2 + 4y)}_{>0}$$

~~$$x^{\lg y} \cdot y^{-2 \lg y} = (-x)^{\lg(-x)} \cdot (-x)^{\lg y}$$~~

$$2 \lg y (\lg x^2 - \lg y) = (\lg(-x) + \lg y) \cdot \lg(-x)$$

~~$$4 \lg y \cdot \lg(-x) - 2 \lg^2 y = \lg^2(-x) + \lg y \cdot \lg(-x)$$~~

$$3 \lg y \cdot \lg(-x) = \lg^2(-x) + 2 \lg^2 y$$

$$\lg(-x) = a$$

$$\lg y = b$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x)$$

~~2~~

$$\cos 10x = 2 \cos 2x \cdot \sin \left(\frac{x}{4} - 5x \right)$$

$$\cos 10x = 2 \cos 2x \cdot \cos \left(\frac{x}{4} + 5x \right)$$

$$\cos 8x = 2 \cos^2 4x - 1$$

$$\cos 10x = 2 \cos^2 5x - 1$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$\cos 10x = \cos 2x \cdot \cos 8x - \sin 2x \cdot \sin 8x$$

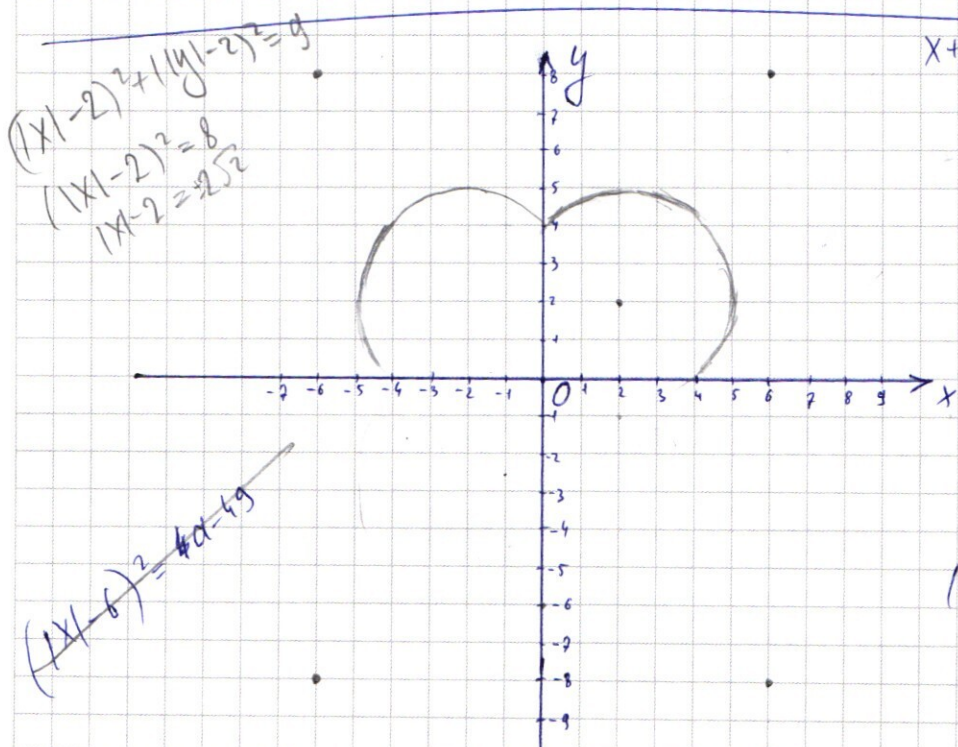
~~cos 10x =~~

$$\sin 8x = 2 \sin 4x \cdot \cos 4x = 4 \sin 2x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x$$

$$\cos 10x = \cos 2x (\cos 8x - 4 \cos 2x \cdot \cos 4x + 4 \sin^2 2x \cdot \cos 4x)$$

$$1.) \cos 2x = 0 \quad \checkmark$$

$$2.) \underbrace{\cos 8x}_{\cos 8x = 2 \cos^2 4x - 1} - 4 \underbrace{\sin^2 2x}_{\sin^2 2x = 1 - \cos^2 2x} \cdot \cos 4x = 2 \cos \left(\frac{x}{4} + 5x \right),$$



$$x+y \geq 6$$

$$x-6-y \geq 0$$

$$x-y \geq 6$$

$$y \leq x-6$$

$$y \geq 6-x$$

$$2x-12=12$$

$$2x=24$$

$$x=12$$

$$(y-8)^2 = a-36$$

$$x-6-y \geq 0$$

$$y \leq x-6$$

$$x-6+y \geq 0$$

$$y \geq 6-x$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$a^2 + 2b^2 - 3ab = 0,$$

$$a^2 - 3ab + 2b^2 = 0,$$

$$D = 9b^2 - 4b^2$$

$$D = 9b^2 - 8b^2$$

$$D = 1b^2$$

$$a = \frac{(3 \pm 1)b}{2}$$

$$a = \frac{3b \pm b}{2}$$

$$a = \frac{3b \pm b}{2}$$

$$\begin{cases} a = 2b \\ a = b \end{cases}$$

$$1.) \lg(-x) = 2 \lg y$$

$$(-x) = y^2$$

$$2y^2 + y^3 - y^4 + 4y^2 - 8y = 0,$$

$$y^3 - y^2 - 6y + 8 = 0$$

$$2y + y^2 - y^3 + 4y - 8 = 0,$$

$$y^3 - y^2 - 6y + 8 = 0$$

1	-1	-6	8
2	1	1	-4
			0

$$y^2 + y - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16$$

$$-1 \pm \sqrt{17}$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

$$x = \frac{-18 + 2\sqrt{17}}{4}$$

???

$$9 - \sqrt{17} - \frac{124 - 28\sqrt{17}}{4} - 6\sqrt{17} + 22$$

$$2.) \lg(-x) = \lg y$$

$$-x = y$$

$$2y^2 + y^2 - y^2 + 4y - 8y = 0,$$

$$2y + y - y + 4 - 8 = 0,$$

$$2y = 4,$$

$$y = 2$$

$$x = -2$$

$$8 \times 8 - 16 + 16 - 16$$

$$17 - 2\sqrt{17} + 1$$

$$9 - \sqrt{17} - \frac{124 - 28\sqrt{17}}{4} - 6\sqrt{17} + 22$$

$$\frac{x^4}{x} = -x^3$$

$$- \frac{17 + 81 - 18\sqrt{17}}{4} - 2(\sqrt{17} - 9) - \frac{1}{4}(\sqrt{17} - 1)$$

$$1+3+9=13$$

$$S = \frac{8 + (q^n - 1)}{q - 1}$$

~~$$\cos 8x = \cos 2x$$~~

~~$$2\cos^2 4x - 1 - 4\sin^2 2x \cdot \cos 4x = \cos 4x + 2 - 4\sin^2 2x$$~~

$$\sin^2 2x = 1 - \cos^2 2x$$

$$2\cos 4x = 4\cos^2 2x - 2$$

~~$$2\cos^2 4x - 1 - 4\cos 4x + 4\cos^2 2x \cdot \cos 4x$$~~

~~$$2\cos 4x (\cos 4x - 2\sin^2 2x) - 1$$~~

$$1 - 4\sin^2 2x = 4\cos^2 2x - 3$$

$$(4\cos^2 2x - 2)(4\cos^2 2x - 3) = -1$$

$$\alpha = 2 \quad \alpha = 3 \quad \alpha = 1$$

$$\alpha = -6 \quad \alpha = 2 \quad \alpha = -7 \quad \alpha = 1$$

$$16\cos^4 2x - 20\cos^2 2x + 5$$

$$16a^2 - 20a + 5 \quad a \in [0; 1]$$

$$3 + 3^2 + 3^3$$

$$\frac{5}{8}$$

$$\frac{25}{4} - \frac{25}{2} + 5 = 5 - \frac{25}{4} = -\frac{5}{4}$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}(\cos 7x \cdot \cos 3x - \sin 7x \cdot \sin 3x) = \sin 7x + \sin 3x,$$

~~$$a + b = \sqrt{2}$$~~

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 7x \cdot \cos 3x = \sin 7x + \sin 3x - \sqrt{2} \sin 7x \cdot \sin 3x$$

$$2\cos 5x \cdot \cos 2x - \sqrt{2} \cos 7x \cdot \cos 3x = 2\sin 5x \cdot \cos 2x - \sqrt{2} \sin 7x \cdot \sin 3x$$

$$a + b - \sqrt{2}ab = \sqrt{1-a^2} + \sqrt{1-b^2} - \sqrt{2}\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}$$

$$a + b - \sqrt{2}ab = c + d - \sqrt{2}cd$$

~~$$\cos 7x = \cos(\frac{\pi}{2} - 7x)$$~~

$$7x = \frac{\pi}{2} - 7x$$

$$x = \frac{\pi}{14}$$

$$\cos 7x (1 - \sqrt{2} \cos 3x)$$

$$\frac{84.85}{2} = 42.85$$

$$42.85 - 10$$

$$2.384 - 3.83 = 3.84$$

$$3+9+27=39$$

$$39+81=120$$

$$3^{85} - 3^{84} = 2 \cdot 3^{84}$$

3

~~$$a + b - \sqrt{2}ab$$~~

$$2 \cdot 3^{84} - 3^{83} = 3^{83}(5-1) = 4 \cdot 3^{83}$$

$$4 \cdot 3^{83} - 3^{82} = 3^{82}(12-1) = 11 \cdot 3^{82}$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

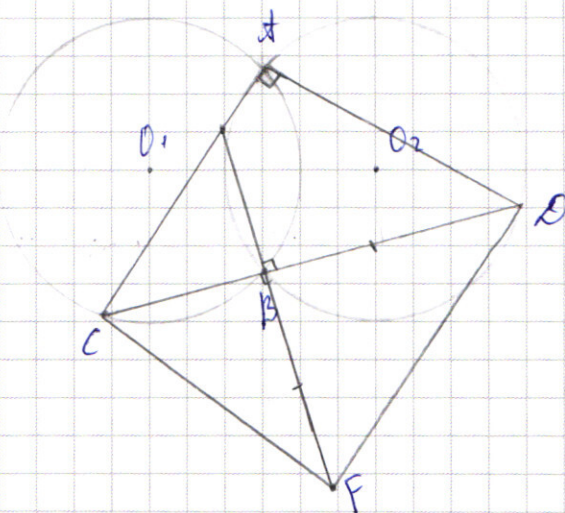
$$\begin{cases} y \leq x-6 \\ y \leq 6-x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x-6+y &\leq 0 \\ y &\leq 6-x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -y - y &= 12 \\ -2y &= 12 \\ y &= -6 \end{aligned}$$

$$y = 6$$

$$R = \sqrt{36 + 4} = 2\sqrt{10}$$



$$40(89 + 170) = 40 \cdot 259$$