

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N5 а-? → 2реш

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 & (1) \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a & (2) \end{cases}$$

(1): Рассмотрим 4 случая, в зависимости от знака подмодульного выражения.

$$\begin{aligned} \text{а)} \begin{cases} x-6-y \geq 0 \\ x-6+y \geq 0 \\ x-6-y+x-6+y=12 \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq x-6 \\ y \geq 6-x \\ x=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 6 \\ y \geq -6 \\ x=12 \end{cases} \end{aligned}$$

Задаётся вертикальная прямая $x=12$ на промежутке $y \in [-6; 6]$

$$\begin{aligned} \text{б)} \begin{cases} x-6-y \geq 0 \\ x-6+y \leq 0 \\ x-6-y-x+6+y=12 \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq x-6 \\ y \leq 6-x \\ y=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 12 \\ y=-6 \end{cases} \end{aligned}$$

Задаётся горизонтальная прямая $y=-6$ на промежутке $x \in [0; 12]$

$$\begin{aligned} \text{в)} \begin{cases} x-6-y \leq 0 \\ x-6+y \geq 0 \\ -x+6+y+x-6+y=12 \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq y+6 \\ x \geq 6-y \\ y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 12 \\ x \geq 0 \\ y=6 \end{cases} \end{aligned}$$

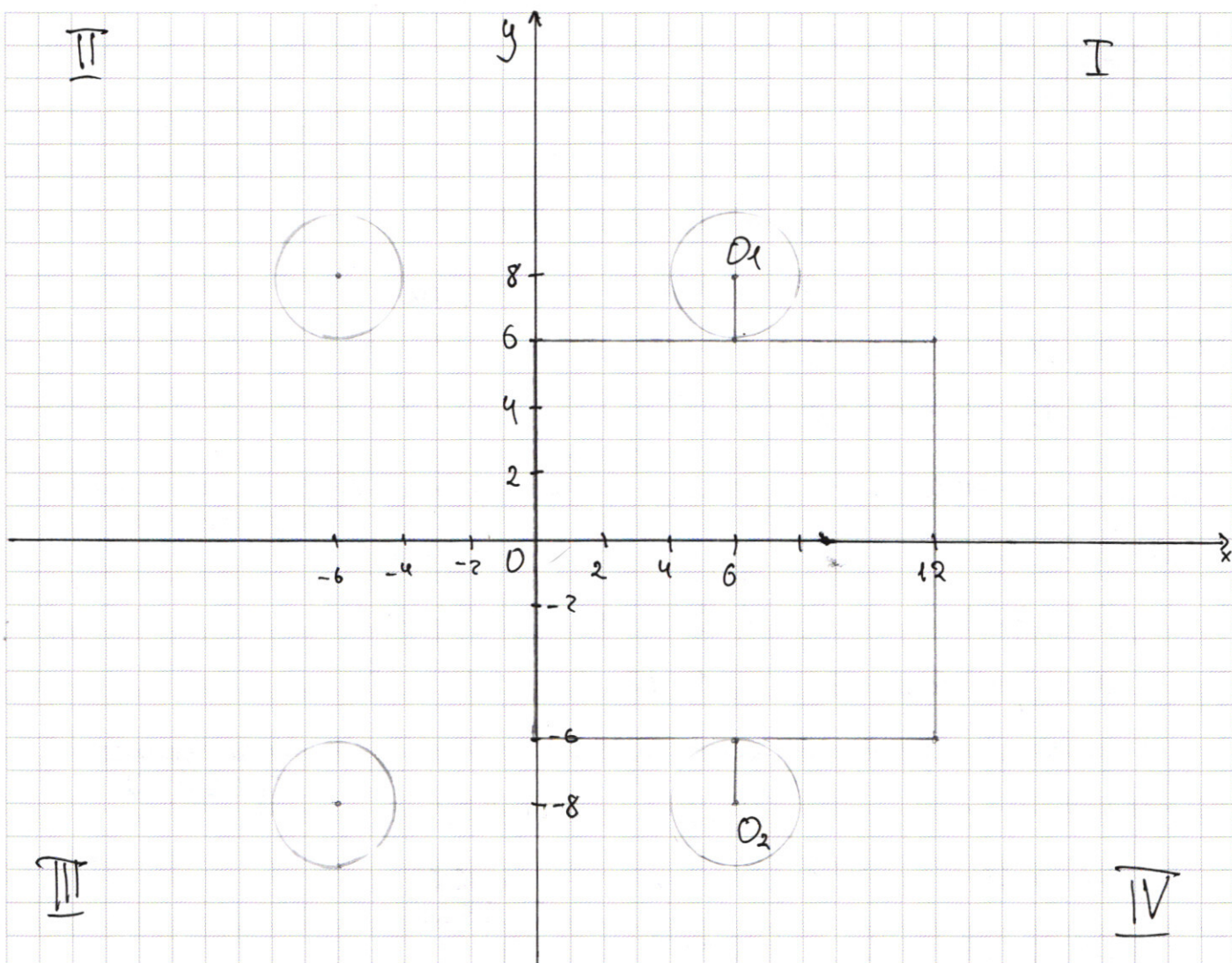
Задаётся горизонтальная прямая $y=6$ на промежутке $x \in [0; 12]$

$$\begin{aligned} \text{г)} \begin{cases} x-6-y \leq 0 \\ x-6+y \leq 0 \\ -x+6+y-x+6+y=12 \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq x-6 \\ y \leq 6-x \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -6 \\ y \leq 6 \\ x=0 \end{cases} \end{aligned}$$

Задаётся верт. прямая $x=0$ на промежутке $y \in [-6; 6]$.

(2) ур-е задаёт 4 окружности с центрами $(6; 8)$; $(-6; 8)$; $(6; -8)$; $(-6; -8)$; и радиусами $\sqrt{a}$ (или 4 точки при $a=0$), но

при $a=0$ система не имеет решений.



Поискем, что (1) ур-е задаёт квадрат с центром в $(6; 0)$ и стороной равной 12.

3) Система имеет 2 решения ^{только} в том случае, если окружности из I и IV четвертей касаются прямых $y=6$ и $y=-6$ соответственно (которые являются сторонами квадрата).

Т.к. окружности из I и IV четвертей симметричны отн. оси Ox и прямые $y=6$ и $y=-6$ также симметричны,

то система будет иметь 2 решения при $R = \sqrt{a^2} = r(O_1; y_1) = r(O_2; y_2)$, где O_1 — центр окр. из I четверти, O_2 — центр окр. из IV ч.

$y_1 = 6$ (на промежутке $0 \leq x \leq 12$), $y_2 = -6$ (на промежутке $0 \leq x \leq 12$).

$$r(O_1; y_1) = 2 = \sqrt{a^2} \Rightarrow \underline{a=4}$$

Ответ: $a=4$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} & (1) \quad \text{т.к. логарифмическое выражение} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 & (2) \quad \text{строго больше 0, то получим:} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y > 0 \\ -xy > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y > 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

Преобразуем (2) уравнение:

$$y^2 + y^2 - x^2 - xy - 4(x+2y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2y+x)(y-x-4) = 0$$

$$(y-x)(y+x) + y(y-x) - 4(x+2y) = 0$$

$$(y-x)(2y+x) - 4(x+2y) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = -\frac{x}{2} \\ y = x+4 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -\frac{x}{2} \\ y = x+4 \end{cases}$$

I. Подставим $y = -\frac{x}{2}$ в (1) уравнение:

$$\begin{aligned} \left(\frac{4x^4}{x^2}\right)^{\lg(-\frac{x}{2})} &= (-x)^{\lg(-x \cdot (-\frac{x}{2}))} \Leftrightarrow (4x^2)^{\lg(-\frac{x}{2})} = (-x)^{\lg(-\frac{x}{2}) + \lg(x)} \quad (\text{т.к. } x \neq 0). \\ 4^{\lg(-\frac{x}{2})} \cdot x^{2 \cdot \lg(-\frac{x}{2})} &= (-x)^{\lg(-\frac{x}{2})} \cdot (-x)^{\lg x} \quad | : (-x)^{\lg(-\frac{x}{2})} \end{aligned}$$

Преобразуем обе части уравнения по основанию 10.

$$\lg 4^{\lg(-\frac{x}{2})} \cdot \lg x^{2 \cdot \lg(-\frac{x}{2})} = \lg(-x)^{\lg(-\frac{x}{2})} \cdot \lg(-x)^{\lg x} \quad a^n > 0 \Rightarrow (-x)^n > 0.$$

II. Преобразуем (1)е уравнение:

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} = (-x)^{\lg(-x)} \cdot (-x)^{\lg y} \quad | : (-x)^{\lg y} \quad (\text{т.к. } (-x)^{\lg y} > 0).$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2-x}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-x)} \Rightarrow \left(-\frac{x^3}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-x)}$$

$$\begin{aligned} \text{III. } y = -\frac{x}{2} \\ \left(-\frac{4x^3}{x^2}\right)^{\lg(-\frac{x}{2})} &= (-x)^{\lg(-x)} \Leftrightarrow \frac{(-4x)^{\lg(-x)}}{(-4x)^{\lg 2}} = (-x)^{\lg(-x)} \Leftrightarrow \left(\frac{-4x}{-x}\right)^{\lg(-x)} = (-4x)^{\lg 2} \end{aligned}$$

и.оборот.

$$\Leftrightarrow 4^{\lg(-x)} = (4x)^{\lg 2} \Leftrightarrow \lg(4^{\lg(-x)}) = \lg(4x^{\lg 2}) \Leftrightarrow$$

логарифмируем обе части ур-я по основанию 10, т.к. они ^{натуральные}

$$\Leftrightarrow \lg(-x) \cdot \lg 4 = \lg 2 \cdot (\lg(-x) + \lg 4) \Leftrightarrow 2 \lg 2 \cdot \lg(-x) = \lg 2 \cdot \lg(-x) + 2 \lg^2 2$$

погасим обе части на $\lg 2$, т.к. $\lg 2 \neq 0$.

$$2 \lg(-x) = \lg(-x) + 2 \lg^2 2$$

$$\lg(-x) = \lg 4 \Rightarrow -x = 4 \Rightarrow \boxed{x = -4} - \text{удовлетворяет условию } x < 0.$$

б) $y = x+4$; т.к. $y > 0$ и $x > 0$, то $\begin{cases} x+4 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 < x < 0$.

$$\left(\frac{-x^3}{(x+4)^2}\right)^{\lg(x+4)} = (-x)^{\lg(-x)}$$

логарифмируем обе части ур-я по основанию 10 (т.к. $\left(\frac{-x^3}{(x+4)^2}\right)^{\lg(x+4)} > 0$ ($a^n > 0$) и $(-x)^{\lg(-x)} > 0$).

Получаем, что: $\lg(x+4) \cdot \lg\left(\frac{-x^3}{(x+4)^2}\right) = \lg(-x) \cdot \lg(-x)$

$$\lg(x+4) \cdot (\lg(-x^3) - \lg(x+4)^2) = \lg^2(-x)$$

$$\lg(x+4) \cdot (3 \lg(-x) - \lg(x+4)^2) - \lg^2(-x) = 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$\lg(x+4)^2 = 2 \lg(x+4) \quad (\text{т.к. в начале пункта б) поставили ограничение на } x)$$

$$\lg^2(-x) - 3 \lg(-x) \cdot \lg(x+4) + 2 \lg^2(x+4) = 0 \quad | : \lg^2$$

$$\Leftrightarrow (\lg(-x) - \lg(x+4)) \cdot (\lg(-x) - 2 \lg(x+4)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lg(-x) = \lg(x+4) \\ \lg(-x) = 2 \lg(x+4) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x = x+4 \\ -x = (x+4)^2 \\ -4 < x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x^2 + 8x + 16 + x = 0 \quad (?) \\ -4 < x < 0 \end{cases}$$

Рассмотрим (?) ур-е: $x^2 + 9x + 16 = 0$, $D = 81 - 4 \cdot 16 = 17$

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{17}}{2} - \text{корни уравнения.}$$

Проверим, принадлежат ли корни отрезку $(-4; 0)$.

см. следующий лист

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 (продолжение)

$$\frac{-9 - \sqrt{17}}{2} \quad \checkmark -4$$

$$\frac{-9 + \sqrt{17}}{2} \quad \checkmark -2$$

$$-(9 + \sqrt{17}) \quad \checkmark -8$$

$$8 \quad \checkmark 9 + \sqrt{17}$$

Значит, $\frac{-9 - \sqrt{17}}{2} < -4$ и не входит в отрезок $(-4; 0)$ и поэтому
этот корень не подходит

$$\frac{-9 + \sqrt{17}}{2} \quad \checkmark -4$$

$$\frac{-9 + \sqrt{17}}{2} \quad \checkmark 0$$

$$\text{Значит, } -4 < \frac{-9 + \sqrt{17}}{2} < 0$$

$$-9 + \sqrt{17} \quad \checkmark -8$$

$$-9 + \sqrt{17} \quad \checkmark 0$$

и этот корень

$$\sqrt{17} \quad \checkmark 1$$

$$\sqrt{17} \quad \checkmark 9$$

подходит.

$$\sqrt{17} \quad \checkmark \sqrt{81}$$

В итоге, мы получили 3 решения:

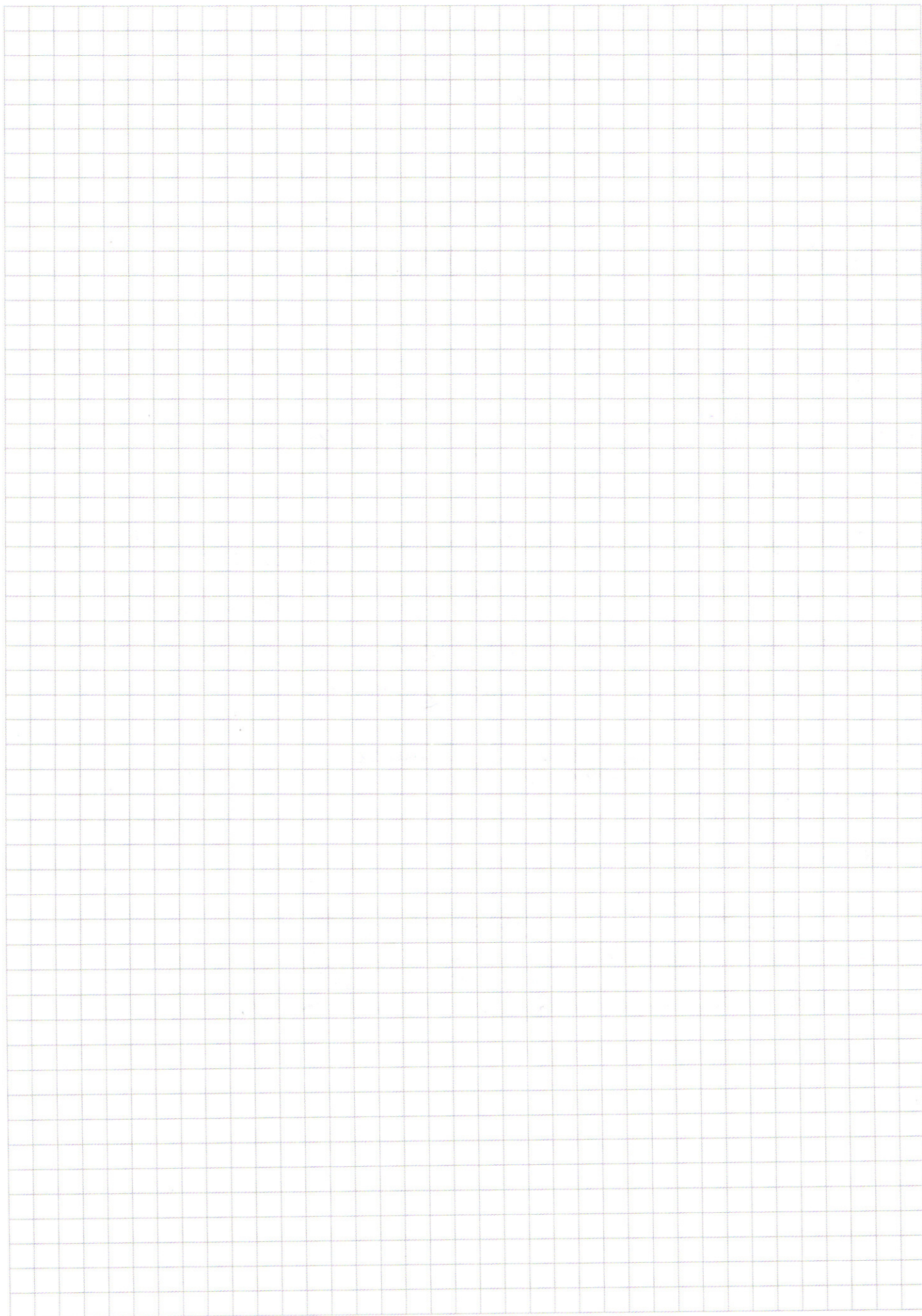
$$x = -4, x = -2, x = \frac{-9 + \sqrt{17}}{2}$$

$$\text{при } x = -4, y = -\frac{x}{2} = -\frac{-4}{2} = 2.$$

$$\text{при } x = -2, y = x + 4, y = 2$$

$$\text{при } x = \frac{-9 + \sqrt{17}}{2}, y = x + 4 = \frac{\sqrt{17} - 9 + 8}{2} = \frac{\sqrt{17} - 1}{2}$$

$$\text{Ответ: } (-4; 2); (-2; 2); \left(\frac{-9 + \sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \right).$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 2

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\cos 4x + \cos 3x = 2 \cdot \cos 5x \cdot \cos 2x; \sin 7x + \sin 3x = 2 \cdot \sin 5x \cdot \cos 2x$$

Получаем, что:

$$2 \cdot \cos 5x \cdot \cos 2x - 2 \sin 5x \cdot \cos 2x = \sqrt{2} \cos 10x = \sqrt{2} (\cos 3x - \sin 3x)$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x)$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) (2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 5x - \sin 5x = 0 & (1) \\ 2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x) = 0 & (2) \end{cases}$$

(1): ~~Если~~ Возникающая введенная вспомогательного угла:

$$\sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x \right) = 0 \Leftrightarrow \cos \left(5x + \frac{\pi}{4} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 5x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z}.$$

2): ~~Аналогично~~ $\cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 5x + \sin 5x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} \left(\cos 5x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin 5x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x - \left(\cos 5x + \frac{\pi}{4} \right) = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot \sin \frac{2x + 5x - \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \sin \frac{5x - \frac{\pi}{4} - 2x}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin \left(\frac{7x - \frac{\pi}{4}}{2} \right) = 0 \\ \sin \left(\frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} \right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7x - \frac{\pi}{4}}{2} = \pi n \\ \frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} = \pi m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \\ 3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi m \end{cases} n, m \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi n}{7} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi m}{3} \end{cases} n, m \in \mathbb{Z}.$$

Сводя 2 случая, получаем:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5} \\ x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi n}{7} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi m}{3} \end{cases} k, n, m \in \mathbb{Z}.$$

~~Получ~~ Т.к. решения не пересекаются, то ответ оставаясь
в этом же виде. см. следующую страницу.

Ответ: $x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}$; $x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi h}{7}$; $x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi m}{3}$, $k, h, m \in \mathbb{Z}$.

✓ 1

$A = \overline{abcdefgh}$, $abcdefgh = 16875 = 5^4 \cdot 3^3$

Значит, разложив число A на простые множители, получаем, что в записи числа A встречаются 4 числа „5” и 3 числа „3”.
 А чтобы произведение не изменилось, восьмая цифра числа A — „1”.

$$\begin{array}{r} 16875 \overline{) 625} \\ 1250 \overline{) 27} \\ 4375 \overline{) 0} \\ 4375 \overline{) 0} \end{array}$$

Значит, у нас есть цифры 5, 5, 5, 5, 3, 3, 3, 1 из которых нужно составить всевозможные восьмизначные числа.

Мы понимаем, что например в числе 15555333, при перестановке цифр „5” или „3” между собой такими же цифрами, число A меняться не будет.

Всего чисел $8!$, но из них надо вычесть число повторяющихся.

В итоге получили $8! - A_8^3 - A_8^4 = 8! - \frac{8!}{5!} - \frac{8!}{4!} =$
 $= 8! \cdot \left(1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{4}\right) = 8! - 6 \cdot 7 \cdot 8 - 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 6 \cdot 7 \cdot 8 (2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 - 1 - 5) =$
 $= 48 \cdot 7 (120 - 6) = 48 \cdot 7 \cdot 114 = 54 \cdot 72 \cdot 7 = 38304$

$$\begin{array}{r} 78 \times 144 \\ \times 48 \\ \hline 912 \\ 456 \\ \hline 5472 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5472 \\ \times 7 \\ \hline 38304 \end{array}$$

Ответ: 38304

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} & (1) \\ y < 85 + (3^{81} - 1) \cdot x & (2) \end{cases} \quad \text{т.к. } 3^x > 0 \Rightarrow \underline{y > 4 \cdot 3^{81}}$$

Вамножем (2) ур-е на (-1) и сложим (1) и (2).

Получим:

$$3^x + 4 \cdot 3^{81} - 85 - (3^{81} - 1) \cdot x < 0$$

$$(3^x - 81) + 4(3^{81} - 1) - (3^{81} - 1) \cdot x < 0$$

$$(3^x - 81) + (4 - x)(3^{81} - 1) < 0$$

1) $x = 4$, то $0 + 0 < 0 \quad \emptyset$

2) $x > 4$ то $(3^x - 81) + (4 - x)(3^{81} - 1)$ будет больше 0 $\Rightarrow \emptyset$.

3) $x < 4$, то $3^x - 81 < 0$ и $(4 - x)(3^{81} - 1) < 0$.

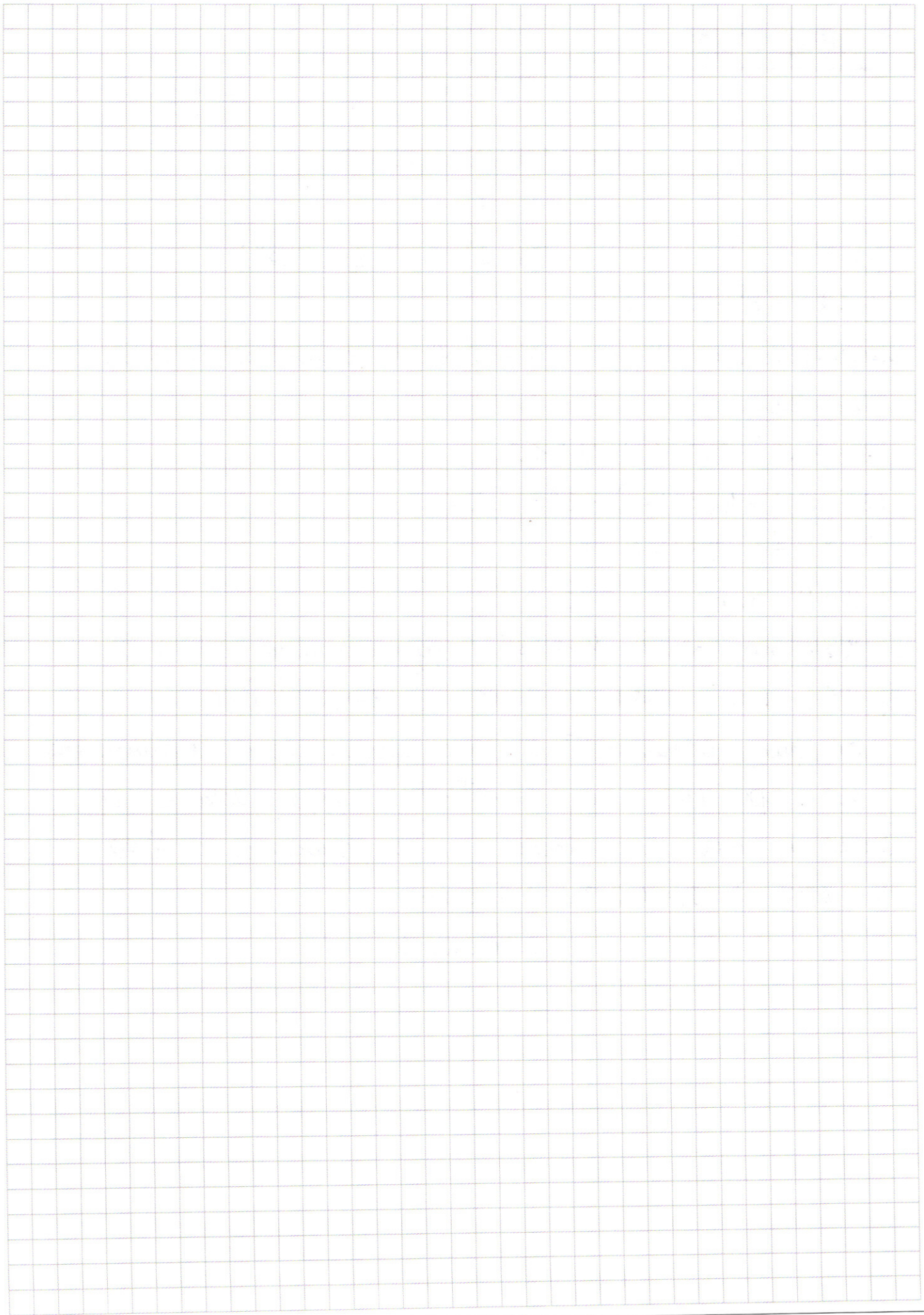
~~поэтому~~ ~~остаток~~ Т.е. их сумма будет отрицательна.

но при $x < 0$ $y < 85 + (3^{81} - 1) \cdot x$ будет меньше 0.

Значит, нам подходят x из отрезка $(0; 4)$ ~~и~~

и $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 1, 2, 3 \Rightarrow 3$ пары.

Ответ: 3.



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 & (1) \\ (x-6)^2 + (y-8)^2 = \alpha & (2) \end{cases}$$

$\alpha = ? \rightarrow 2\rho$ $y \leq 6$
 $y > -6$

(1): $|x-6-y| = 12 - |x-6+y|$

$$\begin{cases} x-6-y = 12 - |x-6+y| \\ x-6-y = |x-6+y| - 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-6+y| = 18 - x + y \\ |x-6+y| = x - y + 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

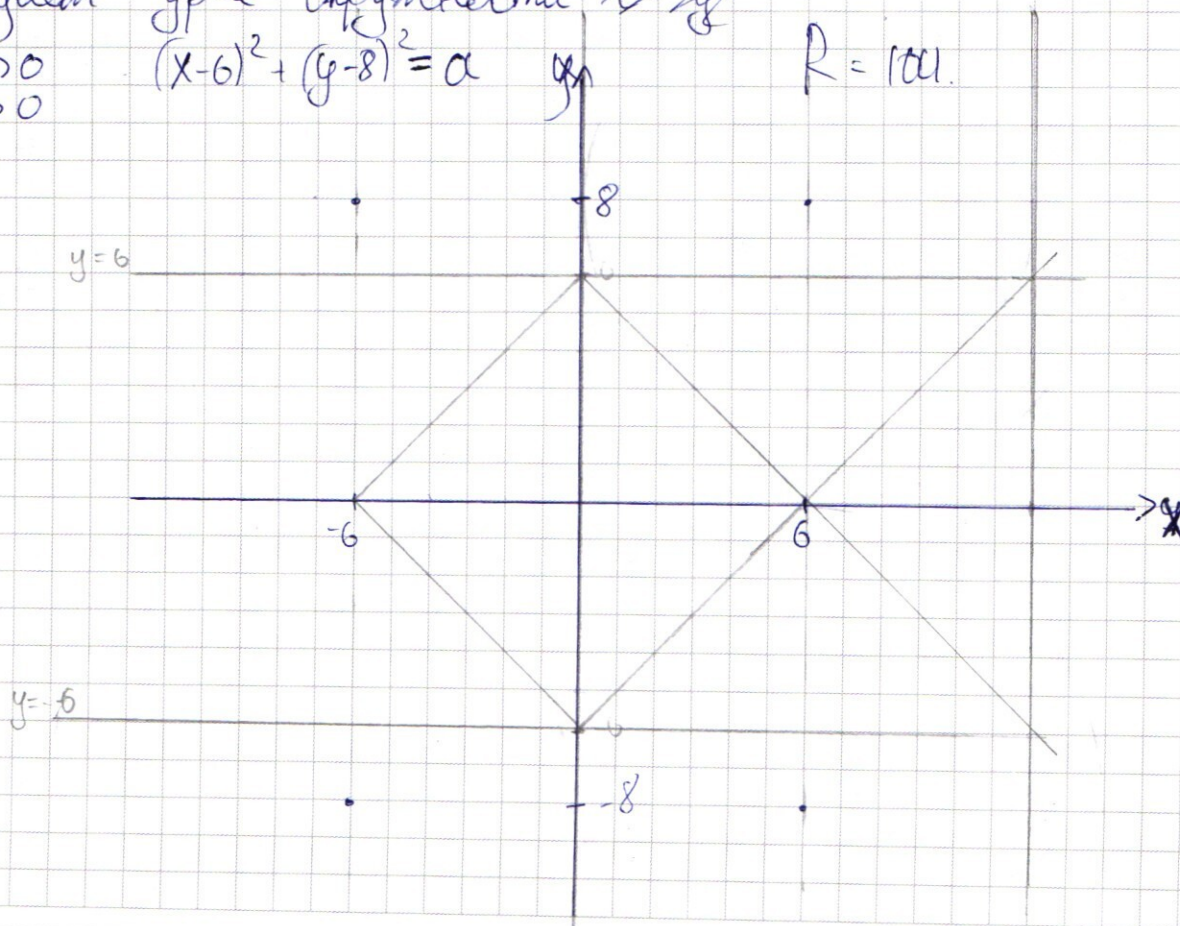
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-6+y = 18 - x + y \\ x-6+y = x - y - 18 \\ x-6+y = x - y + 6 \\ x-6+y = -x + y - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 24 \\ 2y = -12 \\ 2y = 12 \\ 2x = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 12 \\ y = -6 \\ y = 6 \\ x = 0 \end{cases}$$

(2) задаём ур-е окружности с цр

1) $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

$(x-6)^2 + (y-8)^2 = \alpha$

$R = 1001$



$$|x-6-y| + |x-6+y| = 12$$

$$\begin{aligned} -y-6+x &= 0 \\ y+6-x &= 0 \\ y &= x-6 \end{aligned}$$

$$y = 6-x$$

$$1) y \geq x-6$$

$$y \geq 6$$

$$y \geq 6-x$$

$$y \geq -6$$

$$x-6-y+x-6+y=12$$

$$2x-12=12 \quad 2x=24$$

$$x=12$$

$$\begin{aligned} \lg 4 \lg \left(\frac{x}{2}\right) + \lg x \cdot 2 \lg \left(\frac{x}{2}\right) &= \lg(x) \lg \left(\frac{x}{2}\right) + \lg(x) \lg x \\ \lg 4 \cdot \lg \left(\frac{x}{2}\right) + \lg x \cdot 2 \lg \left(\frac{x}{2}\right) &= \lg \left(\frac{x}{2}\right) \cdot \lg(x) + \lg x \cdot \lg(x) \end{aligned}$$

$$2^{2\alpha} \cdot x^{2\alpha} = -x^a \cdot (-x)^{\lg x}$$

$$2^{2\alpha} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\alpha} = (-x)^{\lg x}$$

$$2^{2\alpha} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2\alpha} = (-x)^{\lg x} \lg x$$

$$2^{2\alpha} = \frac{1}{x} \lg x$$

$$2^{2\lg \left(\frac{x}{2}\right)} = (-x)^{\lg x - \lg \left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\left(\frac{2 \lg \left(\frac{x}{2}\right)}{\lg 2}\right) = (-x)^{\lg x - \frac{\lg(x)}{\lg 2}}$$

$$2^{2\lg(x)-2\lg 2} = (-x)^{\lg x - \lg 2}$$

$$2\lg(x)-2\lg 2 = (\lg x - \lg 2) \cdot \lg 2$$

$$\lg 2 (2\lg(x)-2\lg 2) = \lg(x) \cdot (\lg x - \lg(x) + \lg 2)$$

$$2\lg(x)-2\lg 2 = \lg(x) \cdot \lg x - \lg(x) \cdot \lg(x) + \lg(x) \cdot \lg 2$$

$$\lg(x) \cdot (\lg 2 - \lg x) = \lg(x) \cdot \lg 2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

①. $a b c d e f g h$

$$a b c d e f g h = 16875 = 25 \cdot 675 = 25^2 \cdot 27 =$$

$$= 5^4 \cdot 3^3$$

$$5555333.$$

~~728~~

$$p = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\dots}$$

$$\begin{array}{r} 16875 \overline{) 25} \\ 150 \overline{) 675} \\ \underline{187} \\ 175 \overline{) 0} \\ \underline{125} \\ 50 \overline{) 27} \\ \underline{175} \end{array}$$

② $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$

$$\cos 7x + \cos 3x = 2 \cos 5x \cos 2x$$

$$\sin 7x + \sin 3x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$\cos 10x =$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) \cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 10x = \frac{\sqrt{2}}{2} (2 \cos^2 5x - 1)$$

$$\cos 5x \cdot$$

$$\cos 7x - \sin 7x = \sin 3x - \cos 3x + \sqrt{2} \cos 10x$$

$$\cos 7x - \sin 7x = 2 \sin \frac{7x - \frac{\pi}{2} + 7x}{2} \cdot \sin \frac{\frac{\pi}{2} - 7x - 7x}{2} = 2 \sin(-\frac{\pi}{4}) \sin(\frac{\pi}{4} - 7x)$$

$$\sin 3x - \cos 3x = 2 \sin \frac{3x - \frac{\pi}{2} + 3x}{2} \cdot \cos \frac{3x + \frac{\pi}{2} - 3x}{2} = 2 \sin(3x - \frac{\pi}{4}) \cdot \cos \frac{\pi}{4}$$

$$-\sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} - 7x) = \sqrt{2} \sin(3x - \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \cos 10x$$

$$\sin(3x - \frac{\pi}{4}) + \sin(\frac{\pi}{4} - 7x) = -\cos 10x$$

$$2 \sin \frac{3x - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - 7x}{2} \cdot \cos \frac{3x - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + 7x}{2} = -\cos 10x$$

$$2 \sin(2x) \cdot \cos(5x - \frac{\pi}{8}) = -\cos 10x$$

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} &= (-x)^{\lg(-xy)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$y > 0; -xy > 0 \Rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{II четверть.}$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0.$$

$$xy = 2y^2 - 8y - (x^2 + 4x) =$$

$$2(y^2 - 4y + 4) - 8 - (x^2 + 4x + 4) + 4 = 2(y-2)^2 - (x+2)^2 - 4 = xy.$$

$$y(2y-x) - 4(2y+x) - x^2 = 0.$$

$$\lg\left(-\frac{x}{2}\right) = \alpha.$$

$$\lg\left(-\frac{x}{2} \cdot x\right) = \lg\left(-\frac{x}{2}\right) + \lg x$$

$$(\sqrt{2}y)^2 -$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} = (-x)^{\lg(-x) + \lg y} = (-x)^{\lg(-x)} \cdot (-x)^{\lg y}$$

$$\frac{x^4 \lg y}{y^2 \lg y}$$

$$(\sqrt{2}y)^{2+2\lg y}$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0.$$

$$(\sqrt{2}y)^2 -$$

$$\rightarrow x(y+x)$$

$$y^2 + y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0.$$

$$y \Rightarrow (y-x)(y+x) - y(y-x) - 4(x+2y) = 0. (y^2 - x^2) + y(y-x) - 4(2y+x) = 0.$$

$$(y-x)(y+x-y) - 4(x+2y) = 0.$$

$$(y-x)(y+x) + y(y-x) - 4(2y+x) = 0.$$

$$x(y-x) - 4(x+2y) = 0.$$

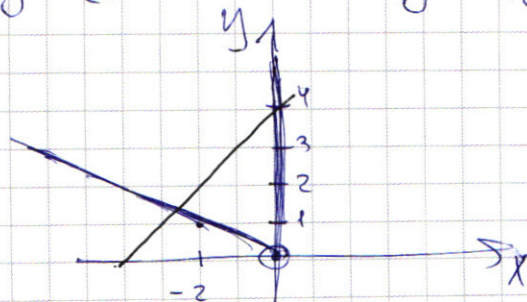
$$(y-x)(2y+x) - 4(2y+x) = 0.$$

$$(2y+x)(y-x-4) = 0.$$

$$\begin{cases} y = 0.1 \\ x = 0-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\frac{x}{2} \\ y = x+4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \end{cases}$$



$$\left(\frac{x^4}{x^2}\right)^{\lg -\frac{x}{2}} = (-x)^{\lg(-x \cdot (-\frac{x}{2}))} \Leftrightarrow (4x^2)^{\lg -\frac{x}{2}} = (-x)^{\lg(-\frac{x}{2})}$$

$$(4x^2)^{\lg \alpha} = (-x)^{\alpha+x} = (4x^2)^{\alpha} = (-x)^{\alpha} \cdot (-x)^x \quad \begin{aligned} (-4x)^{\alpha} &= (-x)^x \\ -x^{\alpha} \cdot 4^{\alpha} &= (-x)^x \\ (-x)^{\alpha} &= 4^{\alpha} = 2^{2\alpha} \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned} \cos 4x + \cos 3x &= ((x) \cos + h \cos) \cos = (x-h) \cos \cdot \cos \\ \cos 7x + \cos 3x &= 2 \cos 5x \cdot \cos 2x & \cos(x-h) &= \cos x \cos h + \sin x \sin h \\ \sin 7x + \sin 3x &= 2 \sin 5x \cos 2x & \sin(x-h) &= \sin x \cos h - \cos x \sin h \\ 2 \cos 5x \cos 2x - 2 \sin 5x \cos 2x &= \sqrt{2} \cos 10x = \sqrt{2} (2 \cos^2 5x - 1) \\ \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 10x \\ \cos 2x \cdot \sqrt{2} \left(\cos 5x + \frac{\pi}{4} \right) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 10x \\ \frac{1}{2} \left(\cos 7x + \frac{\pi}{4} \right) & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \cos 5x \cos 2x - 2 \sin 5x \cos 2x &= \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) \\ 2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) &= \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x) \\ (\cos 5x - \sin 5x) &= (2 \cos 2x - \sqrt{2} \cos 5x - \sqrt{2} \sin 5x) = 0 \\ \cos 2x - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x \right) &= \cos 2x - \cos \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \quad 3^x + 4 \cdot 3^{81} - 85 - (3^{81} - 1)x &< 0 \\ 3^x + 4 \cdot 3^{81} - 4 + 81 - (3^{81} - 1)x &< 0 \\ (3^x - 81) + (81 - x)(3^{81} - 1) &< 0 \\ 1) \quad x > 4 & \quad 3^x - 81 < (3^{81} - 1)(x - 81) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ 4 > 3^4 + 4 \cdot 3^{81} - 85 & \\ x &< 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x) \cos + (x-h) \cos &= \left(\frac{x}{h} \right) \cos \left(\frac{x}{h} \right) \\ (x) \cos (x) &= \cos \left(\frac{x}{h} \right) \\ (x) \cos (x-h) &= \cos h \cos x \\ \cos(x) \cdot (x-h) \cos &= \cos h \cos x \\ \cos(x) \cdot (x-h) \cos &= \cos h \cos x \\ (x) \cos \cdot (h+x) \cos &= \left(\frac{2h+x}{h} \right) \cos \cdot (h+x) \cos \cdot \cos \left(\frac{x}{h} \right) \\ (x) \cos \cdot \left(\frac{x}{h} \right) \cos &= \left(\frac{x}{h} \right) \cos \cdot \cos h \\ h \cos &= (x-h) \cos - (x) \cos \\ (x-h) \cos (x) &= \cos \left(\frac{x}{h} \right) \quad h+x=h \end{aligned}$$

$$1 - 18 > 18 - 3 \cdot 8 + 8 - 8$$

$$(3x - 8) - (38 - 1)(x - 1) > 0$$

$$(3x - 8) + (38 - 1)(1 - x) > 0$$

$$3x + (38 - 1)(1 - x) - 8 > 0$$

$$3x + 4 \cdot 8 - 4 + 4 = 3x + (38 - 1) \cdot 4 + 4 \leq y \leq 85 + (38 - 1) \cdot x$$

$$3x + 4 \leq y < 85 + (38 - 1)x$$

$$3x + 4 \cdot 8 > 4 \cdot 8$$

$$3x + 4 \cdot 8 \leq y < 85 + (38 - 1) \cdot x$$

$$y < 85 + (38 - 1)x$$

$$y \geq 3x + 4 \cdot 8$$

$$y > 38 + 4 \cdot 8$$

$$y = 8$$

$$y \cdot \log 3 = 1$$

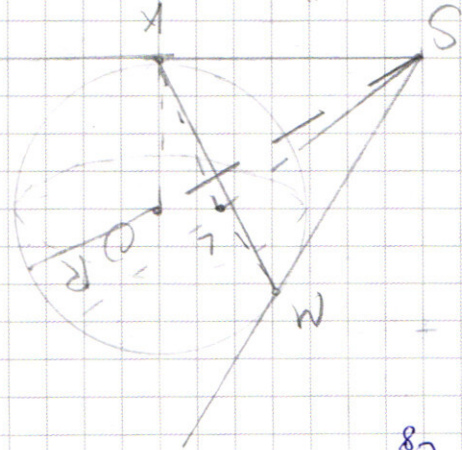
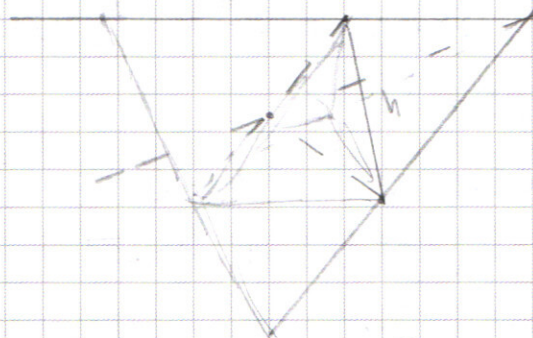
$$\log = y$$

$$x < 8$$

$$x > \log 38 + 8$$

$$x < 8 + 80$$

$$|S - M| = |S - L|$$



$$C_3^8$$

$$C_3^8$$

$$C_3^8$$

$$C_3^8$$

$$8 \neq 8$$

$$8!$$

$$8 \neq 8$$

$$15555533$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x.$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x.$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 10x = \frac{\sqrt{2}}{2} (2 \cos^2 5x - 1)$$

$$\cos 7x - \sin 3x = \cos 7x - \cos(\frac{\pi}{2} - 3x) = 2 \sin \frac{4x + \frac{\pi}{2} + 3x}{2} \cdot \sin \frac{\frac{\pi}{2} - 3x - 7x}{2} =$$

$$= 2 \sin(2x + \frac{\pi}{4}) \cdot \sin(\frac{\pi}{4} - 5x)$$

$$\cos 3x + \sin 7x = \cos 3x -$$

$$\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 7x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 7x \right) = \sqrt{2} \cos(7x + \frac{\pi}{4})$$

$$\cos 3x - \sin 3x = \sqrt{2} \cos(3x + \frac{\pi}{4})$$

$$\cos(7x + \frac{\pi}{4}) - \sqrt{2} \cos 10x + \cos(3x + \frac{\pi}{4}) = 0.$$

$$2 \cos \frac{4x + \frac{\pi}{4} + 3x + \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \cos \frac{7x - 3x}{2} = \cos 10x$$

$$2 \cos(5x + \frac{\pi}{4}) \cdot \cos 2x = \cos 10x.$$

$$2 \left(\cos 5x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin 5x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cdot \cos 2x = 2 \cos^2 5x - 1$$

$$\sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) \cdot \cos 2x = 2 \cos^2 5x - 1$$

$$\cos(7x + \frac{\pi}{4}) + \cos(3x + \frac{\pi}{4}) = 2 \cdot \cos 5x \cdot \cos(-\frac{\pi}{4} - 3x)$$

$$5x + \frac{\pi}{4} = \alpha.$$

$$10x + \frac{\pi}{2} = 2\alpha$$

$$\cos \frac{\pi}{2}$$

$$\cos 2\alpha = \cos(10x + \frac{\pi}{2}) = -\sin 10x.$$

$$\cos 10x = -\sin(10x + \frac{\pi}{2}) = -\sin 2\alpha.$$

$$(-x) \lg x - \lg(\frac{x}{2}) = 2 \lg(\frac{x}{2})$$

$$\lg x - \lg(-x) + \lg 2$$

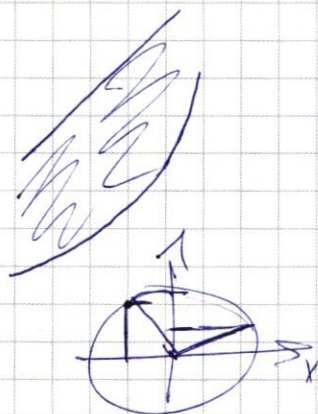
$$\lg(-x) (\lg x - \lg(-x)) = 2 \lg 2 \cdot \lg(\frac{x}{2})$$

$$\lg(-x) \cdot (\lg x - \lg(-x) + \lg 2) = 2 \lg 2 \cdot (\lg(-x) - \lg 2)$$

$$\lg(-x) \cdot \lg x - \lg^2(-x) + \lg(-x) \lg 2 = 2 \lg 2 \cdot \lg(-x) - 2 \lg^2 2$$

$$y \geq 3^x + 2^x \cdot 3^{8^x}$$

$$y < 85 + (3^{8^x} - 1) \cdot x$$



$$(-x)^{\frac{x}{2}} = 2^{2a}$$

$$\left(\frac{4x^4}{x^2}\right) \lg\left(-\frac{x}{2}\right)$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right) \lg y = (-x) \lg(-x) + \lg y$$

$$\frac{x^4 \lg y}{y^2 \lg y} = (-x) \lg(-x) \cdot (-x) \lg y$$

$$\left(\frac{x^4}{-x}\right) \lg y = \frac{(-x^3) \lg y}{(y^2) \lg y} = (-x) \lg(-x)$$

$$\left(\frac{-x^3}{x^2}\right) \lg\left(-\frac{x}{2}\right) = \left(\frac{-4x^3}{x^2}\right) \lg\left(-\frac{x}{2}\right) = (-x) \lg(-x)$$

$$(-4x) \lg(-x) + \lg \frac{1}{2} = (-x) \lg(-x)$$

$$\frac{(-4x) \lg(-x)}{(-4x) \lg \frac{1}{2}} = (-x) \lg(-x) \Rightarrow \left(\frac{-4x}{-x}\right) \lg(-x) = (-4x) \lg \frac{1}{2}$$

$$2 \lg(-x) = -4 \lg \frac{1}{2} \Rightarrow \lg(-x) = -2 \lg \frac{1}{2}$$

$$4 \lg a = 4 \lg \frac{1}{2} \cdot a \lg \frac{1}{2}$$

$$\lg a \cdot \lg a \cdot \lg a = \lg \frac{1}{2} \cdot \lg a \cdot \lg \frac{1}{2}$$

$$\lg(4 \lg a) = \lg(4 \lg \frac{1}{2}) \cdot \lg a \lg \frac{1}{2}$$

$$\lg a = \lg \frac{1}{2} \cdot \lg a$$

$$\lg 4 \lg a = \lg 4 \lg \frac{1}{2} \cdot \lg a \lg \frac{1}{2}$$

$$\lg a \cdot \lg 4 = \lg 4 \cdot \lg \frac{1}{2} \cdot \lg \frac{1}{2} \cdot \lg a$$

$$(\lg a \cdot \lg 4) (1 - \lg \frac{1}{2}) = 0$$

$$\lg 4 a = 0 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow -x = 1 \Rightarrow x = -1$$

$$y = -\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$$

$$(x-1) \lg(x-1) = \lg(x-1) \cdot (x-1) \lg(x-1)$$

$$(x-1) \lg(x-1) = \left(\frac{2}{x-1}\right) \lg(x-1)$$

$$(x-1) \lg(x-1) = \left(\frac{2}{x-1}\right) \lg\left(\frac{2x}{x-1}\right)$$

$$(x-1) \lg(x-1) = \lg\left(\frac{2x}{x-1}\right)$$

$$\lg(2x-1) = \frac{(x-1) \lg(x-1)}{\lg(x-1)}$$

$$\lg(2x-1) \cdot (x-1) \lg(x-1) = \frac{\lg(2x-1)}{\lg(x-1)}$$

$$\frac{\lg(-\frac{x}{2}) \cdot 2 \lg(-\frac{x}{2}) \cdot \lg y \cdot \lg x = \lg(-\frac{x}{2}) \cdot \lg x \cdot \lg(-x) \cdot \lg(-x)}$$

$$\lg(-\frac{x}{2}) \cdot \lg(x) (2 \lg(-\frac{x}{2}) \cdot \lg y - \lg^2(-x)) = 0$$

$$\frac{2 \lg(-x)}{\lg 2} \cdot 2 \lg a - \lg^2(-x) = 0$$

h-

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right) \lg y = (-x) \lg(-xy) = (-x) \lg(-x) \cdot (-x) \lg(y)$$

$$\left(\frac{x^4}{-xy^2}\right) \lg y = (-x) \lg(-x)$$

$$\left(-\frac{x^3}{y^2}\right) \lg(y) = (-x) \lg(-x)$$

$$(-4x) \lg(-x) - \lg 2 = (-x) \lg(-x)$$

$$(-x) \lg(-x) - \lg 2 = 2 \lg(-x)$$

$$\frac{(-4x) \lg(-x)}{(-x) \lg(-x)} = (-4x) \lg 2$$

$$4 \lg(-x) = (-4x) \lg 2$$

$$\lg 4 \cdot 2 \lg(-x) = \lg 2 \cdot \lg(-4x)$$

$$2 \lg(-x) = \lg(-x) + \lg 4$$

$$\lg(-x)$$

$$x^2 - 3ax + 2a^2 = 0$$

$$(x-2a)(x-a) = 0$$

$$x^2 - 3ax + 2a^2$$

$$y < 85 + (3^{81} - 1) \cdot x$$

$$8! - 6 \cdot 7 \cdot 8 - 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$$

$$6 \cdot 7 \cdot 8 (2 \cdot 3 \cdot 4)$$

$$(-x^3) \lg(x+4)$$

$$\lg(x+4) \cdot (\lg(-x^3) - 2 \lg(x+4)) = \lg^2(-x)$$

$$x+4 > 0$$

$$x < 0$$

$$x > -4$$

$$-4 < x < 0$$

$$3 \lg(x+4) \cdot \lg(-x) - 2 \lg^2(x+4) = \lg^2(-x)$$

$$x^2 + 9x + 16 = 0$$

$$D = 81 - 4 \cdot 16 = 81 - 64 = 17$$

$$\frac{-9 - \sqrt{17}}{2} \quad V - 4$$

$$\frac{-9 - \sqrt{17}}{2} \quad V - 4$$

<

$$\begin{array}{r} \times 14 \\ 48 \\ \hline 912 \\ \times 56 \\ \hline 456 \\ \times 2442 \\ \hline 38304 \end{array}$$



☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)