МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 4 и 9.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)\,x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 $16\,875 = 3^3 \cdot 5^4$

То есть восьмизначное число должно содержать комбинацию цифр, описанную одним из двух случаев:

1) $1 \cdot 3^3 \cdot 5^4$, то есть одна 1, три 3, четыре 5.
Тогда способов расставить три 3 ~~в три~~ по трём из восьми клеток (~~клетка~~ представим, что каждая цифра 8-значного числа записана в одну из восьми клеток):

$$\frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{\cancel{6} \cdot 7 \cdot 8}{\cancel{2} \cdot \cancel{3}} = 7 \cdot 8 = \underline{56}$$ (способов ~~вариантов~~)

Тогда для постановки единицы остаётся $\underline{5}$ вариантов (единица „встаёт" в одну из 5 клеток).
Тогда число 8-знач. чисел данного „типа":
$\boxed{56 \cdot 5 = 280}$. Замечу, что от перестановок цифры 5 в данном случае ничего не зависит, т.к. они равнозначны и, учитывая перестановки 1 и 3, занимают оставшиеся клетки.

2) $1 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 5^4$. Аналогично „считаем перестановки 5: $\frac{8!}{4! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot \cancel{6} \cdot 7 \cdot \cancel{8}^{2}}{\cancel{6} \cdot \cancel{4}} = \underline{70}$ (способов)

~~У цифр 1, 9, 3 количество перестановок:~~
~~$3! = 6$. Тогда способов составить число „2-го типа":~~

□ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

~~$\boxed{70 \cdot 6 = 420}$ (способов)~~

~~Сложения других „типов" составить данного числа нет~~, т.к.

Посчитаем перестановки 3, а затем 9 (цифр):

„3": $\underline{4}$ способа

„9": $\underline{3}$ способа

Единицы („1") аналогично с „5" из пункта 1 занимают оставшиеся клетки.

Тогда способов составить число данного „типа":

$\boxed{70 \cdot 4 \cdot 3 = 840}$

Других „типов" данного числа нет, т.к. множители 3^3 и 5^4 можно получить лишь описанными выше двумя способами.

Кол-во таких 8-знач. чисел:

$280 + 840 = 1120$

Ответ: 1120.

$\boxed{N2}$ $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$

$2\cos 2x \cos 5x - \sqrt{2}\cos^2 5x + \sqrt{2}\sin^2 5x = 2\sin 5x \cos 2x$

$2\cos 2x(\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2}(\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 0$

$(2\cos 2x - \sqrt{2}(\cos 5x + \sin 5x))(\cos 5x - \sin 5x) = 0$

1) $\cos 5x - \sin 5x = 0$ $\quad \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 5x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 5x = 0$

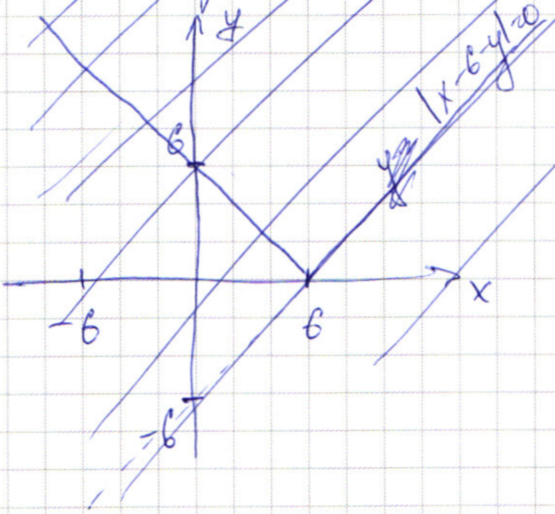
$\sin(5x - \frac{\pi}{4}) = 0$ $\quad 5x - \frac{\pi}{4} = \pi k,\ k \in Z$ $\quad 5x = \frac{\pi}{4} + \pi k$

№5

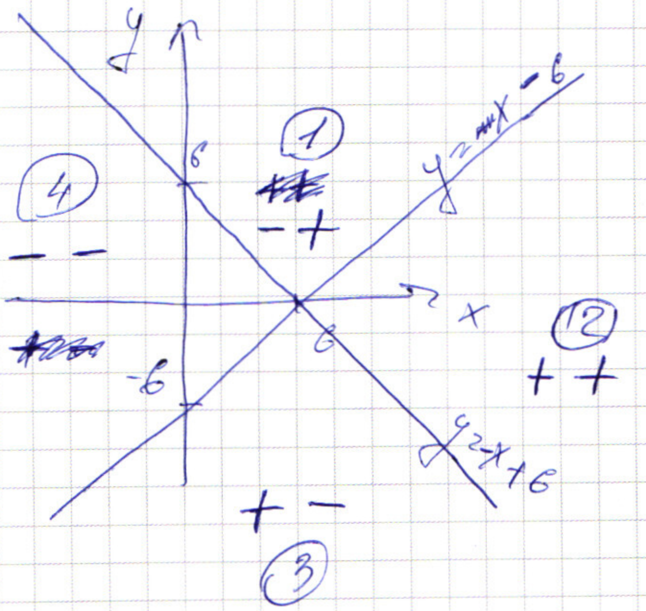
$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

~~$|x-6-y| + |x-6+y| - 12 = 0$~~

~~Построим данный график, построив сначала г-к каждого модуля, сложив и вычтя 12.~~



Рассмотрим случаи раскрытия модулей!



1) $-x+6+y+x-6+y=12$

$2y=12$

$\underline{y=6}$

2) $x-6-y+x-6+y=12$

$2x=24$

$\underline{x=12}$

3) $x-6-y-x+6-y=12$

$2y=-12 \quad \underline{y=-6}$

4) $-x+6+y-x+6-y=12$

$-2x=0 \quad \underline{x=0}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 $5x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$ $\qquad x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5}k$

2) $2\cos 2x - \sqrt{2}(\cos 5x + \sin 5x) = 0$

$2\cos 2x - \sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 5x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 5x\right)\right) = 0$

$2\cos 2x - 2\sin\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$\sin\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos 2x$ ~~равно~~

По формулам приведения:

$\sin\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$

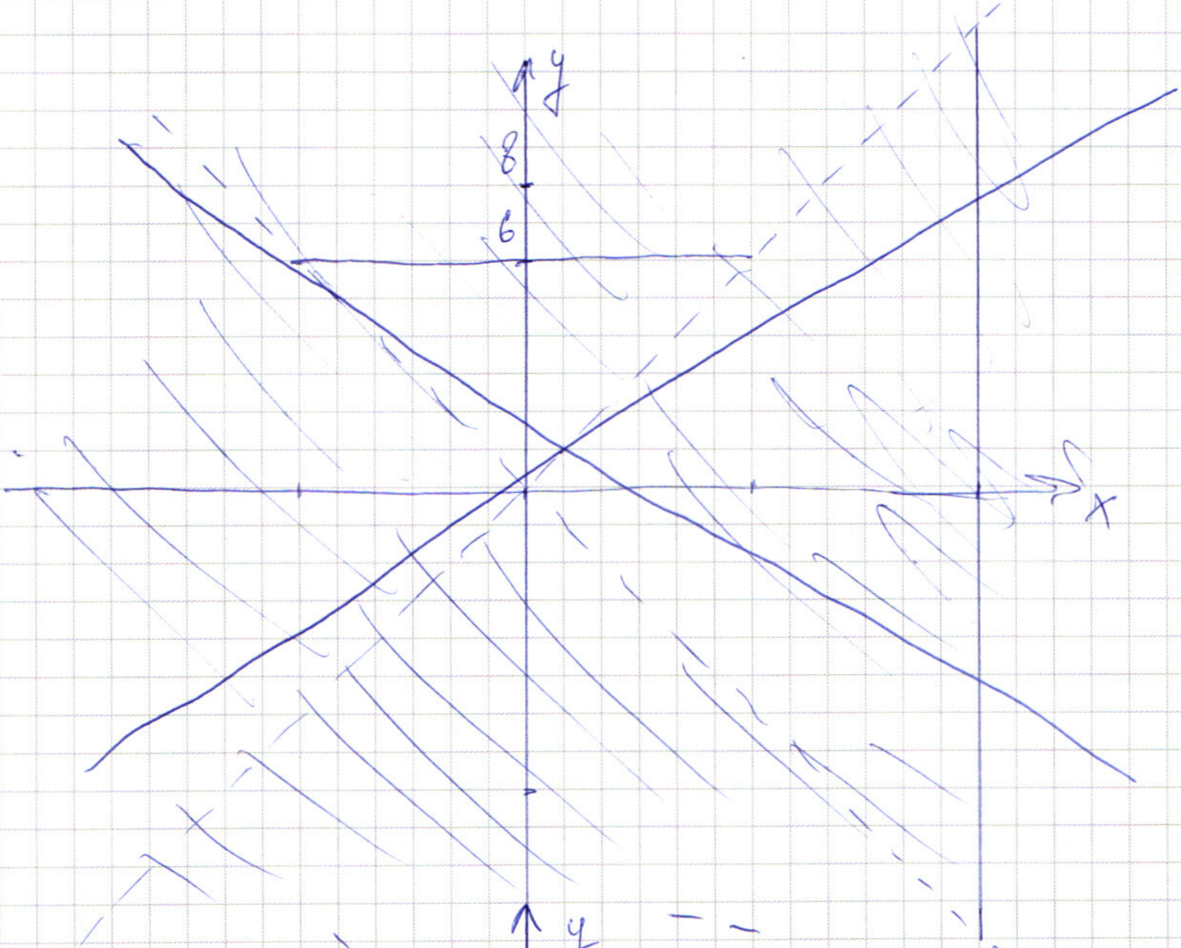
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - 2x + 2\pi k \\ 5x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + 2x + \pi + 2\pi k \end{array}\right.$ $\quad k \in \mathbb{Z}$

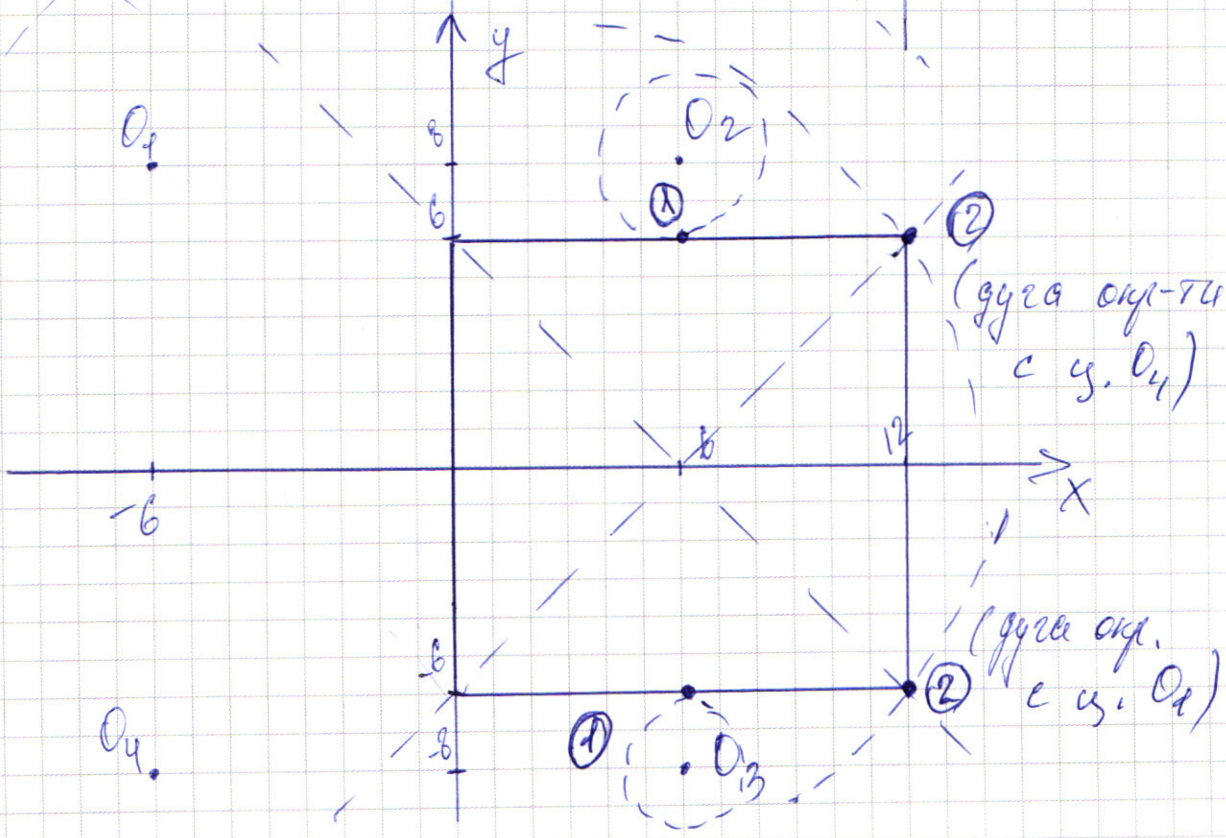
$\left[\begin{array}{l} 7x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ 3x = -\frac{3\pi}{4} + \pi + 2\pi k \end{array}\right.$ $\qquad \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi k \\ 3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi k \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi k \end{array}\right.$ (линии под значениями x — это просто подчёркивание для выделения)

Ответ: $x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5}k$; $x = \frac{\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi k$; $x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

№5 Второе уравнение задаёт 4 окружности с центрами: $O_1(-6;8)$, $O_2(6;8)$, $O_3(6;-8)$, $O_4(-6;-8)$.





ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Возможны 2 случая, когда ровно 2 решения.

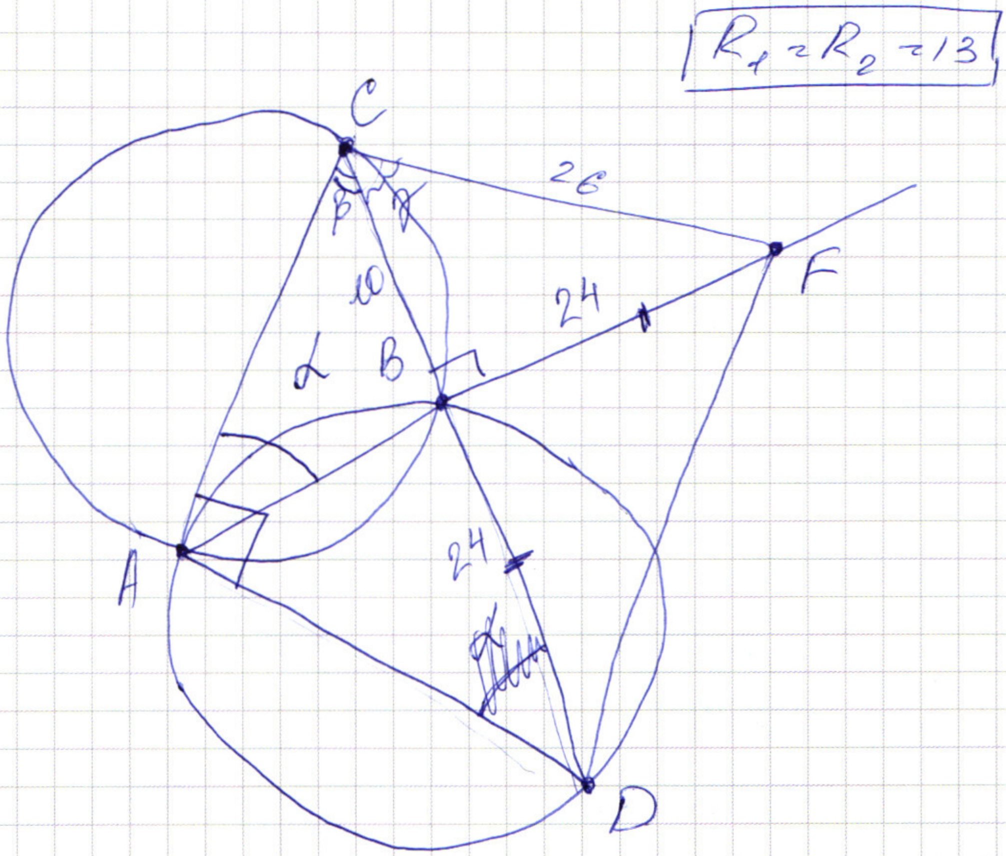
1) окруж-ти с центрами O_1 и O_2 касаются „квадрата" (квадратом будем называть график 1-го уравнения).

В таком случае радиус $R = 8 - 6 = 2$ (координата y O_1 и y верхней стороны квадрата). Аналогично у O_2: $R = -6-(-8) = 2$ $\Rightarrow$ такой случай возможен при $R = 2$, т.е. $a = 4$, т.к. $a = R^2$

Заметим, что окр-ти с ц. O_1 и O_4 не пересекают и не касаются квадрата (Очевидно из построенного графика (масштаб соблюдён)).

2) Второй возможный случай, когда окр-ти с ц. O_1 и O_4 коснутся квадрата в его вершинах (левой нижней и правой верхней соответственно), а окр. с ц. O_2 и O_3 не будут пересекать квадрат.

Найдём радиус R_2 для окр. с ц. O_1 (аналог-о для O_4, т.к. рисунок симметричен относительно оси x) $\cancel{R_2 = 2}$. Коорд-ы прав. нижн. вершины $(12; -6)$



Решение:

а) Пусть $\angle CAB = \alpha$. Тогда по т. синусов:

$CB = 2R \cdot \sin\alpha$, $\angle BAD = \frac{\pi}{2} - \alpha$ | $R_1 = R_2 = R$

$\Rightarrow BD = 2R \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = BF$

~~BD=~~

$CF^2 = BC^2 + BF^2$

$CF^2 = 4R^2 \cdot \sin^2\alpha + 4R^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$

$= 4R^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 4R^2$

$CF^2 = 4 \cdot 13^2$ $CF = 2 \cdot 13 = 26$

б) По т. синусов для BC:

$\frac{10}{\sin\alpha} = 2R$ $\sin\alpha = \frac{10}{26} = \frac{5}{13}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{№5}$

$$R_2 = \sqrt{(12-(-6))^2 + (8-(-6))^2} = \sqrt{18^2+14^2} =$$

$$= \sqrt{324+196} = \sqrt{520} = \sqrt{4\cdot 130} = 2\sqrt{130}$$

Найдём радиус R_3, при котором окр-ть с центром O_2 последний раз коснётся квадрата (при большем — касаний нет, аналог-но для O_3 в силу симметрии), послед. кас-е — в прав. нижн. вершине).

$$R_3 = \sqrt{6^2+14^2} = \sqrt{232} < \sqrt{520}$$

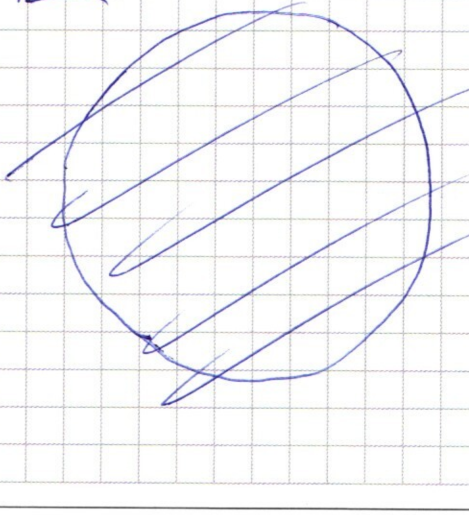
$\Rightarrow$ такой случай возможен.

$\cancel{a = R^2 = R_2^2 = \ldots}$

$a = R^2 = R_2^2 = 520.$

Ответ: $a = 4$, $a = 520$.

$\boxed{№6}$



$\sin\angle ABC = \sin(\alpha+\gamma) = \sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma$

$\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\cos\alpha = \frac{12}{13}$

$\sin\gamma = \frac{24}{26} = \frac{12}{13}$, $\cos\gamma = \frac{5}{13}$

$\cancel{\angle CBA =}\ \angle ABC = 90^\circ$

$\Rightarrow AC$ – диаметр , $AC = 26$.

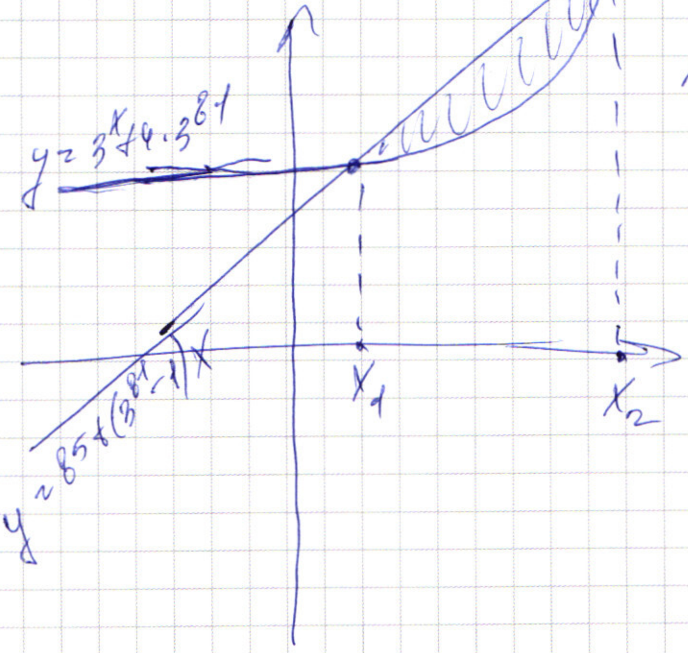
$S_{ACF} = AC\cdot CF\cdot\sin\angle ACF = 26^2\cdot\frac{120}{169} =$

$= \frac{2\cdot\cancel{13}\cdot 2\cdot\cancel{13}\cdot 120}{\cancel{13}\cdot\cancel{13}} = 480$

Ответ: б) $S_{ACF} = 480$. а) 26.

$\boxed{№7}$

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4\cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$



$x_1 = 4$

Решения системы лежат в закрашенной области.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{N6}$ ~~AC = 2R · sin α~~

~~∠ACB~~ ~~AB – общая хорда для окружностей ⇒ т.к. против равных хорд лежат либо равные углы, либо в сумме дающие 90° возможны 2 случая:~~

~~1)~~

Пусть $\angle ACB = \beta$, $\angle BCF = \gamma$

$\cos\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}$

$\cancel{tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{5}{13}\cdot\frac{13}{12} = \frac{5}{12}}$

$\sin\angle CFB = \frac{10}{26} = \sin\alpha$ $\quad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\sin 2\alpha = 2\cdot\frac{5}{13}\cdot\frac{12}{13} = \frac{120}{169}$

$\sin\angle ACF = \sin(\pi - 2\alpha) =$

$= \sin\pi\cos 2\alpha - \sin 2\alpha\cos\pi = \sin 2\alpha = \frac{120}{169}$

$\beta = \angle ACF - \gamma$ $\quad \sin\cancel{\beta = \sin(\pi - 2\alpha - \gamma) =}$

$\cancel{= \sin(2\alpha+\gamma) = \sin 2\alpha\cos\gamma + \sin\gamma\cos 2\alpha}$

$\cancel{\sin\angle ABC = \sin\alpha}$

$\angle ABC = \pi - \alpha - \beta = \pi - \alpha - (\pi - 2\alpha - \gamma) =$

$= \pi - \pi - \alpha + 2\alpha + \gamma = \alpha + \gamma$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

2) $x^2+(4+y)x-2y^2+8y=0$

$\sqrt{D}=\sqrt{9y^2-24y+16}=\sqrt{(3y-4)^2}=|3y-4|$

$x_1=\dfrac{-4-y+3y-4}{2}=\dfrac{2y-8}{2}=y-4$

$x_2=\dfrac{-4-y-3y+4}{2}=-2y$

3) $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\lg_y x=\dfrac{-5\pm\sqrt{33}}{2}\\ x=y-4\end{cases}\\ \begin{cases}\lg_y x=\dfrac{-5\pm\sqrt{33}}{2}\\ x=-2y\end{cases}\end{array}\right.$

$y^{\frac{-5\pm\sqrt{33}}{2}}=y-4$ (4)

$y^{\frac{-5\pm\sqrt{33}}{2}}=-2y$

решений нет

4) $y^{\frac{-5\pm\sqrt{33}}{2}}=y-4$

$y\left(y^{\frac{-5\pm\sqrt{33}-2}{2}}-1\right)=-4$

~~$x=y-4$~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{N3}$

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} & (1) \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\frac{x^{4\lg y}}{y^{2\lg y}} = \cancel{(-x)} \frac{1}{(-x)^{\lg x} \cdot (-x)^{\lg y}}$$

$-x > 0 \Rightarrow x < 0$

$$|x|^{5\lg y + \lg x} = y^{2\lg y} \qquad \left(10^{\lg x}\right)^{5\lg y + \lg x} = \left(10^{\lg y}\right)^{2\lg y}$$

$$\Rightarrow 5\lg x \lg y + \lg^2 x = 2\lg^2 y \quad \Big| \cdot \frac{1}{\lg^2 y}$$

$$\frac{\lg^2 x}{\lg^2 y} + 5\frac{\lg x}{\lg y} - 2 = 0 \qquad \text{Пусть } \frac{\lg x}{\lg y} = t$$

$$t^2 + 5t - 2 = 0 \quad \sqrt{D} = \sqrt{25+8} = \sqrt{33}$$

$$t = \frac{-5 \pm \sqrt{33}}{2} = \frac{\lg x}{\lg y} = \log_y x$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $16875 = 5 \cdot 3375 = 5^2 \cdot 675 = 5^2 \cdot 5 \cdot 135 = 5^3 \cdot 5 \cdot 27 =$

$16875 : 5 = 3375$; $3375 : 5 = 675$; $675 : 5 = 135$; $135 : 5 = 27$

$\boxed{5^4 \cdot 27}$ $16875 = \boxed{3^3 \cdot 5^4}$

вар.

n 1 2 3 4 5 6 7 8

$\alpha \to 1$

$\overline{3\alpha} \to 1$

9 вар.

1) $\overline{\alpha\, 3 \ldots 35 \ldots 5}$ $\longrightarrow \underline{9 \cdot 35} = \ldots$

2) $\overline{3\alpha \ldots 3}$ $\overline{35\alpha \ldots 5}$ и т.д. $\longrightarrow 10 \cdot 7 \cdot 35 = 350 \cdot 7 = \ldots$

2) α – 10 вар.

1) α – 9 вар. ~~Р. Перест. 3 (в 7 мест)~~:

Перестановок 3 и 5 в 7 м.: $\frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{\cancel{2 \cdot 3}} = 35$

$\frac{7!}{3! \cdot 4!}$

3335535 3

3335355

3355355

3355553

Слож-о найти Р. трех

Вы не заблудт остаток!

$\frac{7!}{4! \cdot 3!} = 35$

1) $\underline{1\cdot 3^3\cdot 5^4}$

2) $\underline{1\cdot 1\cdot 9\cdot 3\cdot 5^4}$

$5^4=125\cdot 5=625$

$625\times 27 = 4375 + 1250 = 16875$

$280\cdot 3=600+240=840$

1) ~~35 вар-в. постановки 3.~~

$П_3:\ \dfrac{8!}{3!\cdot 5!}=\dfrac{6\cdot 7\cdot 8}{6}=\underline{56}$ вар-в.

$П_1:\ \underline{5\text{ вар-в}}=56\cdot 5$

2) $П_5:$

$\dfrac{8!}{4!\cdot 4!}=\dfrac{5\cdot \cancel{6}\cdot 7\cdot \cancel{8}^{2}}{\cancel{6}\cdot \cancel{4}}=\underline{70}$

193

$3!=6$

Ответ: $\underline{70\cdot 6}=420$

№2.

$\cos 7x+\cos 3x-\sqrt2\cos 10x=\sin 7x+\sin 3x$

$2\cos 5x\cos 2x-\sqrt2\cos 10x=2\sin 5x\cos 2x$

$\sqrt2\cos 10x=\sqrt2(\cancel{\cos^2 5x}=2\cos^2 5x-1)=$

$=2\sqrt2\cos^2 5x-\sqrt2$

$\sqrt2\cos 5x\ (\sqrt2\cos 2x-\sqrt2\cos^2 5x)-\sqrt2$

$2\cos 2x\cos 5x-2\sqrt2\cos^2 5x-\sqrt2=2\sin 5x\sin 2x$

$2\cdot\frac12(\cos 3x+\cos 7x)$

$-\sqrt2\cos^2 5x+\sqrt2\sin^2 5x$

$2\cos 2x\cos 5x-\cancel{2\sqrt2\cos^2 5x+\sqrt2}=2\cdot\sin 5x\cos 2x$

$2\cos 5x(\cos 2x-\sqrt2\cos^2 5x)-2\sin 5x\left(\cos 2x-\dfrac{\sqrt2}{2\sin 5x}\right)$

$\sqrt2\cos 5x\ (\sqrt2\cos 2x-\cos 5x)=\sqrt2\sin 5x(\sqrt2\cos 2x-\sin 5x)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

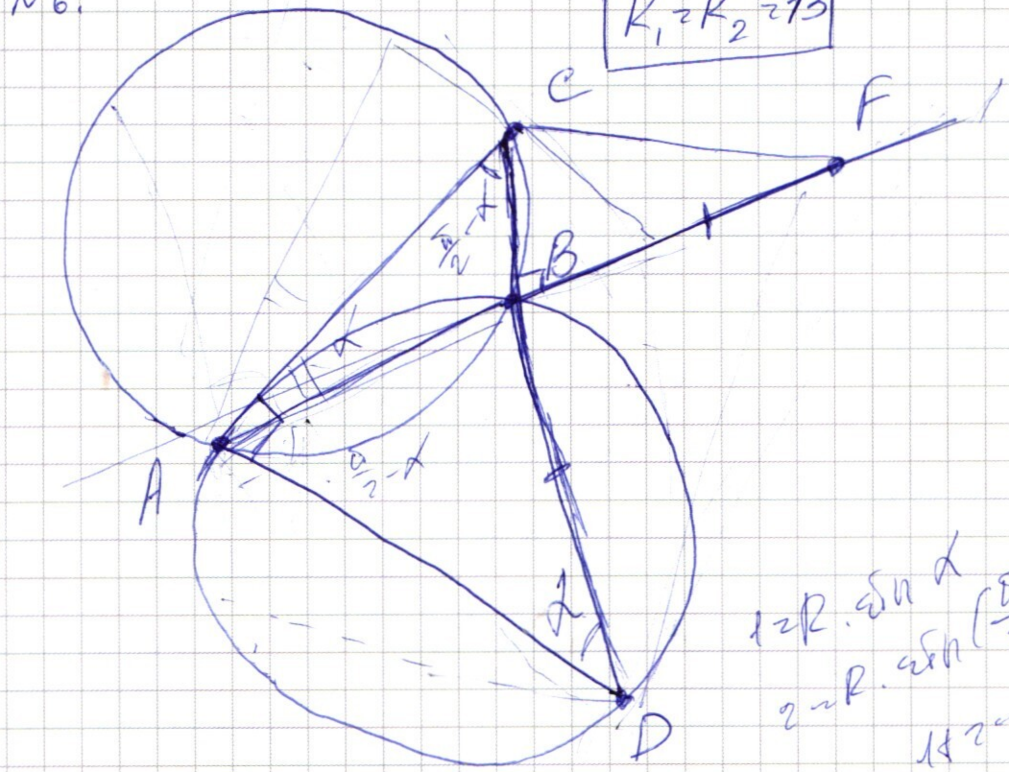
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.

$\boxed{R_1=R_2=13}$

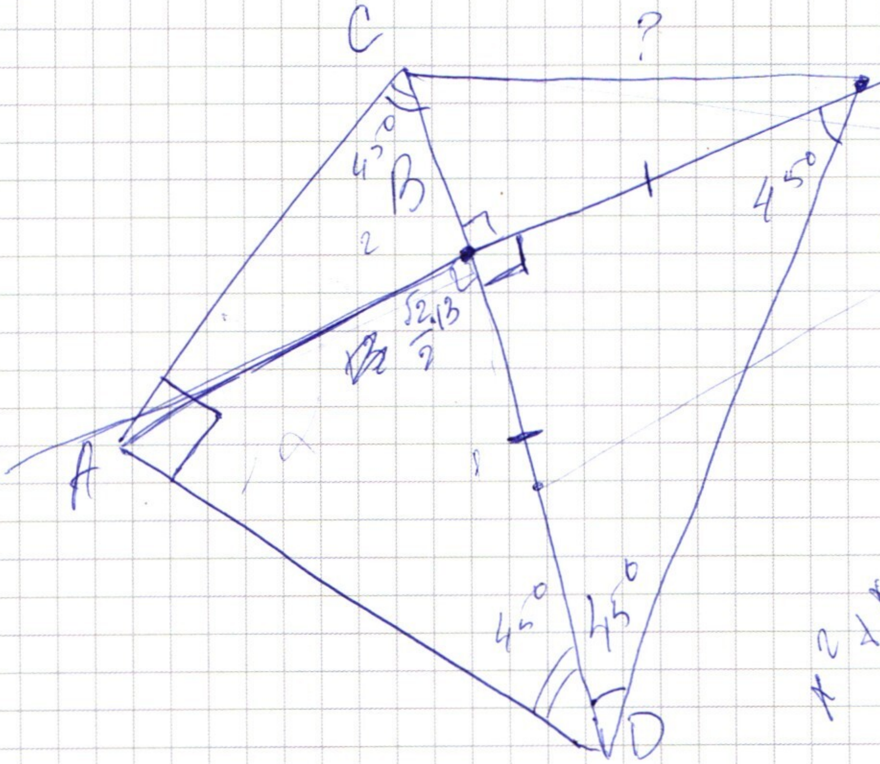


$1=R\cdot\sin\alpha$

$2=R\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

$1+2=R(\sin\alpha+\cos\alpha)=$

$=R\cdot\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$



$CD=R\cdot\sqrt{2}\cdot\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$

$x^2+xy+4x+8y-2y^2=0$

$x^2+(4+y)x-2y^2+8y=0$

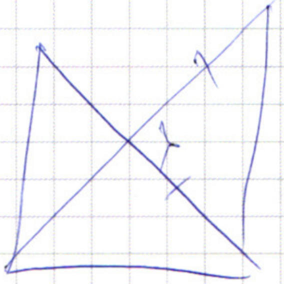
$\sqrt{D}=\sqrt{16+8y+y^2+8y^2-32y}=$

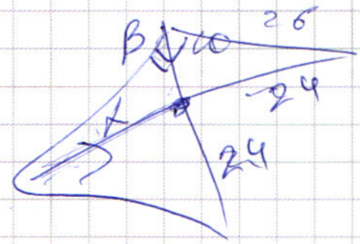
$=\sqrt{9y^2-24y+16}=$

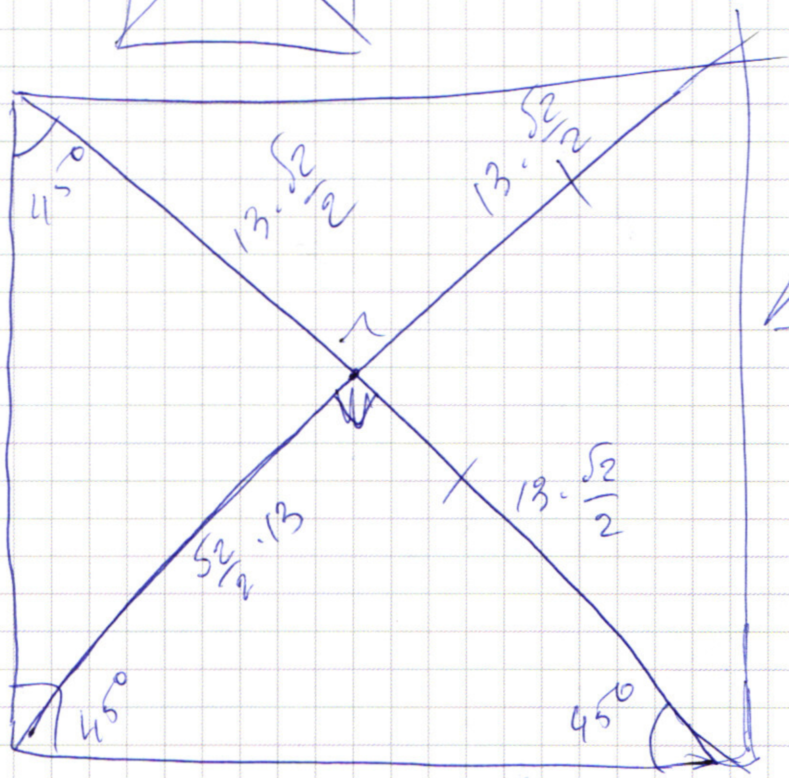
$=3y-4$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)







676−100

1) $\sin\alpha$ ✓
2) AC
3) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$
4) $\sin\beta$
5) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha+\beta\right)$
6) S

1) $\sin\alpha$
2) $\operatorname{tg}\alpha$
3) $\sin\beta$
4) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta\right)$
5) AC
6) $\sin(\beta+\gamma)$

$\sin\alpha = \frac{5}{13}$

$\sin .. = \frac{10}{26} = \frac{5}{13}$

$\sin 2\alpha = 2\cos\alpha \sin$

$\sin(\pi - 2\alpha) =$

$= \cancel{\sin\pi\cos 2\alpha} - \sin 2\alpha\cos\pi =$

$= -\sin 2\alpha\cos\pi$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{x^{4\lg y}}{y^{2\lg y}} = |x|^{-\lg x} \cdot |x|^{-\lg y}$

$x^{5\lg y + \lg x} = y^{2\lg y}$

$5\lg x \lg y + \lg^2 x = 2\lg^2 y \qquad t^2 - 5t - 2 = 0$

$\sqrt{D} = \sqrt{25+8} = \sqrt{33} \quad t = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{2} = \frac{\lg x}{\lg y} = \log_y x$

$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$

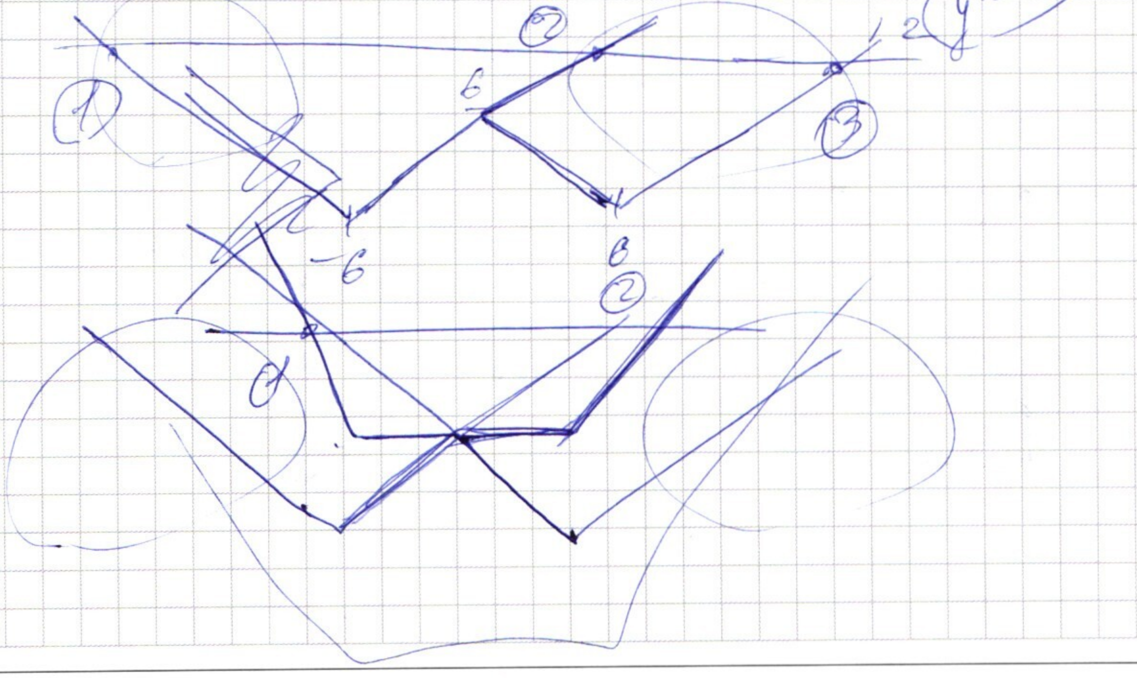
$(y-4)^2 - (x+2)^2 + y^2 - xy - 20 = 0$

$\boxed{№ 5.}$ $y = x - 6 \quad y = -x + 6$

$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases} \qquad |a| + |b|$

$y = x - 6$

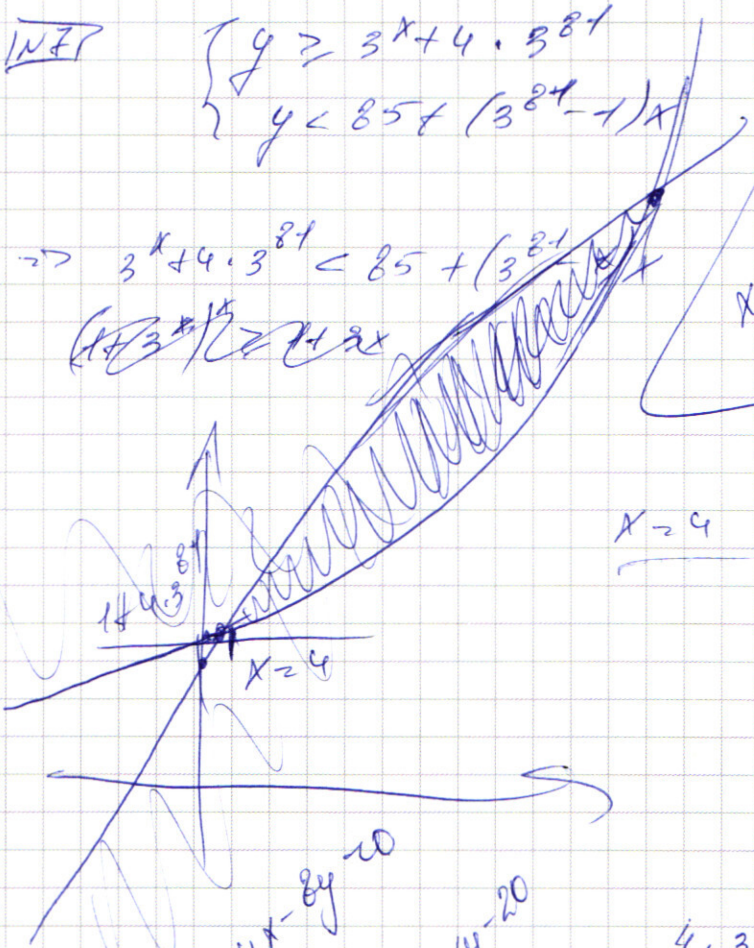
$y = -x + 6$



№7

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4\cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81}-1)x \end{cases}$$

$\Rightarrow 3^x + 4\cdot 3^{81} < 85 + (3^{81}-1)x$



$x^2 + (4-y)x + 2y^2 - 8y - 20$

$\sqrt{D} = \sqrt{16+8y+y^2-8y^2+32y} = \sqrt{-7y^2+48y+16}$

$x=4 \longrightarrow x=81$

$5\cdot 3^{81}$

$81\cdot 3^{81}+4$

$y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y - 20$

$2y^2 - xy$

$(y-4)^2 - (x+2)^2 + y^2 + xy - 20$

$4\cdot 3^{81} + 3^x$

$x\cdot 3^{81} + 85 - x$ $\quad x=4,$

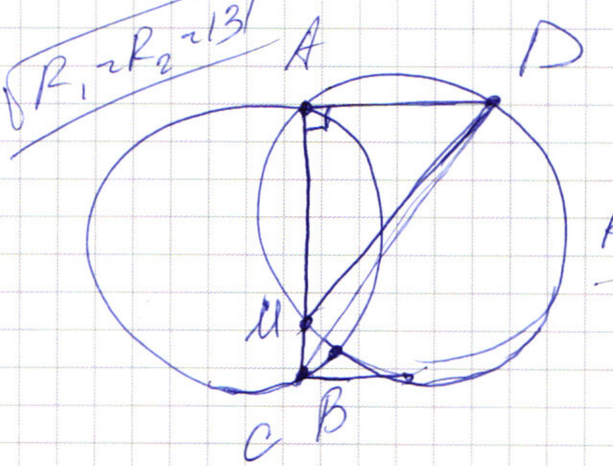
$x\cdot 3^{81} < 3^x$

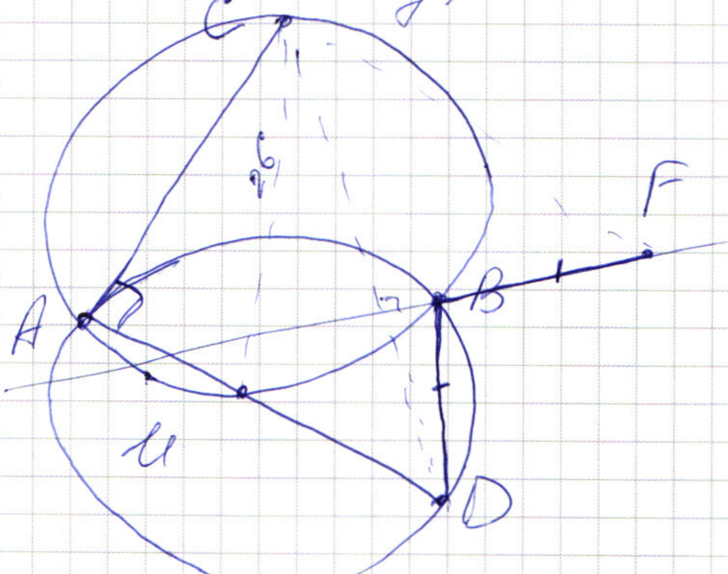
$3^x > x\cdot 3^{81}$

$x > 81\cdot \log_3 x$

№6.

$R_1 = R_2 = 13$





ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos 5x(\sqrt{2}\cos 2x - \cos 5x) = \sin 5x(\sqrt{2}\cos 2x - \sin 5x)$

2) $\cancel{tg}\ \frac{\sin 5x}{\cos 5x} = \frac{\sqrt{2}\cos 2x - \cos 5x}{\sqrt{2}\cos 2x - \sin 5x}$

Если не 0!

$2\cos 5x\cos 2x - \sqrt{2}\cos^2 5x + \sqrt{2}\sin^2 5x = 2\sin 5x\cos 2x$

$\cos 5x(2\cos 2x - \sqrt{2}\cos 5x) = \cancel{2}\sin 5x(2\cos 2x - \sqrt{2}\sin 5x)$

1) $(2\ldots) = 0 = (2\ldots)$

2) $\cancel{\sin 5x}$ $\cancel{2\cos 2x - \sqrt{2}}$ $\frac{\sqrt{2}\cos 2x - \cos 5x}{\sqrt{2}\cos 2x - \sin 5x} =$

$= 1 + \frac{\sin 5x - \cos 5x}{\sqrt{2}\cos 2x - \sin 5x} = \frac{\sqrt{2}\sin(5x - \frac{\pi}{4})}{\sqrt{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 5x} =$

$2\cos 2x(\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2}(\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 0$

$(\cos 5x - \sin 5x)(\cos 5x + \sin 5x)$

$(\cos 5x - \sin 5x)(2\cos 2x - \sqrt{2}\cos 5x - \sqrt{2}\sin 5x) = 0$

1) $\cos 5x = \sin 5x$

2) $2\cos 2x - \sqrt{2}\cos 5x - \sqrt{2}\sin 5x = 0$

$-\sqrt{2}(\sin 5x + \cos 5x)$

$\sqrt{2}(\sin(5x + \frac{\pi}{4}))$

$2\cos 2x - 2\sin(5x + \frac{\pi}{4}) = 0$

$\sin(5x + \frac{\pi}{4}) - \cos 2x = 0$

№3. $\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases}$

$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$

$(y-4)^2 - 16 - (x^2 y^2) - 4x$

$x\,y(y-x)$

$y^2 - 8y - x^2 - 4x \quad + y^2 - xy$

~~$y(y-8) - x(x+4) \quad + y(y-x)$~~

$(y-4)^2 - (x+2)^2 + y(y-x) - 16 - 4 = 0$

$\boxed{x<0}$

$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$

$\frac{x^{4\lg y}}{y^{2\lg y}} = (-x)^{-\lg x - \lg y} = \frac{1}{(-x)^{\lg x} \cdot (-x)^{\lg y}}$

$x^{4\lg y} \cdot (-x)^{\lg x} \cdot (-x)^{\lg y} = y^{2\lg y}$

$|x|^{5\lg y} \cdot |x|^{\lg x} = y^{2\lg y}$

$|x|^{\lg x + 5\lg y} = y^{2\lg y}$

$\log_y |x|^{\lg x + 5\lg y} = 2\lg y$

$10^{\lg^2 x} = 10^{-3\lg^2 y}$

$10^{5\lg^2 y} \cdot 10^{\lg^2 x} = 10^{2\lg^2 y}$

$\lg^2 x = -3\lg^2 y$

$10^{5\lg x \lg y} \cdot 10^{\lg^2 x} = 10$

$t^2 + 5t - 2 = 0$

$\lg^2 x + 5\lg x \lg y - 2\lg^2 y = 0$

$\sqrt{D} = \sqrt{25+8} = \sqrt{33}$

$t^2 + 5at - 2a^2 = 0$

$\lg x(\lg x + 5\lg y) - 2\lg y(\lg y$