

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО М.

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $16875 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$

$$\begin{array}{r|l} 16875 & 3 \\ 5625 & 3 \\ 1875 & 3 \\ 625 & 5 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Число 16875 имеет 7 простых

множителей: 3 тройки и 4 пятёрки

При этом цифры 1-3 эквивалентны

составно число меньше 10 которое можно
получиться.

Есть 2 варианта размещения

а) 4 пятёрки 3 тройки и одна единица

Формулы размещения с повторениями $P_{n, a_1, a_2, \dots, a_k} = \frac{n!}{a_1! \cdot a_2! \cdot \dots \cdot a_k!}$, где a_1, a_2, a_3 коли-

чество одинаковых элементов $P_1 = \frac{8!}{4! \cdot 3! \cdot 1!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{6} = 280$

б) 4 пятёрки, 1 тройка, 1 четвёрка, 2 единицы

$$P_2 = \frac{8!}{4! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2} = 840$$

$P_1 + P_2 = 1120$ вариантов.

3) Взяв ОДЗ для первого ур-ния:

$$\left\{ \begin{array}{l} y > 0 \\ x < 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} -x \leq 0 \\ y(-x) \leq 0 \\ -x > 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y > 0 \\ x < 0 \end{array} \right.$$

Логарифмируем уравнение

$$\lg y = \lg \left(\frac{x^2}{y^2} \right) = \lg(-x) + \lg(-x)$$

Из ОДЗ следует что $\lg x^2 = 2 \lg(-x)$;

$$\lg y = (4 \lg(-x) - 2 \lg y) = \lg(-x) \cdot (\lg(-x) + \lg y)$$

$\lg(-x) = a$; $\lg y = b$, тогда

$$b(4a - 2b) = a(a + b) \\ a^2 + ab = 4ab - 2b^2 \quad | : b^2$$

$$t = \frac{a}{b}$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

Поиск корней по теореме Виета $(t-1)(t-2)=0$

$$t_1 = 1$$

$$\frac{f_y(-x)}{f_y y} = 1$$

$$f_y(-x) = 13y$$

$$y = -x$$

$$t_2 = 2$$

$$\frac{f_y(-x)}{f_y y} = 2$$

$$f_y(-x) = 2f_y y$$

$$-x = y$$

ОПЗ: $y \neq 1$

Представим в 2-х-м

$$u) \quad -x=y \quad 2y^2 + y^4 - y^2 + 4y - 8y = 0 \quad y=2; x=-2$$

$$2y^4 - 4y = 0$$

$$y(y-2) = 0$$

$y=0$ не подходит сюда ОПЗ

$$8) \quad -x=y^2; \quad 2y^2 + y^3 - y^4 + 4y^2 - 8y = 0$$

$$y^3 - y^4 - 6y^2 + 4y = 0 \quad | :y \quad (y=0 \text{ не входит в ОПЗ})$$

$$y^3 - y^2 - 6y + 8 = 0$$

Поиск корней методом 8; $y=2$ подходит т.к. $8-4-12+8=0$

Делим методом Горнера

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -1 & -6 & 8 \\ & & 2 & 2 & -8 \\ \hline & 1 & 1 & -4 & 0 \end{array}$$

$$y^2 + y - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17 \quad y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \Rightarrow y=2; x=-4; y = \frac{\sqrt{17}-1}{2}; x = \frac{1-\sqrt{17}}{2}$$

Ответ: $(2; -2); (2; -4); \left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}; \frac{1-\sqrt{17}}{2} \right); \left(\frac{\sqrt{17}+1}{2}; \frac{1+\sqrt{17}}{2} \right)$

Ответ: $(2; -2), (2; -4); \left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}; \frac{1-\sqrt{17}}{2} \right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5. Рассмотрим все варианты первого уравнения

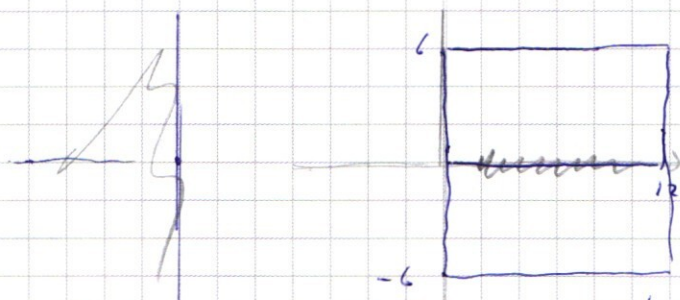
$$a) \begin{cases} x-6-y \geq 0 \\ x-6+y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-6-y+x-6+y=12 \\ 2x-12=12 \end{cases} \Rightarrow x=12 \Rightarrow \begin{cases} 12-6-y \geq 0 \\ 12-6+y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \leq 6 \\ y \geq -6 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x-6-y < 0 \\ x-6+y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x+6+y+x-6+y=12 \\ y=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-6-6 < 0 \\ x-6+6 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 12 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x-6-y \geq 0 \\ x-6+y < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-6-y-x+6+y=12 \\ -y=12 \end{cases} \Rightarrow y=-12 \Rightarrow \begin{cases} x-6+6 \geq 0 \\ x-6-6 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x < 12 \end{cases}$$

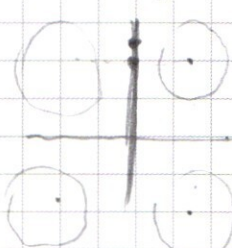
$$d) \begin{cases} x-6-y < 0 \\ x-6+y < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x+6+y-x+6+y=12 \\ -x+12=12 \end{cases} \Rightarrow x=0 \Rightarrow \begin{cases} 0-6-y < 0 \\ 0+6+y < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y > -6 \\ y < -6 \end{cases}$$

Отсюда первое уравнение выглядит так



Тогда $f(x)$ является обратной
функцией $f(x)$ вокруг осей,

Второе уравнение по каноническим $4-2$ форм окружностей с центром $(6,8)$



$(-6,8); (6,-8); (-6,-8)$ а радиусом 5 касание
Рассчитав минимальные радиусы касания
каждой из окружностей.

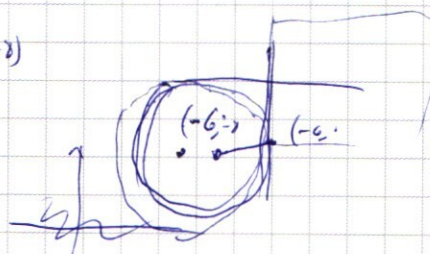
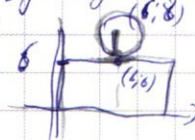
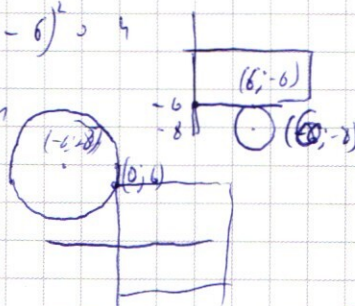
a)

$$u_1 = (8-6)^2 = 4$$

$$b) u_2 = (-8-(-6))^2 = 4$$

$$c) u_3 = (-6-0)^2 + (8-6)^2 = 4$$

$$d) u_4 = (-6-6)^2 + (8-6)^2 = 4$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

b) $\cos 5x + \sin 5x - \sqrt{2} \cos 2x > 0$ $\cos 4x + \sin 4x - \sqrt{2} \cos(4x - \frac{\pi}{4})$

$$\sqrt{2} \cdot \cos(5x - \frac{\pi}{4}) > \sqrt{2} \cos 2x$$

Допустим $\cos(5x - \frac{\pi}{4}) > \cos 2x$ $\neq$

Тогда $t = \pm \arccos(\cos(5x - \frac{\pi}{4})) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ $\neq$ $t = \pm \arccos(\cos(5x - \frac{\pi}{4})) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$t = \pm \arccos(\cos 2x) + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$

Тогда $\pm(5x - \frac{\pi}{4}) + 2\pi k = \pm 2x + 2\pi m$

Имеет смысл рассмотреть оба случая, когда у них одинаковые
знаки и разные

$+5x - \frac{\pi}{4} + 2\pi k = 2x + 2\pi m$

$+5x - \frac{\pi}{4} + 2\pi k = -2x - 2\pi m$

$3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi(m-k), m, k \in \mathbb{Z}$

$7x = \frac{\pi}{4} + 2\pi(-m-k)$

$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}l, l \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi}{7}p, p \in \mathbb{Z}$

Ответ: $x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}; x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi l}{3}, l \in \mathbb{Z}; x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi p}{7}, p \in \mathbb{Z}$

7. $y = 3^x + 4 - x + x \cdot 3^{x-1}$
 $y = 3^x + 4 \cdot 3^{x-1}$

при $x=4$ в обеих функциях
в правой стороне одинаковые

числа

Разность левых $(3^5 - 3^4) + (3^{x-1} - 1)(x-4)$

Тогда условие того что разность $(3^5 - 3^4) + (3^{x-1} - 1)(x-4) < 0$

$$3^5 - 3^{x+1} + (3^{x-1} - 1)(x+1-4) - ((3^5 - 3^4) + (3^{x-1} - 1)(x-4)) < 0$$

$$(3^{x-1} - 1) - 2 \cdot 3^4 < 0$$

$$3^x > \frac{3^{x-1} - 1}{2}$$

Разности $3^x(1 - 3^{x-4}) + (3^{x-1} - 1)(x-4) < 0, 3^{x-4} - 1 < \frac{3^{x-1} - 1}{3^4}(x-4)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(x-6)^2 + (x-6-y)^2 + 2 \cdot ((x-6)^2 - y^2) + 2(x-6+y)^2 = 17$$

$$x^2 - 24x + 72 + x^2 + 36 + y^2 - 12x - 2xy + 12y + x^2 + 36 + y^2 - 12x + 2xy - 17y$$

$$(x-6)^2 - 2y(x-6) + y^2 + 2(x-6)^2 - 2y^2 + (x-6)^2 + 2y(x-6) + y^2 = 17$$

$$4(x-6)^2 = 17$$

$$(x-6)^2 = 36$$

$$\begin{array}{l} x-6=6 \\ x=12 \end{array}$$

$$|6-1| + |6+1| = 12$$

$$|6-12| + |6+12| = 18$$

$$6+18=24$$

3-5 x+1
(3-1)(x+1-4)

$$\begin{cases} x-6-y \geq 0 \\ x-6+y \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} 2x-12 \geq 12 \\ x \geq 12 \end{array}$$

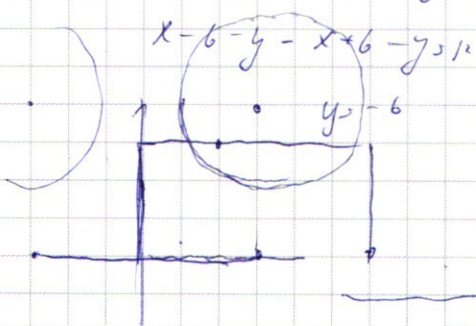
$$\begin{cases} x-6-y < 0 \\ x-6+y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x < 6+y \\ x > 0 \end{array} \Rightarrow x \in [0; 6+y]$$

$$\begin{array}{l} -x+6+y = x-6+y=12 \\ y=6 \end{array}$$

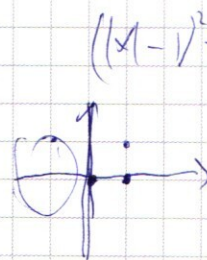
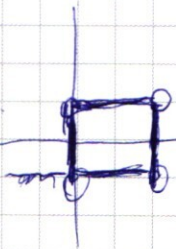
$$\begin{array}{l} x-6-y < 0 \\ x-6+y < 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x > 6+y \\ x < 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x-6-y < 0 \\ x-6+y < 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} -x+6+y = -x+6+y=12 \\ x \leq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} y \geq 6 \\ y < 6 \end{array}$$



12, 6, 2,



$$((x-1)^2 + y^2 = 1)$$

(3-1)

$$3-1+3(1-3)$$

$$\sin 7x \cdot \sin 3x \cdot \cos 7x + \sin 7x \cdot \sin 3x$$

$$(\cos 7x - \sin 7x)^2 = (\sin 3x - \cos 3x + \sqrt{2} \cos 10x)^2$$

$$\cos^2 7x - 2 \cos 7x \cdot \sin 7x + \sin^2 7x = \sin^2 3x + 2 \cos 3x \cdot \sin 3x - \cos^2 3x +$$

$$+ 2 \cos 10x + 2\sqrt{2} \sin 3x \cos 10x - 2\sqrt{2} \cos 3x \sin 10x$$

$$1 - 2 \sin 4x = 1 - 2 \sin 6x - 2 \cos 10x - 2\sqrt{2} \cos 10x$$

$$\cos 7x + \cos 3x = 2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x + 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$\sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x) = \cos 10x = 0$$

$$\sqrt{2} \cos 5x (\cos 5x - \sin 5x) = (\cos 5x - \sin 5x)$$

$$\sqrt{2} \cos 5x (\cos 5x - \sin 5x) - (\cos 5x + \sin 5x) (\cos 5x - \sin 5x) = 0$$

$$(\cos 5x + \sin 5x - \sqrt{2} \cos 5x) (\cos 5x - \sin 5x) = 0$$

$$\cos 5x + \sin 5x - \sqrt{2} \cos 5x = 0$$

$$\cos 5x \sqrt{2} \cos(5x - \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \cos 5x$$

$$\cos(5x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cos 5x$$

$$5x - \frac{\pi}{4} = 2x + \pi n;$$

$$3x = \frac{\pi}{4}$$

$$CB^2 + CD^2 = (CB - CD)^2 + CF^2$$

$$CP^2 +$$

$$5^5 + 5^5$$

$$r^2 = \frac{1}{4}$$

$$x = 4$$

$$5^5$$

$$8145 - 3^{81} \cdot x - x$$

$$\frac{21-85}{3^{81}-1}$$

$$3 \leq x \leq 5 - 4 \cdot 3^{81}$$

$$y = 4 \cdot 3^{81} \geq 3^x$$

$$x > \frac{y-85}{3^{81}-1}$$

$$x = 5$$

$$\frac{(x-4)}{(4-4)} = \frac{(5-4)}{(4-4)}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

81-4

16875 | 3
5625 | 3
1875 | 3
625 | 5
125 | 5
25 | 5
5 | 5
1

$(3^x - 3^y) + (6-x)(1+3^y)$

16875/3
-15
15
-15
75
-75

5625/3
-3
26
-29
-22
28
-45
11

g) $4 \rightarrow 5 [5] - 5$
 $4 \rightarrow 5 [5] - 4$
 $8 \rightarrow 3 [3] - 3$
 $1 \rightarrow 1 [1] - 1$

d) $4 \rightarrow 5 [5] - 5$
 $4 \rightarrow 5 [9] - 1$
 $3 \rightarrow 3 [3] - 1$
 $1 \rightarrow 1 [1] - 2$

$\frac{8!}{4!3!1!} + \frac{8!}{4!2!} \cdot \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 8} + \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2}$

$\sqrt{2} \cos 10x - \sqrt{2} \sin$

$\sqrt{2} \cos 10x, \sqrt{2}$

$\cos 7x \cos 3x - \sin 7x \sin 3x$
 $\cos 7x + \cos 3x$

$2 \cos 5x$

$\cos 10x = \cos 3x$

$\cos 7x - \sin 7x = \sqrt{2} \cos 10x = \sin x - \cos 3x$

$\cos 7x = \sqrt{2} \cos 7x \cos 3x + \cos 3x$

$2 \cos 5x \cos 3x$

$\sin 7x = \sqrt{2} \sin 7x \cdot \sin 3x + \sin 3x$

$\cos 4 + \cos 6 = 2 \cos \frac{4+6}{2}$

$85 - (3^y - 1)$

$3^y - 1 = \frac{3^y - 1}{2^y} \cdot 81$

$3^{79} - 3^5 (79)$

$$2y^2 - 8y + 8 - 8 - x^2 - 4x - 4 + 4 - xy$$

cos 4 sin x

$$2(y-4)^2 - (x+2)^2 - xy + 4$$

$$y^2 - xy + 0,5x$$

$$\cos 7x + \cos 3x = 2 \cos 5x \cdot \cos 2x$$

$$2 \cos 5x$$

$$\sin 7x = \sin 3x + 2$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos$$

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

$$\alpha + \beta = a$$

$$\alpha - \beta = b$$

$$\alpha = \frac{a+b}{2}$$

$$\beta = \frac{a-b}{2}$$

$$2 \sin \alpha \cos \beta$$

$$(y^2 - x^2) \cdot (y-x)(y+x)$$

$$2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \sqrt{2} \cos \alpha$$

$$\cos \cos 2x = \cos 5x - \cos 2x = \sin \alpha$$

$$\cos 5x - \cos 2x$$

$$\cos 3x = \cos 5x \cdot \cos 2x$$

$$\lg(x \cdot y) = \lg(x) + \lg(y)$$

$$\lg(x \cdot y) = \lg(x) + \lg(y)$$

$$\lg(x) + \lg(y)$$

$$\lg(x) + \lg(y)$$

$$(4 \lg(x) - 2 \lg(y)) \lg(y)$$

$$\lg(x) = a$$

$$\lg(y) = c$$

$$\lg(x) = a$$

$$u(u+b) = (4a - 2b) \cdot b$$

$$u^2 + ub = 4ub - 2b^2 \quad | : b^2$$

$$\frac{u}{b} = t$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$(t-1)(t-2) = 0$$

$$\frac{\lg(-x)}{\lg(y)} = 2$$

$$\frac{\lg(-x)}{\lg(y)} = 1$$

$$\lg(-x) = \lg(y)$$

$$-x = y^2$$

$$2 \cos 5x \cos 2x$$

$$2x = 2\pi$$

$$x = \pm \alpha + \pi n$$

$$\sqrt{2} \cos 10x = \sqrt{2} \cos 7x \cos 3x = \sqrt{2} \sin 7x \cdot \sin 3x$$

$$\cos 7x = \sqrt{2} \cos 7x \cdot \cos 3x + \cos 5x$$

$$\cos 2x = \cos 5x$$

$$\cos 7x$$

$$2x = x + \pi \quad | : \pi$$