

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~ 1

Заменим, что $16875 = 5^4 \cdot 3^3$. Тогда среди
восьми цифр есть цифра 5, кратная 5. Но
5-ти кратны только цифры 5 и 0, но 0 ~~быть~~
быть не может, т.к. тогда произведение всех
цифр 0 $\Rightarrow$ 5-ти кратны только цифры 5. Т.к.
у числа 16875 степень вхождения 5-ки равна 4,
а у цифры 5 она 1, то в числе равно 4 цифры
5-ки. Т.к. $5 \nmid 3$, то среди оставшихся чисел
остались цифры, кратные 3-м, либо 1. Заменим,
что цифра кратная 3-м две: 3 и 9. Поэтому
составим 2 варианта наборов оставшихся цифр:
 $\{1; 1; 3; 9\}$ и $\{1; 3; 3; 3\}$. Тогда всего
вариантов расположения цифр: $C_8^4 \cdot (C_4^1 + C_4^1 \cdot C_3^1)$,
т.к. есть C_8^4 мест, куда можно поставить 5, а
в оставш. 4 либо в одно место 1, либо в 1 3, а
в одно 9: $C_8^4 \cdot (C_4^1 + C_4^1 \cdot C_3^1) = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} (4 + 4 \cdot 3) =$
 $= 70 \cdot 16 = 1120$.

Ответ: 1120.

~ 3

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 2y \neq 0 \end{cases} \quad \text{ОДЗ: } \begin{cases} y \neq 0 \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -xy > 0 \\ \rightarrow x < 0. \end{cases}$$

~ 3 (продолжение)

Требуется найти первое (т.е. $y \neq 0$, то на $(y^2)^{\lg y}$ можно выносить только для $y > 0$):

$$(x^4)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \cdot (y^2)^{\lg y} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^4)^{\lg y} = (-x)^{\lg y + \lg(-y)} \cdot (y^2)^{\lg y} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^4)^{\lg y} = (-x)^{\lg y} \cdot (y^2)^{\lg y} \cdot (-x)^{\lg(-y)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^4)^{\lg y} = (y^2(-x))^{\lg y} \cdot \left((-x)^{\frac{\lg(-y)}{\lg y}}\right)^{\lg y}, \text{ при } y \neq 1.$$

Пусть $y = 1$:

$$\left(\frac{-x}{1}\right)^{\lg 1} = (x^4)^0 = 1 = (-x)^{\lg(-x)} = 1^{\lg(-x)} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (-x) = 1 \Rightarrow x = -1$. Но подставляем во второе:

$$2 \cdot 1^2 + 1^2 - 1^2 + 4 \cdot 1 - 8 \cdot 1 = 2 + 4 - 8 - 2 \neq 0, \text{ значит } y \neq 1.$$

Т.е. $x^4 > 0$ и $y^2(-x) \cdot (-x)^{\frac{\lg(-y)}{\lg y}} > 0$, то:

$$x^4 = y^2(-x) \cdot (-x)^{\frac{\lg(-y)}{\lg y}}$$

$$x^3 = -y^2 \cdot (-x)^{\frac{\lg(-y)}{\lg y}} = -y^2 \cdot (-x)^{\log_y(-x)} =$$

$$= -y^2 \cdot \left(y^{\log_y(-x)}\right)^{\log_y(-x)} = -y^2 \cdot y^{\log_y(-x)^2} =$$

$$= -y^{2 + (\log_y(-x))^2}$$

~ 3

Заменим $-x = t$, получим:

$$\left(\frac{t^4}{y^2}\right)^{\lg y} = t^{\lg ty}$$

$$2y^2 + ty - t^2 + ut - 2y = 0.$$

из 023: $y \neq 0$,

$y > 0$, $ty > 0 \Rightarrow$

$\rightarrow t > 0 \Rightarrow x < 0$.

из первую строку при $\frac{t^4}{y^2} > 0$ и $t^{\lg ty} > 0$

можно извлечь корень степени $\lg y$:

$$\frac{t^4}{y^2} = t^{\frac{\lg ty}{\lg y}} = t^{\log_y ty} \Leftrightarrow t^4 = t^{\log_y ty} \cdot y^2 \Rightarrow$$

(продолжение на стр. 4)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~ 4

Поск. SK, SL, SM - касат. у S к сфере, то $SK = SL = SM$. Пусть $SO = x$. V_1, V_2 объёмы пирамид, отсек. от уша $по касательной$, касающ. сфер. Δ площади сечений соотв. $S_1 = 4$ и $S_2 = 9$. Тогда $V_1 = \frac{1}{3} h_1 \cdot S_1$, $V_2 = \frac{1}{3} h_2 \cdot S_2$. Но $h_1 = x - r$, где r - радиус сферы, т.е. эти плоскости перпенд. высоте, а $h_2 = x - r$. Тогда:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{4(x-r)}{9(x-r)}$$

Но у этих пирамид общий угол, а плоскости упирающ. этого угла параллельны $\rightarrow$ они подобны с коэф. $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$, т.е. у подобия ~~граду~~ с коэф. k линейн. соотв. у них подобны с коэф. k^2 . А их объёмы с коэф. $k^3 \rightarrow$

$$\rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{8}{27} = \frac{4(x-r)}{9(x-r)} \Leftrightarrow 9 \cdot 8(x-r) = 4 \cdot 27(x-r) \Leftrightarrow$$

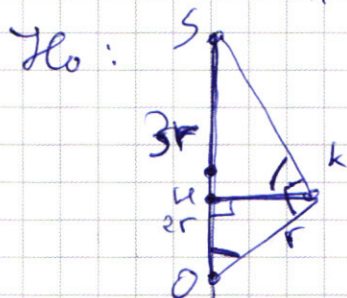
$$\Leftrightarrow 2x + 2r = 3x - 3r \Leftrightarrow 5r = x. \text{ Тогда в пирам. } \triangle KSO \text{ имеем: } \angle SKO = 90^\circ, SO = 3r, OK = r \Rightarrow$$

$$\sin \angle KSO = \frac{OK}{OS} = \frac{r}{5r} = \frac{1}{5} \Rightarrow \angle KSO = \arcsin \frac{1}{5}.$$

Но ещё т.е. $SK = SL = SM$, то ~~сечение~~ плоскость KLM перпендикулярна SO (т.е. ещё и $OK = OL = OM$ и $\angle SKO = \angle SLO = \angle SMO = 90^\circ \rightarrow KLM \perp SO$). Поэтому V пирамид, отсек. плоск. KLM равен $\frac{1}{3} \cdot h \cdot S_{\text{сеч. } KLM}$ и Но эта пирамида подобна первой $\rightarrow$

$$\rightarrow \frac{V}{V_1} = \left(\frac{h}{h_1}\right)^3, \text{ т.е. } h \text{ и } h_1 - \text{хар. соотв. вращающ.}$$

$$\rightarrow \frac{h^3}{h_1^3} = \frac{h \cdot S_{\text{сеч. к.л.м}}}{h_1 \cdot 4} \Rightarrow S_{\text{сеч. к.л.м}} = \frac{4h^2}{h_1^2}$$



$$h_1 = 4r, \text{ а } h - \text{расст. от}$$

S до мгновенного прохода через к.л.м и перемещ. $SO \Rightarrow h = SK$.

$$\text{г.л. } SK = SK \cdot \sin \angle SKO =$$

$$= SK \cdot \sin \angle KSO, \text{ т.е. } \angle SKO = \angle KSO,$$

т.е. отсюда в сумме $\angle KSO$ равно 90° . г.л.

$$\text{тогда } SK = SK \cdot \cos \angle KSO \Rightarrow SK = SK \cdot \cos \angle KSO =$$

$$= SK \cdot \sqrt{1 - \sin^2 \angle KSO} = SK \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{25}} = SK \cdot \frac{\sqrt{24}}{5}, \text{ а } SK =$$

$$SO \cdot \cos \angle SOK = 50 \cdot \frac{\sqrt{24}}{5} = 50 \cdot \frac{\sqrt{24}}{5} = 10\sqrt{24}.$$

$$\text{Тогда } SK = 10\sqrt{24} \cdot \frac{\sqrt{24}}{5} = \frac{240}{5}.$$

$$\text{Тогда } S_{\text{сеч. к.л.м}} = \frac{4h^2}{h_1^2} = \frac{4 \cdot \frac{24^2}{5^2}}{4^2 r^2} =$$

$$= \frac{4 \cdot 24^2}{4^2 \cdot 5^2} = \frac{4 \cdot 6^2}{5^2} = 4 \cdot \frac{36}{25} = \frac{144}{25} = 5,76$$

$$= \frac{16 \cdot 36}{100} = \frac{576}{100} = 5,76.$$

$$\text{Ответ: } \angle KSO = \arcsin \frac{1}{5}; S_{\text{сеч. к.л.м}} = 5,76.$$

и 3 (предложение со стр. 2)

$$\Leftrightarrow t^4 = t^{\log_y t y} \cdot (t^{\log_t y})^2 = t^{\log_y t y + 2 \log_t y}$$

$$\text{а тогда } 4 = \log_y t y + 2 \log_t y = \log_y t + 1 + 2 \log_t y.$$

$$\text{Пусть } \log_t y = a \Rightarrow 4 = 1 + 2a + \frac{1}{a} \Leftrightarrow 2a^2 - 3a + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$a = 1 \text{ или } a = \frac{1}{2}. \text{ Если: } 1) a = \frac{1}{2}, \text{ то } \log_t y = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^{\frac{1}{2}} = y \Rightarrow y^2 = t = -x^{\frac{1}{2}}, \text{ подставим во второе:}$$

$$t = -y^2$$

~ 2 (продолжение)

$$2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) \cdot \cos 2x = \cos 10x$$

$$2 \cos x \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x \right) = \cos^2 5x - \sin^2 5x$$

$$\sqrt{2} \cos x (\cos 5x - \sin 5x) = (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x)$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x - \sqrt{2} \cos x) = 0$$

1) $\cos 5x = \sin 5x$

$$5x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z}.$$

2) $\cos 5x + \sin 5x = \sqrt{2} \cos x$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x = \cos x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + 5x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x$$

либо $5x - \frac{\pi}{4} = x + 2\pi k$, либо $5x - \frac{\pi}{4} = -x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$

a) $4x = \frac{\pi}{4} \xrightarrow{+2\pi k} x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z};$

b) $6x = \frac{\pi}{4} \xrightarrow{+2\pi k} x = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z};$

Ответ: $x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z};$ ~~$x = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z};$~~

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z};$$

$$x = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{3} k, k \in \mathbb{Z}.$$

~ 5

Заметим, что первое уравнение системы задаёт квадрат с вершинами $(0; 6), (0; -6), (12; -6), (12; 6)$. Заметим это:

Рассмотрим уравнение прямой:

1) $y = x - 6$ и 2) $y = 6 - x.$

Еще в первом уравнении оба модуля ~~большее~~ не меньше 0,

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~ 3 (продолжение)

$$2y^2 - xy - y^2 - 4x - 8y = \cancel{2y^2 - xy - y^2 - 4x - 8y}$$

$$= 2y^2 + y^3 - y^4 + 4y^2 - 8y = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y(-y^3 + y^2 + 6y - 8) = 0, \text{ т.к. } y > 0, \text{ то не}$$

можно сократить:

$$y^3 - y^2 - 6y + 8 = 0.$$

$$(y - 2)(y^2 + y - 4) = 0$$

$$(y - 2)\left(y - \frac{1 - \sqrt{17}}{2}\right)\left(y + \frac{1 + \sqrt{17}}{2}\right) = 0$$

Но $y > 0 \Rightarrow$ подставляем $y = 2$ и $y = \frac{\sqrt{17} - 1}{2}$

Тогда $x = -y^2 = -4$ или $x = -\frac{(\sqrt{17} - 1)^2}{4} = -\frac{14 - 2\sqrt{17} + 1}{4} =$
 $= -\frac{9 - \sqrt{17}}{2} = \frac{\sqrt{17} - 9}{2}.$

Если же $a = 1$, то $\log_t y = 1 \Rightarrow t = y \Rightarrow y = -x.$

Подставляем во второе:

$$2y^2 + y^2 - x^2 - 4x + 8y = 0$$

$$2x^2 + 4x = 0$$

$$x(x + 2) = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow y = 2, \text{ т.к. } x < 0.$$

Ответ: $(-4; 2); \left(\frac{\sqrt{17} - 9}{2}; \frac{\sqrt{17} - 1}{2}\right); (-2; 2)$

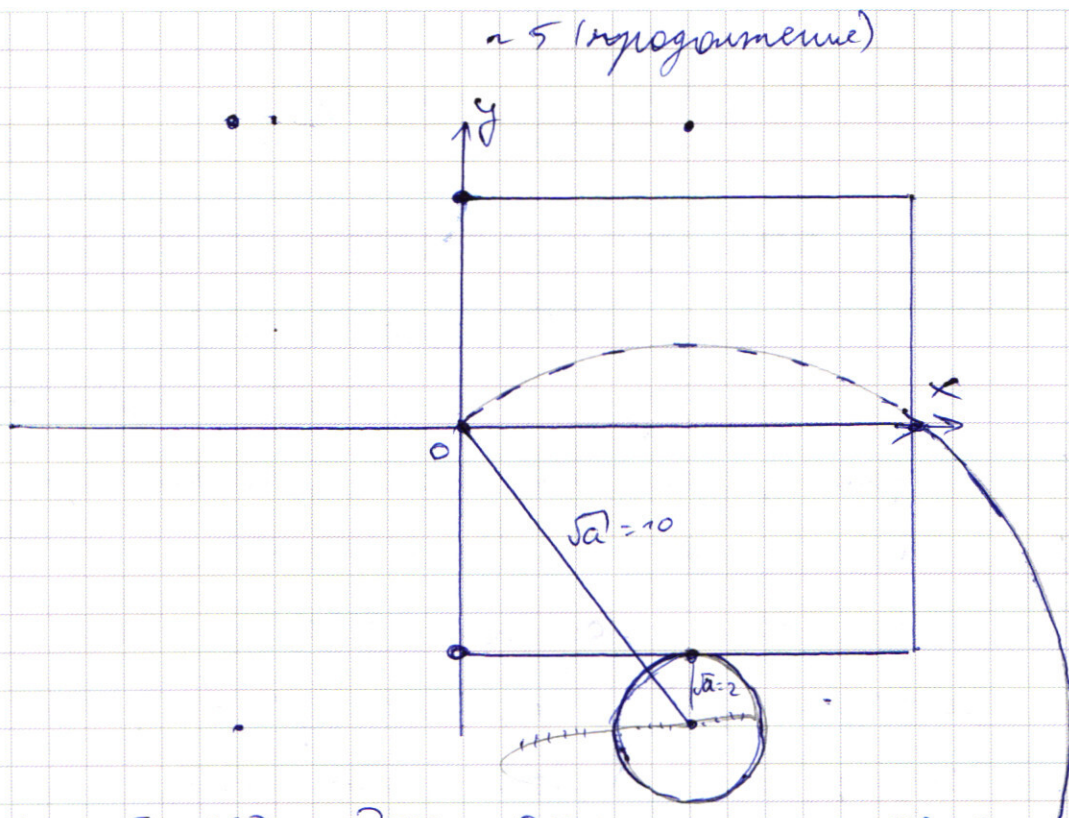
~ 2

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 7x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 7x\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 3x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 3x\right) = \cos 10x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = \cos 10x.$$

$$2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) \cdot \cos 2x = \cos 10x$$



Тогда $a=100$ эти окружности пересекают квадрат в одних и тех же точках $(0;0)$ и $(17;0)$. А при $a>100$ решений нет.

Значит при $a=4$ решения $\{ (6; -6) \text{ и } (6; 6) \}$
и при $a=100$ решений $\{ (0;0) \text{ и } (17;0) \}$.

Ответ: при $a=4$ и при $a=100$.

~ 7

Заметим, что $x \geq 5$, т.е. тогда
 $85 + (3^{81} - 1)x \leq 3^x + 4 \cdot 3^{81}$, но первое
 больше $> y$, а второе $\leq y$, что невозможно. $\Rightarrow$
 $x \geq 5$. Аналогично при $x \geq 85$ имеем
 $85 + (3^{81} - 1)x \leq 3^x + 4 \cdot 3^{81}$ — неверно $\Rightarrow x \leq 84$
 (здесь ~~во~~ ^{езде} $x \in \mathbb{Z}$). Тогда $5 \leq x \leq 84$.
 Найдём при каждом x количество ^{y-ков} ~~у-ков~~ ~~у-ков~~:
 при $x=5$ имеем $3^5 + 4 \cdot 3^{81} \leq y < 85 + (3^{81} - 1) \cdot 5$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~ 5 (продолжение)

то $x - 6 \geq y$ и $y \leq 6 - x$, т.е. точки летят в правой части, где при бОльш. высот. мод.

имеем: $x - 6 - y + x - 6 - y = 12 \Rightarrow x = 12$.

Если бОльш. мод. остр. получим $x = 0$. Если

первый высот., второй остр., то $y = -6$, а

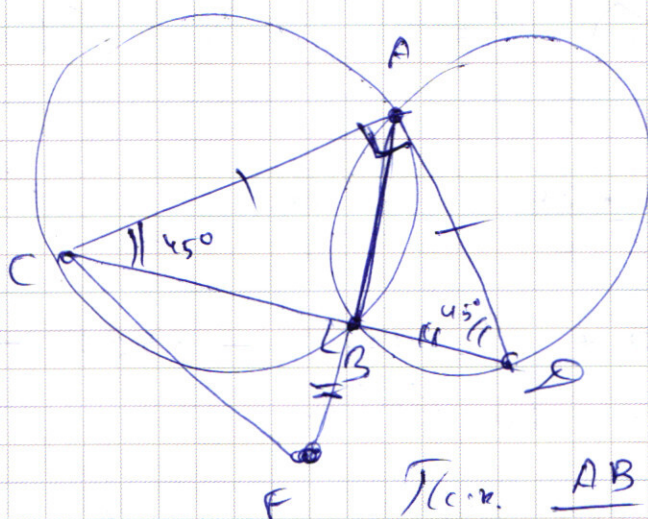
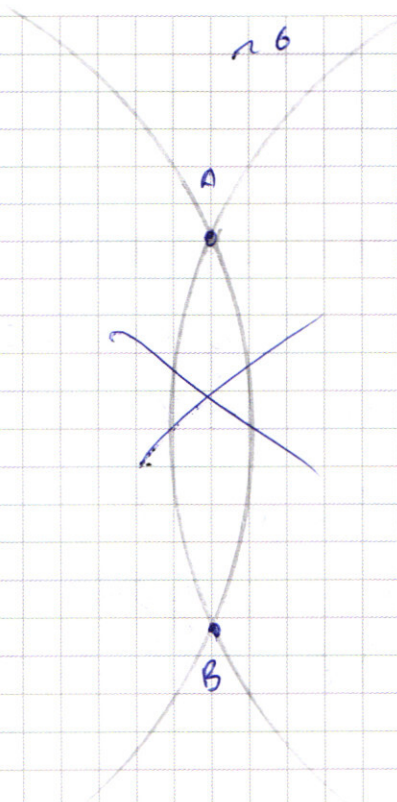
если 1-й остр., 2-й — высот., то $y = 6$.

Данные условия в этих областях задают квадрат.

Рассмотрим на втором:

данное уравнение задаёт 4 окружности с центрами в $(6; 8)$, $(-6; 8)$, $(6; -8)$, $(-6; -8)$, радиуса $\sqrt{a}$ (не от этих окружностей берущая площадь не считая, что летит в той же четверти, что и центр).

Заметим, что при $a < 4$, эти окружности не касаются квадрата $\Rightarrow$ сист. не имеет реш., если $a = 4$, то решение? Тут $4 < a < 100$ у окружностей рад. бОльшие $2 - x$, но меньше 10, поэтому у остр. в 1-й и 4-й четвертях не будет точек с квадратом, которые при этом отлич. друг от друга:



Проведём AB.
 Так как окружности
 равны, то и
 дуги AB их равны
 $\rightarrow \angle ACD = \angle ADC =$
 $= \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ.$

Так как $\frac{AB}{\sin 45^\circ}$ из теор. син.
 равно $2R = 20 \Rightarrow AB = 20 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~7 (продолжение)

Тогда всего при x_0 имеем:

$$85 + (3^{81} - 1)x_0 - 3^{x_0} - 4 \cdot 3^{81} \quad y\text{-ков.}$$

Тогда всего пар будет:

$$\sum_{\substack{i \in \mathbb{Z} \\ i=5}}^{84} (85 + (3^{81} - 1)i - 3^i - 4 \cdot 3^{81}) =$$

$$= 85 \cdot 80 + (3^{81} - 1) \cdot (5 + 6 + \dots + 84) - 3^5(1 + 3 + \dots + 3^{79}) - 4 \cdot 3^{81} \cdot 80 =$$

$$= 85 \cdot 80 + 3^{81} \cdot \frac{89 \cdot 80}{2} - \frac{89 \cdot 80}{2} - 5^5 \cdot \frac{3^{80} - 1}{3 - 1} =$$

$$= 320 + 3^{81} \cdot 3560 - 3560 -$$

$$- \frac{243}{2} \cdot 3^{80} + \frac{243}{2} - 320 \cdot 3^{81} =$$

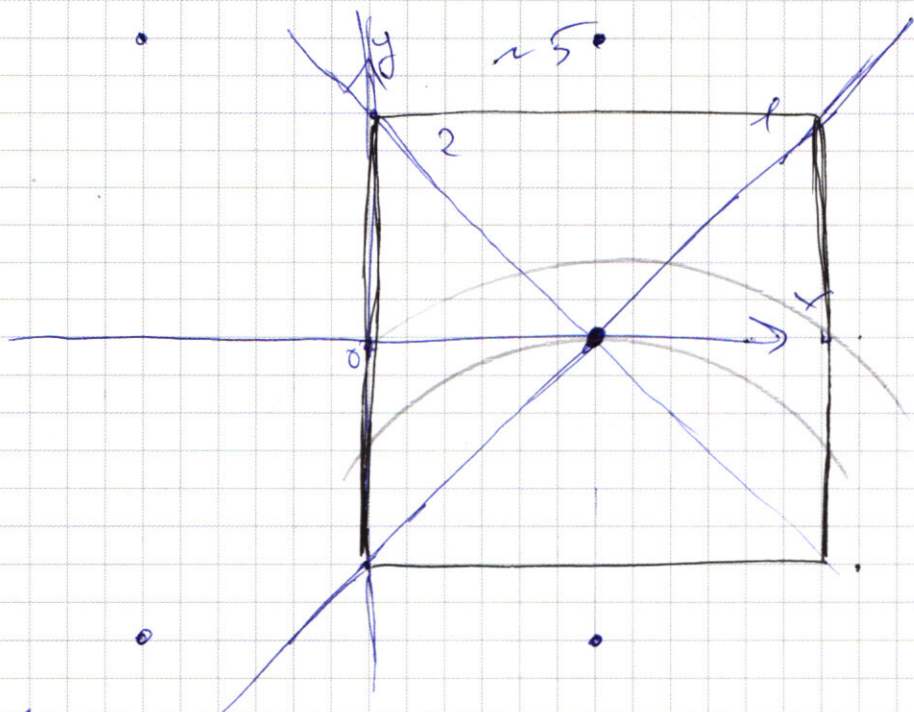
$$= 6800 - 3560 + \frac{243}{2} + 3^{81} (3560 - \frac{81}{2} - 320) =$$

$$= 3240 + \frac{243}{2} + 3^{81} (3240 - \frac{81}{2}) =$$

$$= \frac{6280 + 243}{2} + 3^{81} (\frac{6280 - 81}{2}) =$$

$$= \frac{6523}{2} + 3^{81} \cdot \frac{6199}{2} = \frac{1}{2} (3^{81} \cdot 6199 + 6523).$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{2} (3^{81} \cdot 6199 + 6523) = \frac{3^{81} \cdot 6199 + 6523}{2}.$$



$\sqrt{a}$

$$a = 4$$

$$a = 100$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 16 \\ \hline 48 \\ 192 \\ \hline 480 \end{array}$$

$$|x-6-y| + |x-6+y| = 12$$

$$1) \quad x-6-y \geq 0 \quad x-6-y \geq 0$$

$$x-6-y + x-6-y = 12$$

$$2x - 12 = 12$$

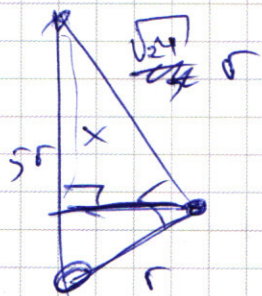
$$x = 12$$

$$2) \quad x-6-y \geq 0 \quad x-6+y \leq 0$$

$$x-6-y - x + 6 - y = 12$$

$$-2y = 12$$

$$y = -6$$



$$x = 4 \cdot \left(\frac{1}{5} \right)^2$$

$$y = x-6$$

$$y = 6-x$$

$$3) \quad x-6-y \leq 0$$

$$x-6+y \geq 0$$

$$-x+6-y - x+6+y = 12$$

$$y = 6$$

$$4) \quad x-6-y \leq 0$$

$$x-6+y \leq 0$$

$$-x+6-y - x+6-y = 12$$

$$-2x - 12 = 12$$

$$x = 0$$

$$\frac{x}{\sqrt{\frac{24}{5}}} = \frac{\sqrt{\frac{24}{5}}}{5}$$

$$5x = \frac{24}{\sqrt{5}}$$

$$x = \frac{24}{100 \cdot 5}$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{4} &= \left(\frac{\frac{24}{5}}{3} \right)^2 \\ &= \left(\frac{24}{15} \right)^2 \\ &= \left(\frac{8}{5} \right)^2 \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~7

$$3^{81} \cdot (1 + \dots + 80) + 85 \cdot 80 - (5 + \dots + 84) - (3^5 + \dots + 3^{84}) =$$

$$= 3^{81} \cdot \frac{80 \cdot 81}{2} + 85 \cdot 80 - \frac{89 \cdot 80}{2} - 3^5 \cdot \frac{3^{80} - 1}{2} =$$

$$3^5 = 9 \quad b = 3$$

$$9 + 9b + 9b^2 + \dots + 9b^{79} = 9(1 + \dots + b^{79}) = 9 \cdot \frac{b^{80} - 1}{b - 1} =$$

$$= 3^5 \cdot \frac{3^{80} - 1}{2}$$

$$= 3^{81} \cdot (40 \cdot 81) + 85 \cdot 80 - 89 \cdot 40 - \frac{3^{85}}{2} + \frac{3^5}{2} =$$

$$= 3^{85} \cdot 40 - 3^{85} \cdot \frac{1}{2} + 85 \cdot 80 - 89 \cdot 40 + \frac{243}{2} =$$

$$= 3^{85} \cdot 39 \frac{1}{2} + 6800 - 3560 + 121 \frac{1}{2} =$$

$$= 3^{85} \cdot 39 \frac{1}{2} + 3361 \frac{1}{2} =$$

$$= 3^{85} \cdot \frac{79}{2} + \frac{6723}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} (3^{85} \cdot 79 + 6723)$$

$$t^{4 - \log_y t} = y^2$$

$$t^{3 - \log_y t} = y^2$$

$$\begin{array}{r} 3^5 \\ 80 \\ \hline 6800 \\ 3 \\ \hline 3^5 \\ 40 \\ \hline 3560 \\ 121 \\ \hline 3681 \end{array}$$

$$t^4 = y^2 \cdot t^{\log_y t} \cdot t =$$

$$= y^2 \cdot y^{\log_y t}$$

$$\frac{t^4}{y^2} = t^{\frac{\log_y t}{\log_y y}} = t^{\log_y t}$$

$$t^4 = y^2 \cdot t^{\log_y t}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$t = -x : \quad \sim 3$$

$$\begin{cases} \left(\frac{t^4}{y^2}\right)^{\lg y} = t^{\lg(ty)} \\ 2y^2 + ty - t^2 + 4t - 2y = 0 \end{cases}$$

$$t^4 y^2 = 2y^3$$

$$\frac{t^4}{y^2} = t^{\frac{\lg(ty)}{\lg y}} = t^{\log_y ty}$$

$$t^4 = y^2 \cdot t^{\log_y ty} = t^{2\log_y t} \cdot t^{\log_y ty}$$

$$4 = 2\log_y t + \log_y ty = 2\log_y t + 1 + \log_y t$$

$$3 = 2a + \frac{1}{a} \quad a = \log_y t$$

$$0 = 2a^2 - 3a + 1$$

$$0 = (2a - 1)(a - 1)$$

$$\log_y t = 1 \rightarrow$$

$$\log_y t = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \log_y t$$

$$t = y$$

$$t^{\frac{1}{2}} = y \quad y^2 = t$$

$$y^2 + y - 4 = 0$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+16}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$0 = 2x - y^2 - 4x - 16 = 0$$

$$-x^2 - 6x - 8 = 0$$

$$x^2 + 6x + 8 = 0$$

$$x = -6 \pm \sqrt{36 - 16}$$

$$2 \cdot 4 - (-4) \cdot 2 - 16 + 16 - 16 =$$

$$= 8 + 8 - 16 + 16 - 16 = 0$$

$$2 \cdot 4 - 2x - x^2 - 4x - 16 = 0$$

$$-x^2 - 6x - 8 = 0$$

$$x^2 + 6x + 8 = 0$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{-6 \pm 2}{2} = -4; -2$$

$$\left(\frac{(-4)^4}{2^2} \right)^{\lg 2} = 4^{\lg 8}$$

$$64^{\lg 2} = 4^{\lg 8} = 4^3 \lg 2$$

$$\cos 7x + \cos 3x = \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x = \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cdot \cos 7x$$

$$\cos 5x =$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos \alpha - \sin \alpha = \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x}$$

$$\cos 7x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos 3x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 7x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin 3x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 10x$$

$$\left(\cos 7x \cdot \sin \frac{\pi}{4} - \sin 7x \cdot \cos \frac{\pi}{4} \right) + \left(\sin \frac{\pi}{4} \cos 3x - \cos \frac{\pi}{4} \cdot \sin 3x \right) = \cos 10x$$

$$(\sin \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) + \sin \left(\frac{\pi}{4} - 3x \right)) = \cos 10x$$

$$2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - 5x \right) \cdot \cos 2x$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~ 5

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6-y| = 12 \\ (|x-6|)^2 + (|y-8|)^2 = a \end{cases}$$

~ 2

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} (\cos 7x \cdot \cos 3x - \sin 7x \cdot \sin 3x) = \sin 7x + \sin 3x$$

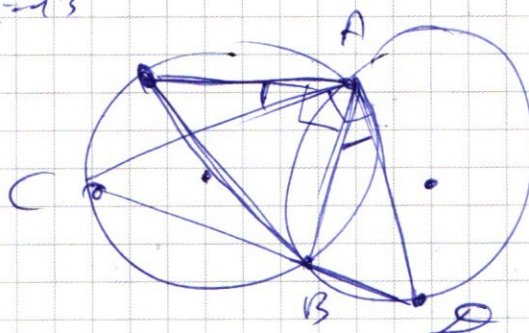
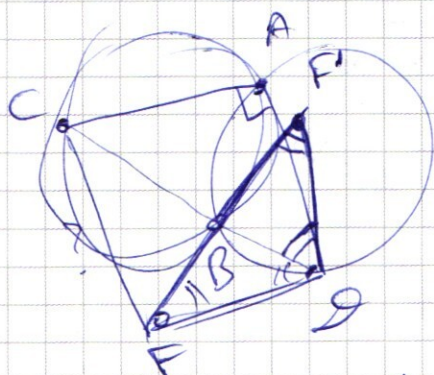
$$\sin 7x \cdot \sin 3x \cdot \sqrt{2} = \sin 7x + \sin 3x + \frac{1}{\sqrt{2}} =$$

$$-\left(\sqrt{2} \cdot \cos 7x \cdot \cos 3x - \cos 7x - \cos 3x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

$$\left(\frac{\sin 7x}{\cos 3x} \cdot \sqrt{2} - 1\right) (\sin 3x \cdot \sqrt{2} - 1) - (\cos 7x \cdot \sqrt{2} - 1) = 0$$

~ 6

R-13



$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right) \lg y = (-x) \lg(-x) + \lg y$$

$$\frac{x^4}{y^2} = (-x)^{1 + \frac{\lg(-x)}{\lg y}} = (-x)^{1 + \log_y(-x)}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases}$$

023: $y > 0$
 $-xy > 0$
 $-x > 0$
 $x < 0$

$$2y^2 - 8y + 8 - x^2 - 4x - 4 - 4 - xy = 0$$

$$2(y-2)^2 - (x+2)^2 - 4 - xy = 0$$

$$\begin{aligned} (x^4)^{\lg y} &= (y^2)^{\lg y} \cdot (-x)^{\lg(-x) + \lg y} = \\ &= (y^2 \cdot (-x)^{\lg(-x)})^{\lg y} \end{aligned}$$

$$\frac{\log_b a}{\log_b c} = \log_c a$$

$$x^4 = y^2 \cdot (-x)^{\lg(-x)}$$

$$\frac{x^4 \cdot (-x)^{-\lg(-x)}}{x^4 \cdot (-x)^{-\lg(-x)}} = y^2$$

$$\frac{x^2 \cdot (-x)^{-\frac{1}{2}\lg(-x)}}{x^2 \cdot (-x)^{-\frac{1}{2}\lg(-x)}} = y$$

$$a^{\log_b a} = a^{\frac{1}{\log_a b}} =$$

$$= a$$

$$2^{\log_8 2} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \lg(-x) &= \\ &= \lg((-x)^{-\frac{1}{2}}) = \\ &= \lg\left(\frac{1}{\sqrt{-x}}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= b^{\log_b a} \\ \left(b^{\log_b a}\right)^{\log_b a} &= \\ &= \left(\log_b a\right)^2 \end{aligned}$$

$$2 \cdot x^4 \cdot (-x)^{-\lg(-x)} - x \cdot x^2 \cdot (-x)^{-\frac{1}{2}\lg(-x)} - 3^{\log_9 3}$$

$$= x^2 - 4x - 8x^2(-x)^{-\frac{1}{2}\lg(-x)} = 0 \quad a =$$

$$x^4 = y^2 \cdot 10^{(\lg(-x))^2}$$

$$\begin{aligned} x^2 &= y \cdot 10^{\lg(-x)} = y \cdot (-x) \\ x &= -y \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a_1 \dots a_8$

— ?

~ 1

$$a_1 \dots a_8 = 16875 = 25 \cdot 675 =$$

$$= 25 \cdot 25 \cdot 27 =$$

$$= 5^4 \cdot 3^3$$

$$C_8^4 \cdot \left(C_4^1 + C_4^1 \cdot C_3^1 \right) =$$

$$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot (4 + 4 \cdot 3) =$$

$$= 70 \cdot 16 = 1120$$

$$\begin{array}{r} 16875 \quad | \quad 25 \\ - 150 \\ \hline 187 \\ - 175 \\ \hline 125 \\ - 125 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 16 \\ 70 \\ \hline 1120 \end{array}$$

Ответ: 1120

~ 2

$$\cos 4x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 4x + \sin 3x$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} =$$

$$= 2 \cdot \left(\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right) =$$

$$\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} + \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} =$$

$$= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

2 cos

$$\cos 4x + \cos 3x - \sqrt{2} (\cos 3x \cdot \cos 4x - \sin 3x \cdot \sin 4x) = \sin 4x + \sin 3x$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x - \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 2 \sin 5x \cdot \cos 2x$$

$$\sqrt{2} \cdot \cos 5x \cdot \cos 2x - \cos^2 5x + \sin^2 5x - \sqrt{2} \sin 5x \cdot \cos 2x = 0$$

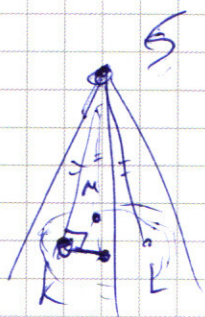
$$\cos 5x (\sqrt{2} \cos 2x - \cos 5x) = \sin 5x (\sqrt{2} \cos 2x - \sin 5x) = 0$$

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right) \lg y = (-x) \lg(-xy) \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 2y = 0 \end{cases}$$

$$x^4 \lg y$$

$$\left(y^2 - xy + \frac{x^2}{4}\right) - \left(\frac{1}{4}x^2 + y^2 - 4x - 2y\right) =$$

$$= \left(y - \frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}x^2 + 4x\right)$$

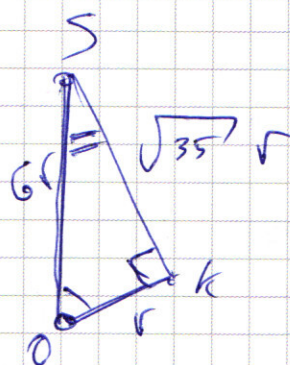
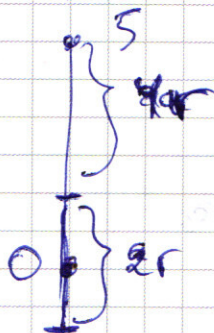


$$\frac{4}{5} = \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$\frac{4}{5} = \frac{4x}{5^2}$$

$$S = \frac{25}{4} = \left(6\frac{1}{4}\right)$$

$$\angle KSO, S \text{ center of } KLM.$$



$$\sin \angle KSO = \frac{r}{OS} = \frac{1}{6}$$

$$\angle KSO = \arcsin \frac{1}{6}$$

$$x \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \lg 0 \end{cases}$$

$$x = -y \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{x^4}{x^2}\right) \lg(-x) = (-x) \lg x^2 = (-x)^2 \lg(x) \end{cases}$$