

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФ:

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r|l}
 3375 & 5 \\
 675 & 5 \\
 135 & 5 \\
 27 & 3 \\
 9 & 3 \\
 3 & 3 \\
 1 &
 \end{array}$$

$$3375 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

✓

Если мы хотим составить из цифр 8-м значное число, то р-м 2 варианта;

$$1) 3375 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7$$

$$2) 3375 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$$

Поскольку произведение $3 \cdot 3$ даёт число меньше 10, следовательно рассматриваем всего 2 варианта;

1) Вариантов расставить 5-ки:

$$C_3^8$$

Расставить 7-ки:

$$C_2^{8-3} = C_2^5$$

Расставить 3-ки:

$$C_3^{5-2} = C_3^3$$

$$\begin{aligned}
 \text{Всего чисел: } C_3^8 \cdot C_2^5 \cdot C_3^3 &= \frac{8!}{5!3!} \cdot \frac{5!}{3!2!} \cdot \frac{3!}{3!0!} = \\
 &= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 1 = 8 \cdot 7 \cdot 10 = \\
 &= \underline{560}
 \end{aligned}$$

2) Вариантов расставить 5-ки:

$$C_3^8$$

Вариантов расставить 7-ки:

$$C_3^{8-3} = C_3^5$$

Расставить 3 и 9:

$$A_2^{5-3} = A_2^2$$

$$\begin{aligned}
 \text{Всего чисел: } C_3^8 \cdot C_3^5 \cdot A_2^2 &= \frac{8!}{5!3!} \cdot \frac{5!}{3!2!} \cdot \frac{2!}{0!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 2 = \\
 &= 8 \cdot 7 \cdot 20 = 1120
 \end{aligned}$$

Умнож, верно если из 1 и 2 вычитаем: $560 + 7720 = 7680$

Ответ: 7680

$$2. \cos 77x - \cos 3x - \sin 77x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 74x$$

$$(\cos 77x - \cos 3x) - (\sin 77x - \sin 3x) = \sqrt{2} \cos 74x$$

$$-2 \sin 7x \cdot \sin 4x - 2 \cdot \sin 4x \cdot \cos 7x = \sqrt{2} \cos 74x$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x)$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) (\cos 7x + \sin 7x)$$

$$\begin{cases} \sin 7x + \cos 7x = 0 \quad (?) \\ -2 \sin 4x = \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) \quad (?) \end{cases} \quad ; (\cos 7x + \sin 7x)$$

(1) $\sin 7x = -\cos 7x \quad | : \cos 7x, \cos 7x \neq 0$. И.К. если $\cos 7x = 0$, то $\sin 7x = 0$, что не может быть

$$\tan 7x = -1$$

$$7x = \frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{3\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}$$

(2) $-2 \sin 4x = \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) \quad | : 2$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 7x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 7x + \sin 4x = 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + 7x\right) = -\sin 4x \quad \text{верно} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{4} + 7x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ -4x = \frac{\pi}{4} + \pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x = \pi n \\ 4x = -\frac{\pi}{4} + \pi m \end{cases}$$

$$-5\pi n / 28 \text{ делится на } \pi \text{ и } \pi n$$

$$\begin{cases} x = \frac{7\pi n}{28} \\ x = -\frac{\pi(4m+1)}{28} \end{cases}$$

$$7\pi n = -4m - 1$$

$$7\pi n + 4m = -1$$

↑
целое ↑
целое

$$\begin{cases} x = \frac{\pi n}{7} \\ x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi m}{4} \end{cases}$$

$$\frac{\pi n}{7} = -\frac{\pi(4m+1)}{28}$$

$$\frac{n}{7} = -\frac{(4m+1)}{28}$$

$$16n = -28m - 7$$

$$44n = -7$$

$$n = -\frac{7}{44}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi n}{7} \\ x = -\frac{\pi(4m+1)}{28} \end{cases}$$

сложно
нельзя
при
n: 7

$\Rightarrow$ целое + целое = -1, что не может быть $\Rightarrow$ (2) не подходит

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\Rightarrow x = \frac{3\sqrt{7}}{28} + \frac{\sqrt{7}k}{7}$$

Ответ: $x = \frac{3\sqrt{7}}{28} + \frac{\sqrt{7}k}{7}, k \in \mathbb{Z}$

3.
$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2/\lg xy} & (1) \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 & (2) \end{cases}$$
 ОДЗ: $\begin{cases} x \neq 0 \\ x > 0 \\ xy > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

$$(2) \quad 3y^2 + 2xy - 12y + 4x - x^2 = 0$$

$$3y^2 + 2y(x-6) - x(x-4) = 0$$

Решим ур-не относительно y

$$\begin{aligned} D &= 4(x-6)^2 + 4x(x-4) \cdot 3 = 4x^2 - 48x + 144 + 12x^2 - 48x \\ &= 16x^2 - 96x + 144 = (4x - 12)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y = \frac{-2x + 12 - 4x + 12}{6} \\ y = \frac{-2x + 12 + 4x - 12}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x + 4 \\ y = \frac{x}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 - y \\ x = 3y \end{cases}$$

$$(1) \quad \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2/\lg xy}$$

$$\frac{y^{5/\lg x}}{x^{5/\lg x}} = y^{2/\lg x} \cdot y^{2/\lg y} \quad | : y^{2/\lg x} \neq 0$$

$$\frac{y^{3/\lg x}}{x^{5/\lg x}} = y^{2/\lg y}$$

$$\frac{y^{\lg x^3}}{x^{\lg x^5}} = y^{\lg y^2} \quad | : y^{\lg y^2} \neq 0$$

$$\frac{y^{\lg \frac{x^3}{y^2}}}{x^{\lg x^5}} = 1$$

$$y^{\lg \frac{x^3}{y^2}} = x^{\lg x^5}$$

Прологарифмируем обе части по основанию 10

$$\lg y \cdot \lg \frac{x^3}{y^2} = \lg x \cdot \lg x^5$$

$$\lg 5 (\lg x^3 - \lg 5^2) = \cancel{5} \lg^2 x$$

$$\lg 5 (3 \lg x - 2 \lg 5) = \cancel{5} \lg^2 x$$

$$\begin{cases} \lg x = a \\ \lg 5 = b \end{cases}$$

$$b (3a - 2b) = \cancel{5} a^2$$

$$5a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$$

$$(a - 2b)(a - b) = 0$$

$$\begin{cases} a = 2b \\ a = b \end{cases} \quad \text{Одр. значения:} \quad \begin{cases} \lg x = 2 \lg 5 \\ \lg x = \lg 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y^2 \\ x = y \end{cases}$$

$$u_2 (1) u (2) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = y^2 \\ x = 4 - y \\ x = y^2 \\ x = 3y \\ x = y \\ x = 4 - y \\ x = y \\ x = 3y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 = 4 - y \\ y^2 = 3y \\ y = 4 + y \\ y = 3y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 + y - 4 = 0 \\ y(y - 3) = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 = 4 - y \\ x = y^2 \\ y^2 = 3y \\ x = y^2 \\ y = 4 - y \\ x = y \\ y = 3y \\ x = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 + y - 4 = 0 \\ x = y^2 \\ y(y - 3) = 0 \\ x = y^2 \\ y = 2 \\ x = 2 \\ y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{1 + \sqrt{17}}{2} < 0 \Rightarrow \text{не явл. р. чн по } O \mathbb{R}_3 \\ x = \frac{18 - 2\sqrt{17}}{4} \\ y = \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \\ x = \frac{18 + 2\sqrt{17}}{4} \\ y = 0 = 0 \Rightarrow \text{не явл. р. чн по } O \mathbb{R}_3 \\ x = 0 = 0 \\ y = 3 \\ x = 9 \\ y = 2 \\ x = 2 \\ y = 0 = 0 \Rightarrow \text{не явл. р. чн по } O \mathbb{R}_3 \\ x = 0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \\ x = \frac{18 + 2\sqrt{17}}{4} \\ x = 9 \\ y = 3 \\ x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{18 + 2\sqrt{17}}{4}, \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \right), (9, 3), (2, 2)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5.
$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 & (1) \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = 9 & (2) \end{cases}$$

(1) а)
$$\begin{cases} y-3-x \geq 0 \\ y-3+x \geq 0 \\ \begin{cases} y \geq x+3 \\ y \geq -x+3 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y-3-x + y-3+x &= 6 \\ 2y &= 12 \\ y &= 6 \end{aligned}$$

б)
$$\begin{cases} y-3-x \geq 0 \\ y-3+x \leq 0 \\ \begin{cases} y \geq x+3 \\ y \leq -x+3 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y-3-x - y+3-x &= 6 \\ -2x &= 6 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

в)
$$\begin{cases} y-3-x \leq 0 \\ y-3+x \geq 0 \\ \begin{cases} y < x+3 \\ y \geq -x+3 \end{cases} \end{cases}$$

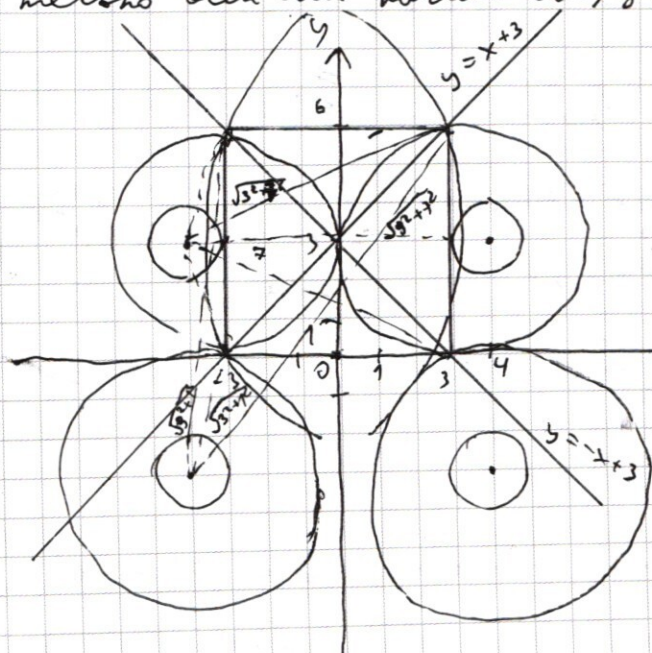
$$\begin{aligned} -y+3+x + y-3+x &= 6 \\ 2x &= 6 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

г)
$$\begin{cases} y-3-x < 0 \\ y-3+x < 0 \\ \begin{cases} y < x+3 \\ y < -x+3 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -y+3+x - y+3-x &= 6 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

(2) $(|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = 9$ — 4 окружности, симметричные

относительно осей или начала координат. Они симметричны, т.к. при разном раскрытии модулей получается только поворот угла, при этом получается симметрично относительно осей или начала координат.



Варианты	Количество
$\sqrt{a} < 1$	0
$\sqrt{a} = 1$	2
$1 < \sqrt{a} < \sqrt{3^2+7^2}$	4
$\sqrt{a} = \sqrt{3^2+7^2}$	6
$\sqrt{3^2+7^2} < \sqrt{a} < \sqrt{4^2+9^2}$	8
$\sqrt{a} = \sqrt{4^2+9^2}$	6
$\sqrt{4^2+9^2} < \sqrt{a} < \sqrt{3^2+7^2}$	12
$\sqrt{a} = \sqrt{3^2+7^2}$	8
$\sqrt{3^2+7^2} < \sqrt{a} < \sqrt{4^2+9^2}$	4
$\sqrt{a} = \sqrt{4^2+9^2}$	4
$\sqrt{4^2+9^2} < \sqrt{a} < \sqrt{3^2+7^2}$	4
$\sqrt{a} = \sqrt{3^2+7^2}$	2
$\sqrt{a} > \sqrt{3^2+7^2}$	0

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$1. \begin{array}{l} 3375 \\ 675 \\ 135 \\ 27 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{array} \right.$$

$$C_8^8 \cdot 8!$$

$$A_3^8 \cdot A_3^5 \cdot A_2^2$$

$$123 \dots$$

$$\begin{array}{l} 555 \dots \\ 555 \dots \\ 555 \dots \\ 555 \dots \\ 555 \dots \\ 555 \dots \\ 555 \dots \\ 555 \dots \\ 555 \dots \\ 555 \dots \end{array}$$

$$\frac{5 \cdot 4}{2}$$

$$A_3^5$$

$$10$$

$$2 +$$

$$1) 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1$$

$$2) 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7$$

$$1) A_4^3 + A_3^3 + A_2^2$$

$$\begin{array}{l} 555 \\ 555 \\ 555 \\ 555 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} 55533 \\ 55533 \\ 53353 \\ 53353 \\ 33555 \\ 33555 \\ 35533 \\ 35533 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 8 \\ 8 \\ 8 \\ 8 \\ 8 \\ 8 \\ 8 \\ 8 \end{array} \right.$$

$$A_4^4 = \frac{4!}{3!}$$

$$A_4^4 = \frac{4!}{3!}$$

$$A_4^4 + A_2^2 = 4 \cdot 3 + 4$$

$$\begin{array}{l} 55539777 \\ 53977755 \end{array}$$

$$24 \cdot 30 = 720$$

$$1234 \quad (2+16) \cdot 9$$

$$12 \cdot 36$$

$$C_2^4 \cdot A_2^2$$

$$= \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6 \cdot 2 = 12$$

$$1) C_3^8 \cdot C_3^5 \cdot A_2^2 = \frac{8!}{5!3!} \cdot \frac{5!}{3!2!} \cdot 2!$$

$$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 2 = 20 \cdot 56 = 1120$$

$$2) C_3^8 \cdot C_3^5 \cdot C_2^2 = \frac{8!}{3!5!} \cdot \frac{5!}{3!2!} \cdot 1 = 560$$

$$81+9$$

$$130$$

$$32 \cdot 77$$

$$27(7+263)$$

$$5 > 2$$

$$5 \leq 3$$

$$2^5 + 2^4 = 32 + 16 = 48$$

$$1680$$

$$24$$

$$11$$

$$3+5+4+6 \cdot 2 = 23 \quad 35$$

$$\cos 2x = \sin 3$$

$$\cos 3x = \cos x$$

$$\cos 3x = \sin x$$

$$x = \frac{\pi}{2} + x = -\sin 2x$$

$$\frac{\pi}{2} + x = \frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$-2x = \frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$x = -\frac{\pi}{8} + \pi n$$

$$x = -\frac{\pi}{8} - \frac{\pi n}{2}$$

$$A_4^4 = \frac{4!}{3!} = \frac{24}{6} = 4$$

$$A_4^4 = \frac{4!}{3!} = \frac{24}{6} = 4$$

$$A_4^4 = \frac{4!}{3!} = \frac{24}{6} = 4$$

$$A_4^4 = \frac{4!}{3!} = \frac{24}{6} = 4$$

$$A_4^4 = \frac{4!}{3!} = \frac{24}{6} = 4$$

$$A_4^4 = \frac{4!}{3!} = \frac{24}{6} = 4$$

$$A_4^4 = \frac{4!}{3!} = \frac{24}{6} = 4$$

$$A_4^4 = \frac{4!}{3!} = \frac{24}{6} = 4$$

$$A_4^4 = \frac{4!}{3!} = \frac{24}{6} = 4$$

$$A_4^4 = \frac{4!}{3!} = \frac{24}{6} = 4$$

$$A_4^4 = \frac{4!}{3!} = \frac{24}{6} = 4$$

$$A_4^4 = \frac{4!}{3!} = \frac{24}{6} = 4$$

$$A_4^4 = \frac{4!}{3!} = \frac{24}{6} = 4$$

$$A_4^4 = \frac{4!}{3!} = \frac{24}{6} = 4$$

$$A_4^4 = \frac{4!}{3!} = \frac{24}{6} = 4$$

$$A_4^4 = \frac{4!}{3!} = \frac{24}{6} = 4$$

$$A_4^4 = \frac{4!}{3!} = \frac{24}{6} = 4$$

$$A_4^4 = \frac{4!}{3!} = \frac{24}{6} = 4$$

$$A_4^4 = \frac{4!}{3!} = \frac{24}{6} = 4$$

$$A_4^4 = \frac{4!}{3!} = \frac{24}{6} = 4$$

$$A_4^4 = \frac{4!}{3!} = \frac{24}{6} = 4$$

$$A_4^4 = \frac{4!}{3!} = \frac{24}{6} = 4$$

$$A_4^4 = \frac{4!}{3!} = \frac{24}{6} = 4$$

$$A_4^4 = \frac{4!}{3!} = \frac{24}{6} = 4$$

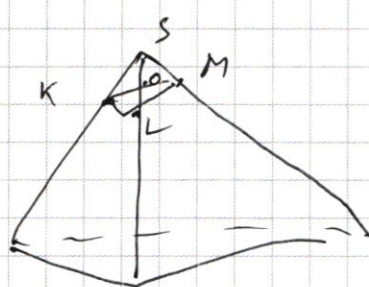
$$A_4^4 = \frac{4!}{3!} = \frac{24}{6} = 4$$

$$A_4^4 = \frac{4!}{3!} = \frac{24}{6} = 4$$

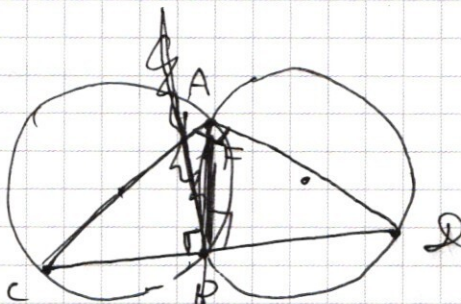
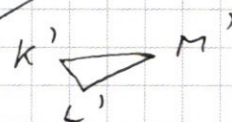
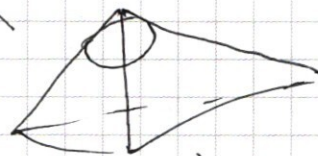
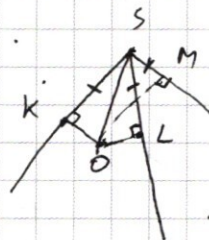
$$A_4^4 = \frac{4!}{3!} = \frac{24}{6} = 4$$

$$A_4^4 = \frac{4!}{3!} = \frac{24}{6} = 4$$

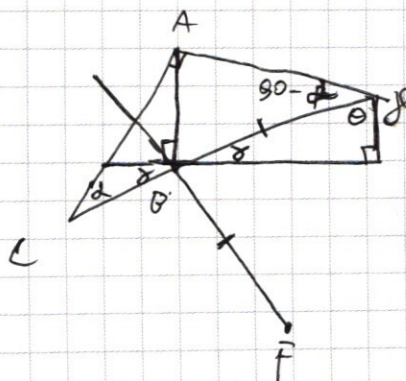
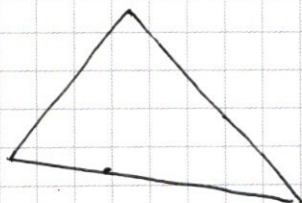
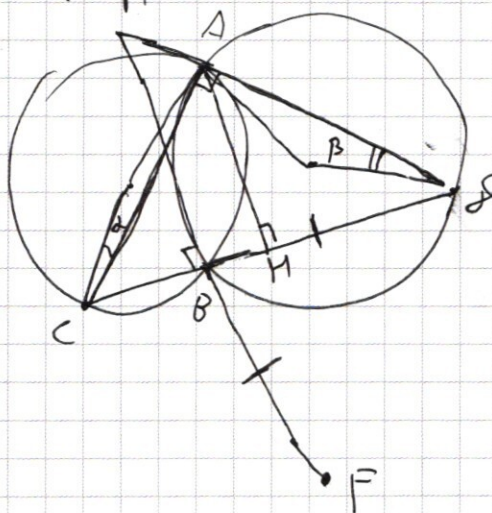
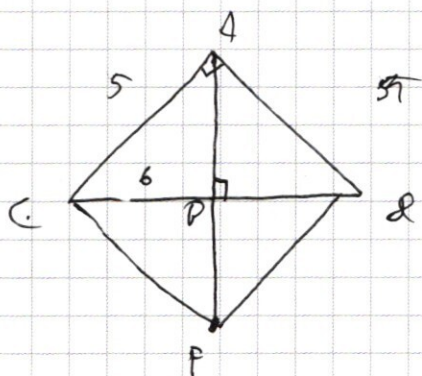
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



а)



$$\frac{AH}{BM} = \frac{DM}{BP}$$



$$\Rightarrow SK'M'L' = K'O' \cdot O'L' \cdot \cancel{S \cdot K} \cdot \cancel{L} \cdot K'O'$$

$$\Rightarrow \text{так } \frac{SK'L'M'}{SK''L''M''} = \frac{1}{4}, \text{ но } \frac{K'O'}{K''O''} = \frac{O'L'}{O''L''} = \frac{M'O'}{M''O''} = \frac{1}{4}$$

$$\Delta SK'O' \sim \Delta SK''O'' \text{ , так как } K'O' \parallel K''O'' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{SO'}{SO''} = \frac{1}{4} \quad \Delta SK'O' \sim \Delta SKO \Rightarrow \frac{SO'}{SK} = \frac{SO''}{SK''} \Rightarrow \frac{SO''}{SK} =$$

$$\frac{SO'}{SO''} = x \cdot \frac{SK}{SK''}$$

$$\frac{SO'}{SO''} = \frac{1}{4}$$

$$x \cdot SK = \frac{SO''}{4}$$

$$\frac{SO''}{SK} = 4x$$

$$\frac{SO''}{SK} = \frac{K''O''}{KO} = \frac{4K'O'}{KO} = 4$$

$$\Rightarrow x = 1$$

$$\Rightarrow \frac{SO'}{SK} = \frac{SO''}{SK''} \Rightarrow \Delta SK'O' = \Delta SKO$$

$$\Rightarrow SO' = SK, K'O' = KO, SK' = SO$$

$$\Rightarrow \angle C(KML) =$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ч. 10; Р) - сфера

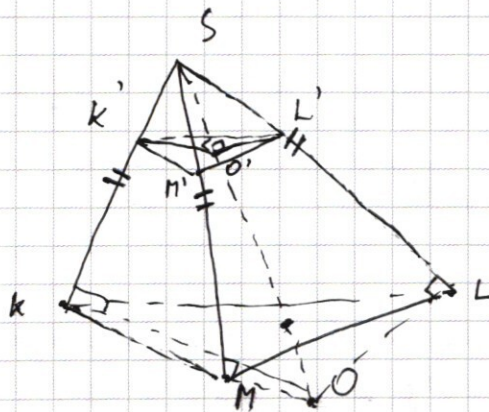
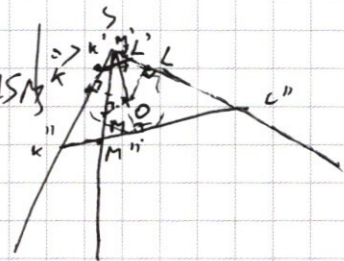
Ф впис. в 3^x гранного угла с вершиной S и кас. трассей в точ.
кон K, L, M (все м. угла разнотипны). ~~Показать~~ $\angle KSO$

S_{KLM} $S_{K'L'M'} = 7$, где $K'L'M'$ - сечение 3^x гранного угла, кас.
 $S_{K''L''M''} = 4$ сферы и $\perp SO$ в верхней точке
 $K''L''M''$ - сечение 3^x гранного угла, кас.
сферы и $\perp SO$ в нижней точке

Н-ти:
 $S_{KLM} = ?$
 $\angle KSO = ?$

Действие:

1) $OK = OM = OL = R$
 $OK \perp SK, OL \perp SL, OM \perp SM$
 $\Rightarrow \triangle SKO = \triangle SLO = \triangle SMO \Rightarrow$
 $\Rightarrow SK = SM = SL$



Выберем точку O' на
 SO такую, что $O' \in (K'L'M')$
при этом $K'O' \perp SO, L'O' \perp SO$
 $(K'O' \perp SO, L'O' \perp SO) \Rightarrow (K'M'L') \perp SO$
 $\Rightarrow (K'M'L') \perp SO$
 $S_{K'M'L'} = 7$ (по 2м.)

Т-м $\triangle SK'O'$ и $\triangle SKO$: $\triangle SK'O' \sim \triangle SKO$ (по 2м углам:
 $\angle SK'O' = \angle KSO$ - общий, $\angle SO'K' = 90^\circ = \angle SKO$)

$$\frac{SO'}{SK} = \frac{SK'}{SO} = \frac{K'O'}{KO} = x$$

Выберем точку O'' на SO такую, что $O'' \in (K''L''M'')$,

при этом $K''O'' \perp SO, L''O'' \perp SO \Rightarrow (K''M''L'') \perp SO \Rightarrow$
 $\Rightarrow (K''M''L'') \perp SO$ (по 2м.) $S_{K''M''L''} = 4$

$(K'M'L') \perp SO$
 $(K''M''L'') \perp SO \Rightarrow (K'M'L') \parallel (K''M''L'') \Rightarrow$
 $\Rightarrow \triangle K'M'L' \sim \triangle K''M''L''$

Умова, при $x \in [6; 70]$ пер-во вимірювання

$$m(x) = 2^x + 3 \cdot 2^{65} \rightarrow \text{при } x \in [6; 70]$$

$$h(x) = 70 + (2^{64} - 1)x \rightarrow \text{при } x \in [6; 70]$$

Розглянемо $x = 6$

$$\begin{cases} y > 64 + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 64 + 2^{64} \cdot 6 \end{cases} \text{ не } \text{верно.}$$

Розглянемо $x = 7$

$$\begin{cases} y > 728 + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 63 + 2^{64} \cdot 7 \end{cases} \quad \begin{cases} y > 728 + 6 \cdot 2^{64} \\ y \leq 63 + 7 \cdot 2^{64} \end{cases} \quad \begin{cases} y > 728 + 6 \cdot 2^{64} \\ y \leq 63 + 6 \cdot 2^{64} + 2^{64} \end{cases}$$

Замітимо, що $m(7) < h(7) \Rightarrow m(x) < h(x)$ при
 кожному $x \in [7; 70]$, т.к. $m(x) \uparrow$ і $h(x) \uparrow$ на
 при $x \in [7; 70] \Rightarrow$ при $x \in [7; 70]$ менше менше р-ми

При $x = 7$ кал-во р-ми:

$$\text{кал-во р-ми при } x \in [7; 70]: 70 - 2^7 + 3 \cdot 2^{65} = 7$$

$$\text{При } x = 7 \text{ кал-во р-ми: } 70 + 2^{64} \cdot 7 - 7 - 2^7 = 3 \cdot 2^{65} =$$

$$= 63 + 2^{64} - 7 = 63 - 3 \cdot 2^{65} + 2^{64} \cdot 7 - 2^7$$

$$\text{При } x = 70 \text{ кал-во р-ми: } 63 - 3 \cdot 2^{65} + 2^{64} \cdot x - 2^x$$

Знаючи кал-во р-ми при $x \in [7; 70]$ сформулюємо

$$\text{формулу так: } 64(63 - 3 \cdot 2^{65}) + 2^{64}(7 + \dots + 70) - 2^7 - 2^8 - \dots - 2^{70}$$

$$= 64 \cdot 63 - 64 \cdot 3 \cdot 2^{71} + 32 \cdot 77 \cdot 2^{69} - (2^{70} - 1) - 1 - 2 - \dots - 64$$

$$= 64 \cdot 63 - 3 \cdot 2^{71} + 77 \cdot 2^{69} - 2^{70} - 126 =$$

$$= 64 \cdot 63 - 63 \cdot 2 + 2^{69}(77 - 2 - 6) = 62 \cdot 63 + 2^{69} \cdot 69$$

$$\text{Відемо: } 62 \cdot 63 + 2^{69} \cdot 69$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg x y}$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$x^2 - 2x(y-2) - 3y(y-4) = 0$$

$$D = 4(y-2)^2 + 12y(y-4) = 4y^2 - 16y + 16 + 12y^2 - 48y$$

$$4y^2 - 16y + 16 + 12y^2 - 48y$$

$$16y^2 - 64y + 16 = 16(y^2 - 4y + 1)$$

$$-3y^2 + 2(6y - 2)x$$

$$3y^2 + 2xy - 12y + 4x - x^2 = 0$$

$$3y^2 + 2y(x-6) - x(x-4) = 0$$

$$D = 4(x-6)^2 + 4x(x-4) \cdot 3$$

$$4x^2 - 48x + 744 + 12x^2 - 48x$$

$$16x^2 - 96x + 744 = (4x - 12)^2$$

$$\begin{cases} y = \frac{-2(x-6) - 4x + 12}{6} \\ y = \frac{-2(x-6) + 4x - 12}{6} \end{cases} \begin{cases} y = -x + 4 \\ y = \frac{x}{3} \end{cases}$$

$$1) y = -x + 4 \quad x = 4 - y$$

$$\left(\frac{y^5}{4-y}\right)^{\lg(4-y)} = y^{2 \lg(4-y)y}$$

$$\frac{y^{5 \lg(4-y)}}{(4-y)^{10 \lg(4-y)}} = y^{2 \lg 5 + 2 \lg(4-y)}$$

$$\lg(4-y) = t$$

$$\frac{y^{5t}}{(4-y)^t} = y^{2 \lg 5} \cdot y^{2t}$$

$$\frac{y^{5t}}{(4-y)^t} = (y^2)^t$$

$$\frac{y^{5 \lg 4 - 5}}{(y^{\lg 5})^2}$$

$$\begin{aligned} 0.93: & x \neq 0 \\ & x > 0 \\ & xy > 0 \\ & y > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1^x &= 1 \\ 1^x \cdot \ln 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y - 3 - x + y - 3 + x = 6 \end{cases}$$

$$\frac{y^{5 \lg x}}{x^{5 \lg x}} = y^{2 \lg x} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

$$\frac{y^{3 \lg x}}{x^{5 \lg x}} = y^{2 \lg y}$$

$$\frac{2^x}{\ln 2}$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{65} \leq 70 + (2^{64} - 1)x$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{65} \leq 70 + 2^{64}x - x$$

$$2^x + 2^{64}(6 - x) \leq 70 - x$$

$$\frac{y^{\lg \frac{x^3}{y^2}}}{x^{5 \lg x}} = 1$$

$$y^{\lg \frac{x^3}{y^2}} = x^{\lg x^5}$$

$$\lg y \cdot \lg y \cdot \lg \frac{x^3}{y^2} = \lg x \cdot \lg x^5$$

$$\lg y \cdot \lg \frac{1}{x^2 y^2} = \lg x$$

$$\begin{aligned} 2^x + 2^{64}(6 - x) &= \\ = 2^x \cdot \ln 2 + 2^{64} & \\ 2^x \cdot \ln 2 - 2^{64} & \end{aligned}$$

$$2^x \cdot \ln 2 > 2^{64}$$

$$\lg 4 - \lg$$

$$\lg(-x+4) \cdot \lg \frac{x^3}{(x-4)^2} = \lg x \cdot \lg x^5$$

$$= 64 \lg 2 \quad \lg(2^x \cdot \ln 2) = x \lg 2 + \lg \ln 2$$

$$\frac{y^{\lg x^3}}{y^{\lg y^2}} = \frac{2^x}{\ln 2}$$

$$\lg x^3 - \lg y^2$$

$$\frac{2^x}{\ln 2}$$

$$\frac{2^x}{\ln 2}$$

$$-2^{64}$$

$$\lg(-x+4) \cdot (3 \lg x - 2 \lg(-x+4))$$

$$= 5 \lg^2 x$$

$$\lg \frac{x^3}{y^2}$$

$$\frac{3^x}{\ln 0.5}$$

$$\frac{0.5^x}{\ln 0.5} > 0$$

$$\begin{aligned} \lg(-x+4) &= a \\ \lg x &= b \end{aligned}$$

$$x \geq 64$$

$$x \leq$$

$$D = 9a^2 - 4a^2$$

$$64 \leq 64$$

$$y > 64 + 3 \cdot 2^{65}$$

$$y \leq 70 + 2^{64} - 64$$

$$y > 2^6 (1 + 3 \cdot 2^{59})$$

$$y \leq 2^{70} + 6$$

$$a(3b - 2a) = 5b^2$$

$$5b^2 - 3ab + 2a^2 = 0$$

$$3b^2 - 3ab + 2b^2 + 2a^2 = 0$$

$$3b(b-a) + 2(b-a)(b+a) = 0$$

$$(b-a)(5b+2a) = 0$$

$$(b-a)(5b+2a) = 0$$

$$3 \quad 8$$

$$4+4+4$$