

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА'

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

11.

Разобьем число 16875 на простые множители

$$16875 = 5^4 \cdot 3^3$$

Значит необходимые нам числа могут быть представлены с помощью цифр:

1) 5 5 5 5 3 3 3 1

2) 5 5 5 5 3 3 1

для первого случая:

$$n_1 = \frac{8!}{4! 3! 1!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{6} = 280$$

для второго:

$$n_2 = \frac{8!}{4! 2! 1! 1!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2} = 840$$

$$\text{всего } n = n_1 + n_2 = 280 + 840 = 1120$$

Ответ: 1120

2.

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2 \cdot \cos 5x \cdot \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2} \cos 10x = 0$$

$$2 \cos(2x) (\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 0$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x) = 0$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) (2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)) = 0$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) (2 \cos 2x - 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x \right)) = 0$$

$$2 (\cos 5x - \sin 5x) \left(\cos 2x - \left(\cos \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) \right) \right) = 0$$

$$2 (\cos 5x - \sin 5x) \cdot (-2) \left(\sin \frac{2x + 5x - \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \sin \frac{2x - 5x + \frac{\pi}{4}}{2} \right) = 0$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) \sin \left(-1,5x + \frac{\pi}{8} \right) \cdot \sin \left(3,5x - \frac{\pi}{8} \right) = 0$$

$$1) \cos 5x - \sin 5x = 0$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$2) -1,5x + \frac{\pi}{8} = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$1,5x = \frac{\pi}{8} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

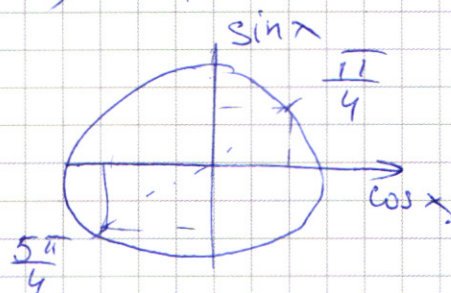
$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$3) 3,5x - \frac{\pi}{8} = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$3,5x = \frac{\pi}{8} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7}, k \in \mathbb{Z}$$



$$\int \left(\frac{x^4}{y^2} \right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-x)}$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 2(y^2 - 4y + 4) - 8 - (x^2 + 4x + 4) + 4 - xy = 0$$

Q3:

$$y > 0$$

$$-x > 0 \Rightarrow x < 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2(y-2)^2 - (x+2)^2 - (4+xy) = 0.$$

$$y = 2$$

$$x = -2$$

$$\Rightarrow xy = -4.$$

проверим:

$$\left(\frac{16}{4}\right)^{\lg 2} = (2)^{\lg 4}$$

$$4^{\lg 2} = 2^{\lg 4}$$

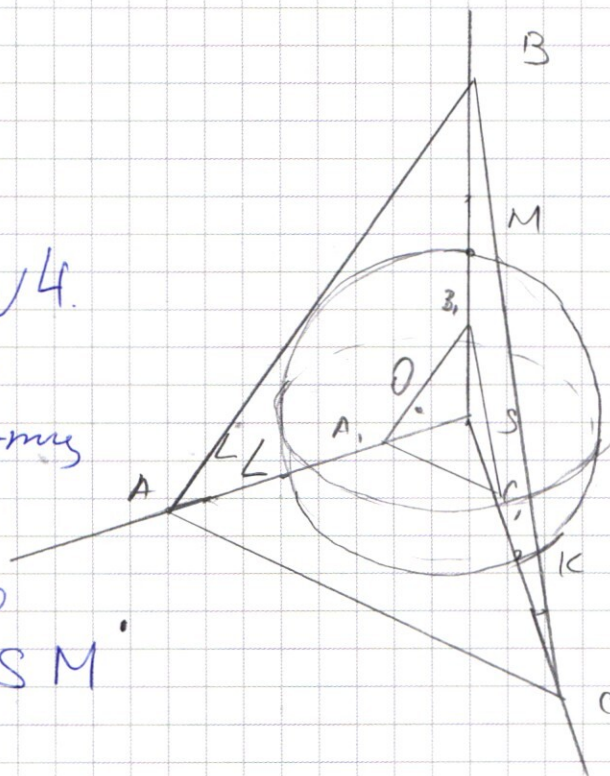
$$2^{2 \lg 2} = 2^{\lg 4}$$

$$2^{\lg 4} = 2^{\lg 4}$$

больше решений
нет

Ответ: $(-2; 2)$

н.к. SK, SL, SM —
касательные к окружности
проведённые из
одной точки, то
 $SK = SL = SM$



Плоскости сечений (ABC) и $(A_1B_1C_1)$
 перпендикулярны одной прямой $\Rightarrow AB \parallel A_1B_1, BC \parallel B_1C_1,$
 $AC \parallel A_1C_1,$

Значит $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ подобны.

$$k_{\text{подобия}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}.$$

Рассмотрим пирамиду $SABC$

SH - высота

SH_1 - высота $SA_1B_1C_1$

из подобия:

$$\frac{SH}{SH_1} = 1,5.$$

$$H, H_1 = 2r$$

r - радиус окр-ти.

$$SH = (SH_1 - 2r) \cdot 1,5.$$

$$3r = 0,5SH.$$

$$r = \frac{SH}{6}.$$

$$SO = r + SH_1 = \frac{2SH}{3} + \frac{SH}{6} = \frac{5SH}{6}.$$

т.к. SK - касат. то $OK \perp SK$

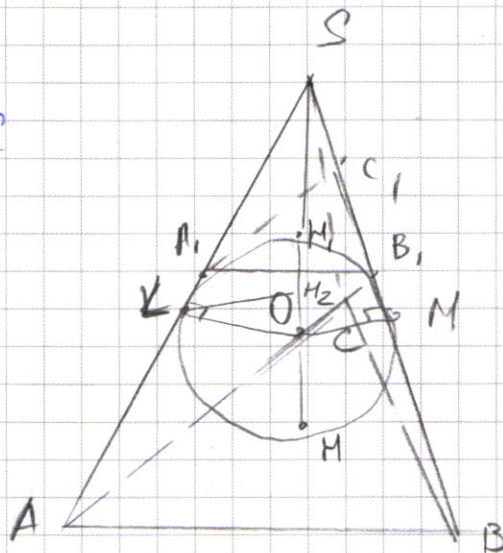
$$OK \perp SK$$

$$\sin(\angle KSO) = \frac{OK}{SO} = \frac{\frac{SH}{6}}{\frac{5SH}{6}} = \frac{1}{5}$$

$$\angle KSO = \arcsin\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$\text{проведем } LH_2; \sin \angle LCO = \sqrt{1 - \frac{1}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$LH_2 = r \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5} = \frac{SH}{6} \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5} = \frac{SH \cdot \sqrt{6}}{15}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\angle LCO = 2 \angle SLO$$

$$SH_2 = LH_2 \cdot \operatorname{tg} \angle LCO = \frac{8\sqrt{6}}{15} \cdot \frac{2\sqrt{6}}{1} = \frac{8\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{6}}{15} = \frac{8 \cdot 12}{15} = 0,8SH$$

$$k_2 = \left(\frac{0,8 SH}{SH} \right) = 0,8.$$

$$\frac{S_{KLM}}{S_{ABC}} = k^2 = \frac{16}{25}.$$

$$S_{KLM} = \frac{9 \cdot 16}{25} = \frac{144}{25}$$

$$\text{ответ: } \arcsin\left(\frac{1}{5}\right); \frac{144}{25}.$$

№5

$$|x-6-y| + |x-6+y| = 12$$

$$\left[(|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 \right] = a$$

$$1) \begin{cases} x-6-y > 0 \\ y < x-6 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x-6-y < 0 \\ y > x-6 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x-6+y > 0 \\ y > 6-x \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x-6+y < 0 \\ y < 6-x \end{cases}$$

$$1) \begin{cases} y < x-6 \\ y > 6-x \end{cases}$$

$$x = 12$$

$$3) \begin{cases} y > x-6 \\ y < 6-x \\ x = 0 \end{cases}$$

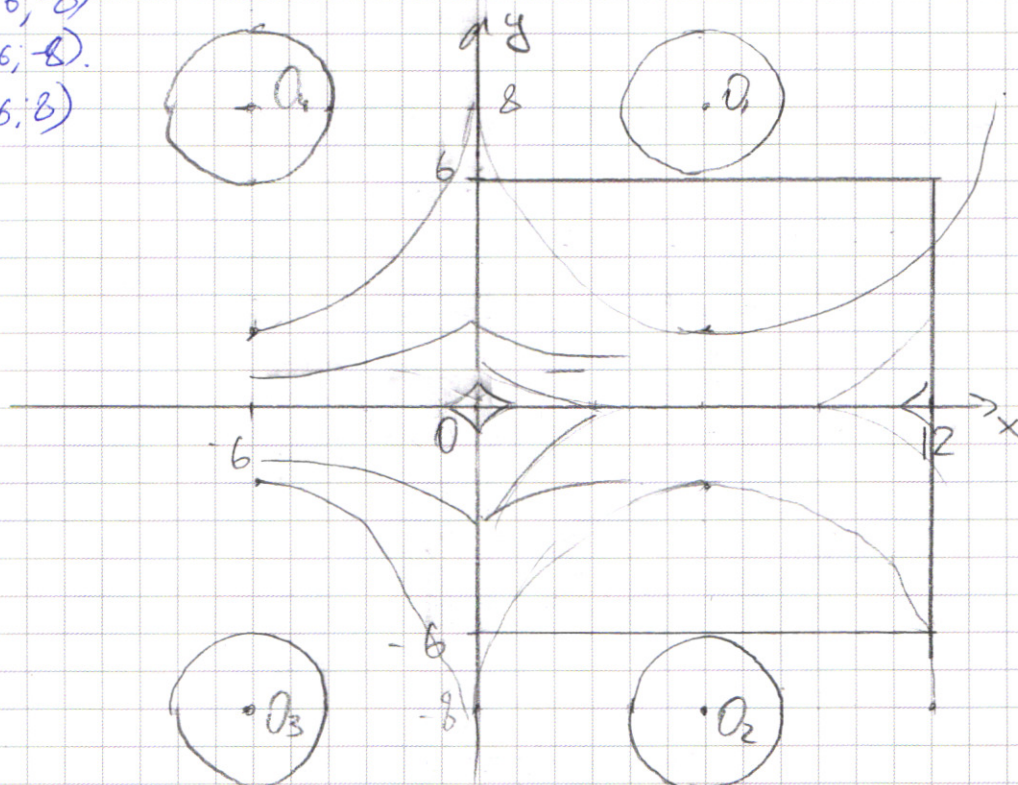
$$2) \begin{cases} y < x-6 \\ y < 6-x \end{cases}$$

$$y = -6$$

$$4) \begin{cases} y > x-6 \\ y > 6-x \end{cases}$$

$$y = 6.$$

$x > 0; y > 0 \quad O_1(6; 8)$
 $x > 0; y < 0 \quad O_2(6; -8)$
 $x < 0; y < 0 \quad O_3(-6; -8)$
 $x < 0; y > 0 \quad O_4(-6; 8)$



1 случай:

радиус окружностей $r = 2$. $r = 8 - 6$.

$a = r^2 = 4$; 2 окр-ти касаются сторон квадрата.

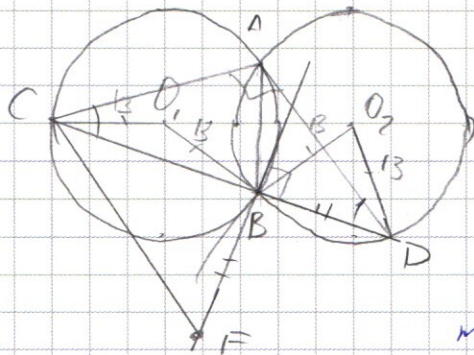
Далее окружности после достижения $a = 36$ начнут «сбиваться» на границы O_x и O_y и будет иметь больше двух решений.

В момент, когда все 4 окр-ти касаются в точке O $r = \sqrt{36 + 64} = 10$, ок-ть O_1 и O_2 тоже касаются в точке $(12; 0)$ и сис-ма будет иметь ровно 2 решения.

Ответ: $a = 4; a = 100$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

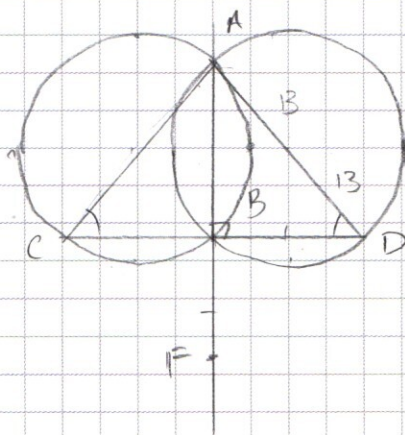
6.



$$\angle ACB = \angle ADB = 45^\circ$$

м.к. отрезка AB.

CF - ?



$$BF = BD =$$

$$= 26 \cdot \cos 45^\circ = 13\sqrt{2}.$$

$$\begin{array}{r} 169 \\ \times 2 \\ \hline 338 \end{array}$$

$$AB = 13\sqrt{2}$$

$$AB^2 = AD^2 + y^2 - 2 \cdot AD \cdot y \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

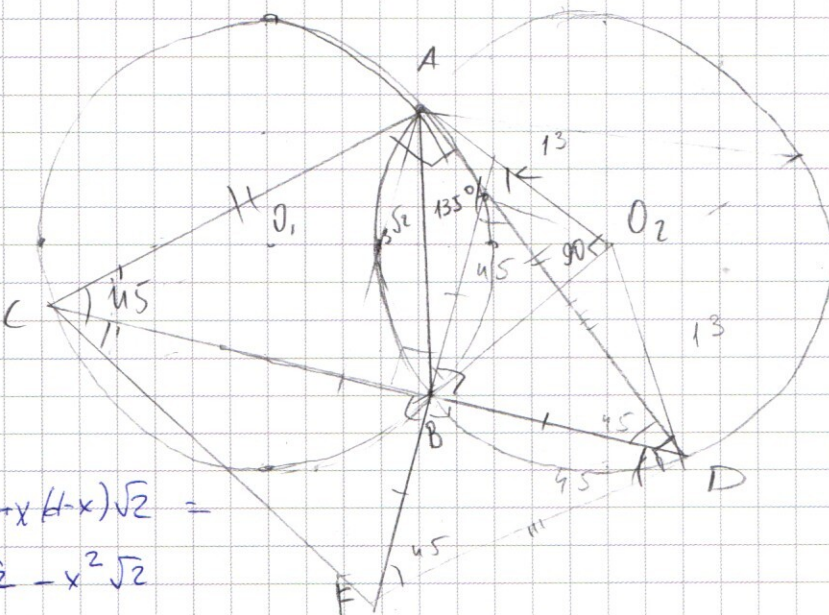
$$AB^2 = x^2 + y^2 + 2xy \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y = AD - x \cdot \sqrt{2}.$$

$$338 = d^2 + x^2 + \sqrt{2}xd$$

$$338 = x^2 + d^2 + 2x^2 - 2dx\sqrt{2} - x(d-x)\sqrt{2} =$$

$$= 3x^2 + d^2 - dx\sqrt{2} - x^2\sqrt{2}$$



☐ черновик

☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 7

(Нумеровать только чистовики)

$$d^2 + x^2 - \sqrt{2} \times d = 338$$

$$d^2 + 3x^2 - x\sqrt{2}d - x^2\sqrt{2} = 338$$

$$2d^2 + 4x^2 - x^2\sqrt{2} = 338$$

$$x^2(4 - \sqrt{2}) = \underline{\underline{338 - 2d^2}}$$

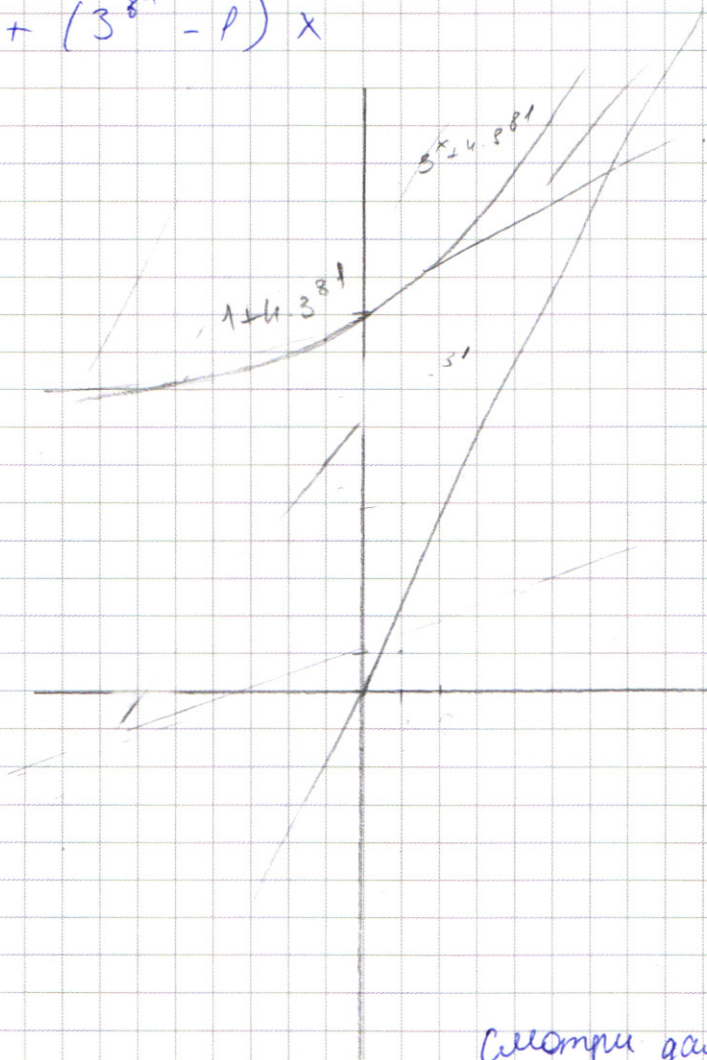
7.

$$y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{x/2}$$

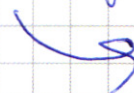
$$y < 85 + (3^{x/2} - 1) \cdot x$$

$$y = x^2 + 5$$

0.



смотри далее.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7.

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

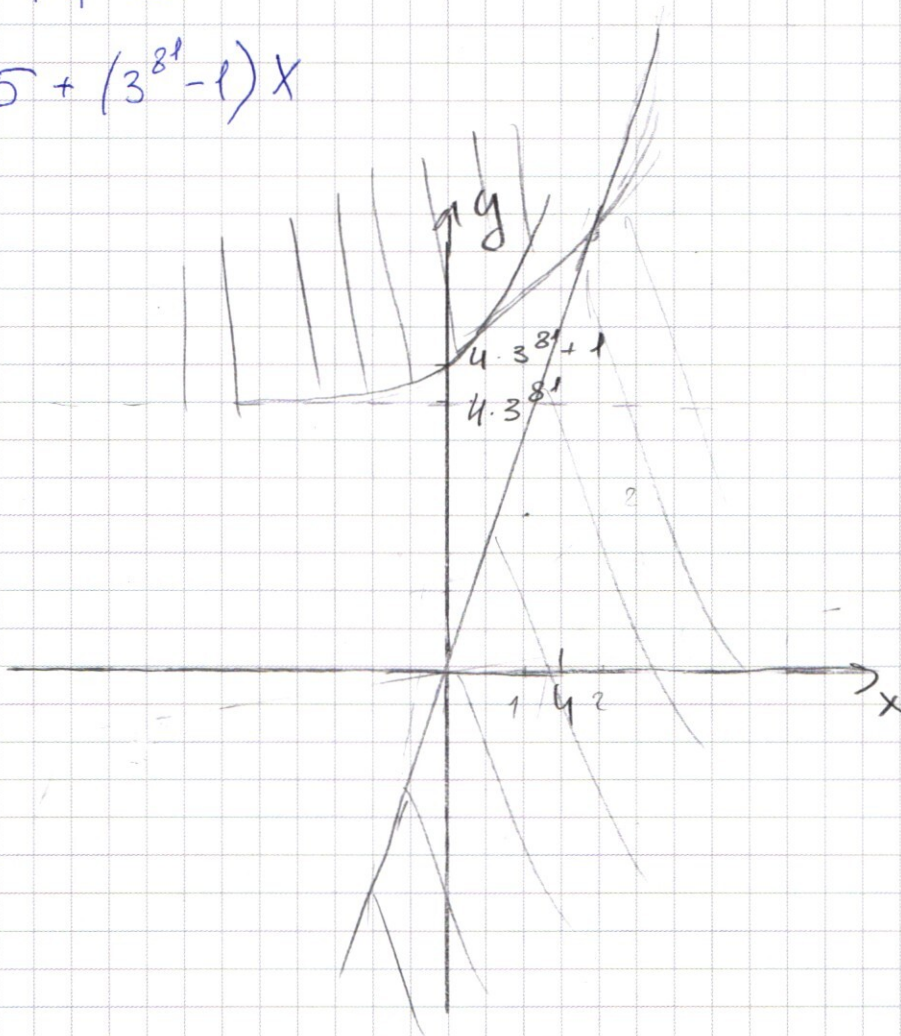


график ф-ии $y = 3^x + 4 \cdot 3^{81}$ - график 3^x ,
сместенный на $4 \cdot 3^{81}$ вверх; горизонтальная
асимптота - $y = 4 \cdot 3^{81}$
график $y = (3^{81} - 1)x + 85$ - прямая и пересекает
график не более, чем в 2-ух точках.

$$3^x + 4 \cdot 3^{81} = 85 + (3^{81} - 1) \cdot x$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{81} = 85 + x \cdot 3^{81} - x$$

$$x = 4$$

$$81 + 4 \cdot 3^{81} = 85 - 4 + 4 \cdot 3^{81}$$

$$f(x) = 3^x + 4 \cdot 3^{81}$$

$$g(x) = 85 + (3^{81} - 1) \cdot x$$

в точке $x = 5$

$$f(5) = 3^5 + 4 \cdot 3^{81} = 243 + 4 \cdot 3^{81}$$

$$g(5) = 85 + 5 \cdot 3^{81} - 5 = 5 \cdot 3^{81} + 80 = 4 \cdot 3^{81} + 3^{81} + 80$$

$$g(5) > f(5)$$

$$x = 6$$

$$f(6) = 3^6 + 4 \cdot 3^{81}$$

$$g(6) = 6 \cdot 3^{81} + 79 = 4 \cdot 3^{81} + 2 \cdot 3^{81} + 79$$

$$g(6) > f(6)$$

$$x = 81$$

$$f(81) = 3^{81} + 4 \cdot 3^{81} = 5 \cdot 3^{81}$$

$$g(81) = 85 - 81 + 81 \cdot 3^{81} = 81 \cdot 3^{81} + 4$$

$$g(81) > f(81)$$

на число больше?

$$x = 3^6$$

$$f = 3^{81 \cdot 9} + 4 \cdot 3^{81} = 3^9 \cdot 3^{81} + 4 \cdot 3^{81}$$

$$g = 3^6 \cdot 3^{81} - 3^6 + 85 \quad f > g$$



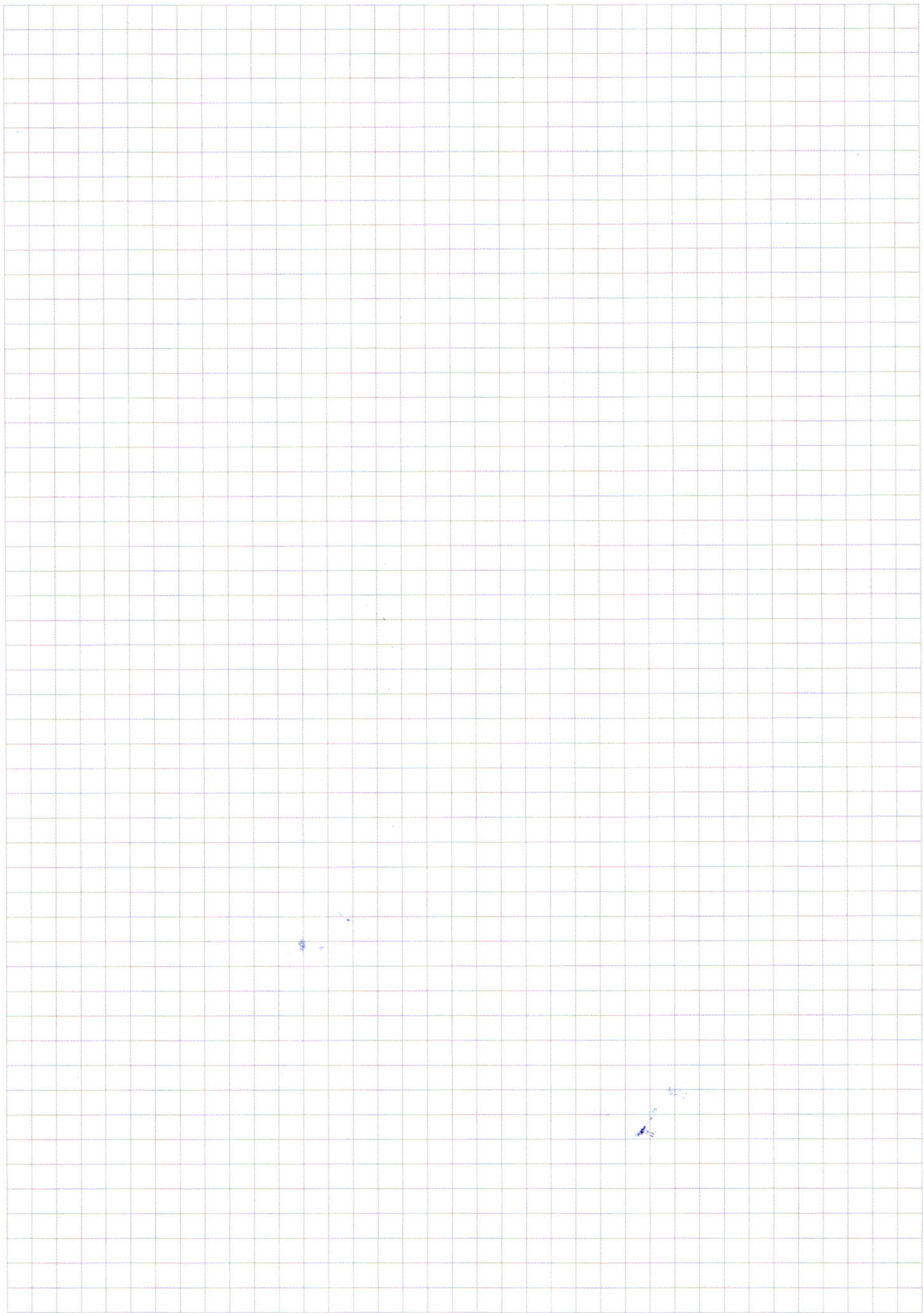
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$X = 3^5$$

$$f = 3^{81} \cdot 3 + 4 \cdot 3^{81} = 27 \cdot 3^{81} + 4 \cdot 3^{81} =$$
$$= 31 \cdot 3^{81}$$

$$g = 3^5 \cdot 3^{81} - 3^5 = 65$$

$g > f.$



☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$~~

$$2(y-2)^2 - (x+2)^2 - (4+xy) = 0$$

$$\left(\frac{16}{4}\right)^{\lg 2} = (2)^{\lg 4}$$

$$4 \lg 2 = 2 \lg 2$$

$$4 \lg 2 = 4 \lg e.$$

2 - 4

(4.)

 $2\text{KSO} - ?$

$$SK \approx SL = SM$$

$$f^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow k = \frac{3}{2}$$

$$\frac{SA_1}{SA} = \frac{3}{2}$$

$$S_A = S_C = S_B = 1,5 S_A,$$

$$\frac{SM_1}{SM} = 1,5$$

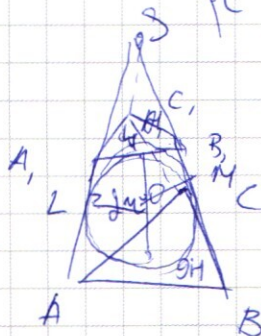
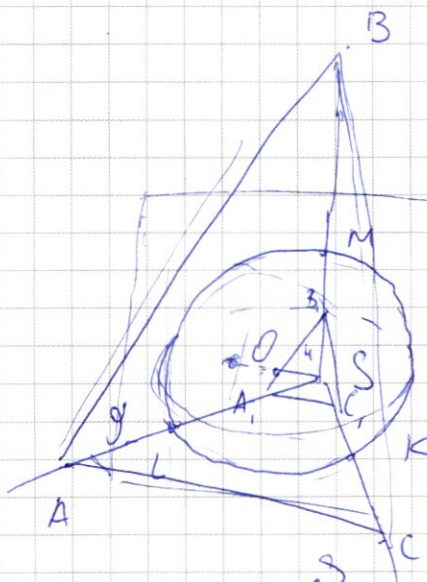
~~SH, = 1.58H.~~

~~$SH + H_2H = 1.5 SH$~~

$$g_H = 1.58 \text{ M}$$

$$g_H = 1,5 S_H - 1,5 H_1 M$$

$$\begin{aligned} x &= -2 \\ y &= 2 \end{aligned}$$



$$\cos = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{\sqrt{5}}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0.4472$$

$$1,5H, M = 0,5SH$$

$$M_1 M = \frac{0,5}{1,5} SH = \frac{SH}{3}$$

$$\mu = \frac{SM}{3 \cdot 2} = \frac{SM}{6}$$

$$SO = \frac{2}{3} SM + \frac{SM}{6} = \frac{5SM}{6}$$

$$OK = \mu = \frac{SM}{6}$$

$$\sin \alpha = \frac{OK}{SO} = \frac{\frac{SM}{6}}{\frac{5SM}{6}} = \frac{1}{5}$$

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$k_2 = \frac{SO}{SM} = \frac{\frac{5}{6}}{1} = \frac{5}{6}$$

$$S = \frac{5}{6} \cdot 9 \cdot 3$$

$$\frac{S_1}{S} = k^2 = \frac{25}{36}$$

$$S_1 = \frac{9 \cdot 25}{36} = 6,25$$

$$y'(10) = 3^{2,1} - 1$$

$$3 \cdot \ln 3^{2,1} = 3^{2,1} - 1$$

$$\frac{25}{2} \cdot \frac{4}{8,1} = 1,2$$

$$\frac{6,25}{25,00} = 0,25$$

5. $x-6-y > 0 \quad y < x-6 \quad y > x-6$
 $x-6+y > 0 \quad y > 6-x \quad y < 6-x$

$$|x-6-y| + |x-6+y| = 12$$

$$x-6-y+x-6+y=12$$

$$2x-12=12$$

$$x=12$$

$$-x+6+y+x-6+y=12$$

$$2y=12$$

$$y=6$$

$$-x+6-y-x+6-y=12$$

$$-2x=0$$

$$x=0$$

$$x, y > 0$$

$$(x-6)^2 + (y-8)^2 = a$$

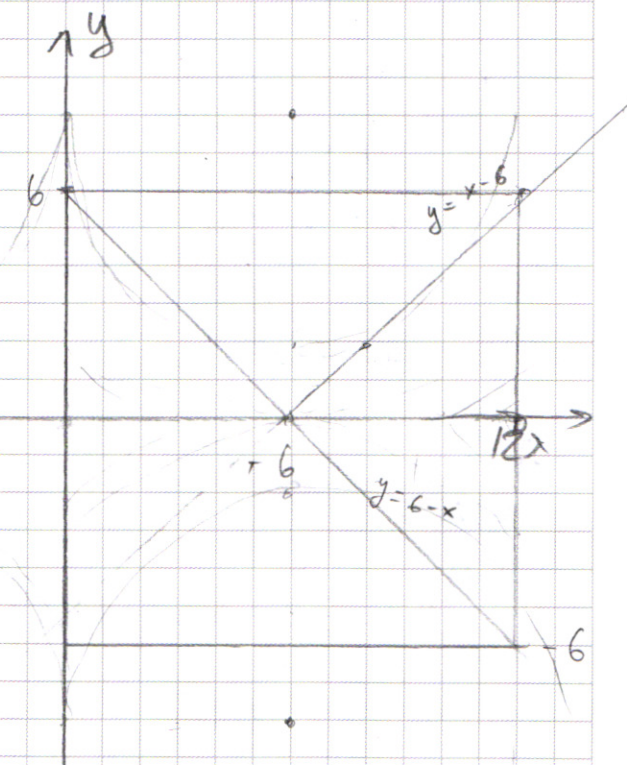
$$\sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

$$x > 0 \quad y < 0$$

$$(x-6)^2 + (y+8)^2 = a$$

$$a=4$$

$$a=100$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

①

$$\begin{array}{r} \overline{16875} \overline{25} \\ 150 \\ \underline{187} \\ 175 \\ \underline{125} \\ -125 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \overline{675} \overline{25} \\ -50 \\ \hline 175 \\ -175 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$25 \cdot 25 \cdot 3^3 = 5^2 \cdot 5^2 \cdot 3^3 = 5^4 \cdot 3^3$$

$$5555 \cdot 333 \cdot 1$$

$$\frac{8!}{4! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{6}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 35 \\ \times 8 \\ \hline 280 \end{array}$$

$$5555 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1$$

$$\frac{8!}{4! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 15 \\ \times 7 \\ \hline 105 \\ \times 8 \\ \hline 840 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \\ 840 \\ + 280 \\ \hline 1120 \end{array}$$

$$840 + 280 = 1120$$

Ответ: 1120.

② $2 \cdot \cos 5x \cdot \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$\cos 10x = \cos^2 5x - \sin^2 5x = (\cos 5x - \sin 5x)(\cos 5x + \sin 5x)$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x) =$$

$$= (\cos 5x - \sin 5x) (2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x))$$

$$2 \cos 2x - 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x \right) =$$

$$= 2 \left(\cos 2x - \left(\cos \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) \right) \right) =$$

$$= 2 \left(-2 \sin \frac{2x - 5x + \frac{\pi}{4}}{2} \right) =$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) \sin \left(-1,5x + \frac{\pi}{8} \right) \sin \left(3,5x - \frac{\pi}{8} \right) = 0.$$

$$-1,5x + \frac{\pi}{8} = \pi k.$$

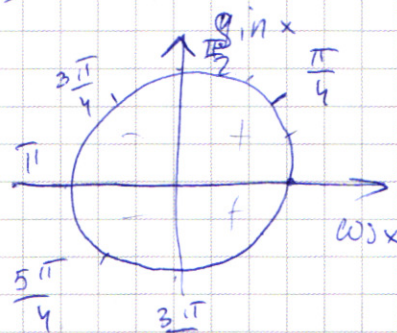
$$3,5x - \frac{\pi}{8} = \pi k.$$

$$5x = \frac{5\pi}{4} + \pi k$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k.$$

$$5x = \frac{\pi}{4}$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{18} \right)^{\lg 9} = (-1)^{\lg 18} \cdot (-1)^{\lg 18} \cdot (-1)^{\lg 18} \cdot (-1)^{\lg 18} \cdot (-1)^{\lg 18} \cdot (-1)^{\lg 18} \cdot (-1)^{\lg 18} \cdot (-1)^{\lg 18} \cdot (-1)^{\lg 18} \cdot (-1)^{\lg 18}$$



$$(3) \quad 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0.$$

$$-x^2 - x(y+4) + 2y(y-4).$$

$$-x^2 - 4x - 4 + 2y^2$$

$$2y^2 - 4xy + x^2 + 3xy - 2x^2$$

$$2(y^2 - 4y + 4) - 8 - (x^2 + 4x + 4) + 4 - xy = 0$$

$$2(y-2)^2 - (x+2)^2 - (4+xy) = 0$$

$$(x+2)^2 + 4 + xy = 0$$

$$xy = -(x+2)^2 - 4$$

$$y = \frac{-(x+2)^2 - 4}{x}$$

$$\frac{3.5}{2.8} = 1.25$$

$$(3) \quad 3$$

$$\begin{cases} -xy > 0 \\ xy < 0 \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x > 0 \\ x < 0 \end{cases}$$