

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФ:

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~1

$$16875 = 5^4 \cdot 3^3$$

Значит число может состоять из след. цифр.

либо

$$5, 5, 5, 5, 3, 3, 3, 1 \quad \text{кол-во: } \frac{8!}{4! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 280$$

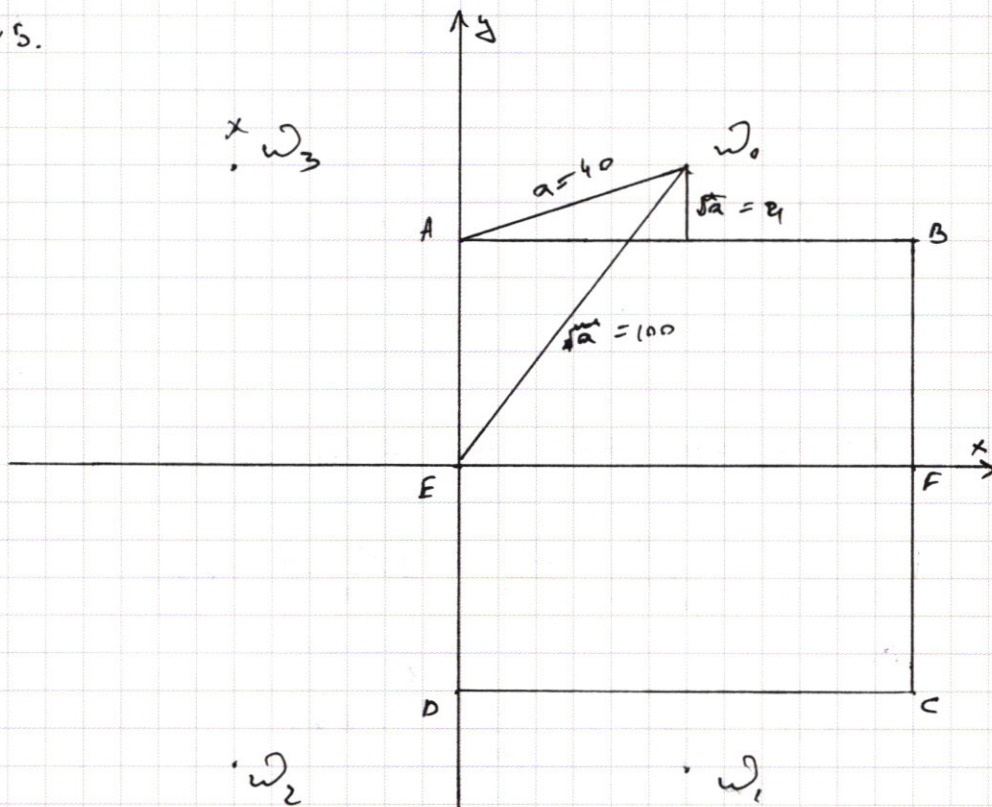
либо

$$5, 5, 5, 5, 3, 1, 1 \quad \text{кол-во: } \frac{8!}{4! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 1} = 840$$

$$\Sigma = 280 + 840 = 1120$$

Всего 1120 чисел.

вс.

ω_3 

~~2/2/2022. 9:00-9:15~~

T.O.

ω_3 - на отрезке AE .

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5 (продолжение)

Заметим, что при $a = 4$

ω_0 кас AB	$\Rightarrow$ система имеет 2 р-ш.
ω_1 кас DC	
DEA ω_2	
AEB ω_3	

при $a \in (4; 100)$ - окружности увеличиваются $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ каждая из окр-тей $(\omega_0; \omega_1)$ будет пересекать кв.

в 2-ух точках (сначала по AB; DC, затем (AE; BF) и (ED; FC))

$\Rightarrow$ всего более 2-ух решений (мин 4.)

При $a = 100$ все окружности пересекут кв. в т. E, а

ω_0 и ω_1 в т. F $\Rightarrow$ всего 2 решения

При $a > 100$ ни одна из окружностей не будет иметь
общих точек с кв. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ всего 2 a , при которых ровно 2 решения

$$a = 4$$

$$a = 100$$

№3.

$$\left(\frac{x^4}{y^2} \right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \quad (1)$$

$$\begin{cases} 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \quad (2) \end{cases}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} y > 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

(2)

$$-x^2 - x(y+4) - (8y - 2y^2) = 0$$

$$x^2 + x(y+4) + (8y - 2y^2) = 0$$

$$D = y^2 + 8y + 16 - 32y + 8y^2 = 9y^2 - 24y + 16 = (3y - 4)^2$$

$$x = \frac{-y-4 \pm |3y-4|}{2}$$

$$\begin{cases} x = y-4 \\ x = -2y \end{cases}$$

(2)

$$x = -2y$$

$$(16y^2)^{\lg y} = (2y)^{\lg 2y^2}$$

$$(16y^2)^{\lg y} = ((2y)^{\lg y})^2 \cdot y^{\lg 2}$$

$$4^{\lg y} = 2y^{\lg 2}$$

$$y^{\lg 4} = 2^{\lg 2} y^{\lg 2}$$

$$\uparrow t = y^{\lg 2}$$

$$t^2 = 2^{\lg 2} t$$

$$\begin{cases} t = 0 \\ t = 2^{\lg 2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \text{ не проходит по ОДЗ.} \\ y = 2 \end{cases}$$

$$y = 2$$

$$\begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$x = y-4 \quad 4-y > 0$$

$$x^4 \lg y \cdot y^{-2 \lg y} = (-x)^{\lg(-x)} (-x)^{\lg y}$$

$$(-x^3)^{\lg y} y^{-2 \lg y} = (-x)^{\lg(-x)}$$

$$\uparrow t = y-4$$

$$t^{3 \lg y} y^{-2 \lg y} = t^{\lg t}$$

$$\log_t t^{3 \lg y} + \log_t y^{-2 \lg y} = \lg t$$

$$3 \lg y + 2 \lg y \log_t y = \lg t$$

$$\lg y (3 + 2 \log_t y) = \lg t$$

$$\log_t y (3 + 2 \log_t y) = 1$$

$$\uparrow f = \log_{4-y} y$$

$$-2f^2 + 3f - 1 = 0$$

$$2f^2 - 3f + 1 = 0$$

$$\begin{cases} f = 1 \\ f = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_{4-y} y = 1 \\ \log_{4-y} y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 4-y \\ y = \sqrt{4-y} \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

⑤

$x = 5$
 $3^{81} - 3 \times 85 - 5$

$f(x) = 3^x + 4 \cdot 3^{81}$

$f'(x) = \ln 3 \cdot 3^x$

$f(x) = 85 + x \cdot 3^{81} - x$

$f'(x) = 3^{81} - 1$

$\ln 3 \cdot 3^x - 3^{81} + 1 = 0$

$\ln 3 \cdot 3^x +$

$\left(\frac{x}{y}\right)^{\ln 2} = (-x)^{\ln 2(-x)} \ln 2 \ln y$

$10^f = x$

$x = 85$

$85 + 85 \cdot 3^{81} - 85 - 81 \cdot 3^{81} - 4 \cdot 3^{81}$

$x = 4$ $x = 85$

$\ln 3 \cdot 3^x = 3^{81} - 1$

$x \in (80; 81)$

$f(x) = (x-4)3^{81} - 3^x + 85 - x$

$x \in (80; 81)$

$x = 4$ $x = 85$

$y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$

$\Delta = 1 + 16 = 17$

$\Delta_1: a \in a = 4 \text{ т.к.с.}$

$\Delta_2: a \in (4; 40]$ 2 т.к.с.

$a = 196$ 3 т.

$1-91 + 1-31 = 12$

$1-91 + 131 = 12$

$6^2 + 14^2 =$

$= 36 + 196 =$

$= 23^2$

$85 - x$ $(x-4)3^{81}$

$f(x) = 85 + x \cdot 3^{81} - x - 3^x + 4 \cdot 3^{81}$

$f'(x) = 3^{81} - 1 - \ln 3 \cdot 3^x$

$f' = 3^{81} - 1 - \ln 3 \cdot 3^x$

р/ч. ч.

$85 + 81 \cdot 3^{81} - 81$

$- 3^{81} - 4 \cdot 3^{81}$

$f(x) =$

$= (x-4)3^{81} - 3^x + 85 - x$

$x \in (80; 81)$

$x = 4$ $x = 85$

$$\begin{array}{r} 16875 \overline{) 5} \\ \underline{15} \\ 18 \\ \underline{15} \\ 37 \\ \underline{35} \\ 25 \\ \underline{25} \\ 0 \end{array}$$



~~82.384~~

$$5^4 \cdot 3^3$$

$$5^4 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 12$$

$$5^4 \cdot 3^3 \cdot 1$$

$$\begin{array}{r} 8 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \\ \underline{4 \cdot 2} \\ 8 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \\ \underline{4 \cdot 3} \end{array}$$

$$20 \cdot 6 \cdot 7 = 840$$

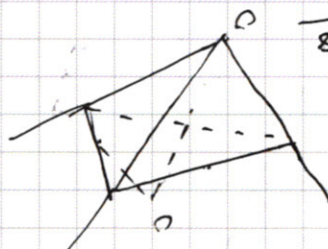
$$40 \cdot 7 = \frac{280}{11 \cdot 20}$$

$$\begin{array}{r} \times 42 \\ 20 \\ \hline 840 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 40 \\ 2 \\ \hline 280 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \times 15 \\ \hline 75 \\ 15 \\ \hline 225 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 225 \\ \hline 15 \\ 1125 \\ \hline 2250 \\ \times 3375 \\ \hline 5 \\ 16875 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 42 \\ 20 \\ \hline 840 \end{array}$$

64:

$$-x+y+6+x+y-6=12$$

$$2y=12$$

$$y=6$$

$$x-6-6+x+6-6=12$$

$$2x=24$$

$$x=12$$

$$x-y-6-x-y+6=12$$

$$y=-6$$

$$-x+y+6-x-y+6=12$$

$$-2x+12=0$$

$$x+y=0 \quad y=-x$$

$$|x-y-6| + |x+y-6| = 12$$

$$x-y=6$$

$$x+y=6$$

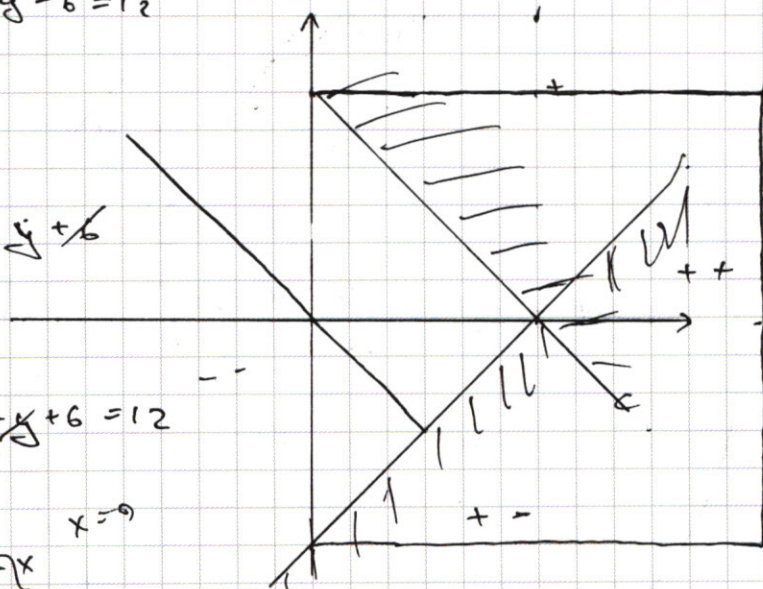
$$y=x-6$$

$$y=6-x$$

$$x \cdot y - 6 > 0$$

$$y < x - 6$$

$$y > 6 - x$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\frac{16y^4}{y^2}\right)^{\text{egy}} = 2y^{\text{egy}} (4-y)^{4y-y^2}$$

$x < 0$

$$(16y^2)^{2y} = \frac{2y^{2y^2}}{(2y^{2y})^2} \cdot 2y^{2y}$$

$$4 \log 4 = 2 \log 2$$

$\log_2$

$$2e_{gg} =$$

$2 \cdot 2 \cdot 16$

$64 \log^2 4 \log 64$

$$3 \log^2 = 4$$

eg 4.

$$4^{\frac{1}{2}} \log 2$$

$$\lg^4 \lg_2 2 = \lg^4$$

$$\lg 2.2 = \lg 4$$

$$\frac{(-x)^{\lg(-x)}}{(-x)^{\lg(y)}}$$

22

$$\left(\frac{-x^3}{y^2} \right)^{\text{egy}}$$

(3)

$$y^{-\lg y} (-x)^{3\lg y} = -x^{\lg y}$$

$$y \cdot \log y = (-x)^{-2} \log y$$

$$y^{\text{egg}} = (-x)^2 \text{egg}$$

$$2y^2 - xy - x^2$$

$$(\sqrt{2}y - 2\sqrt{2})^2$$

$$2y^2 - 8y + 8$$

$$(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4.$$

$$2y^2 - y(x+8) - (x^2+4x) = 0$$

$$\textcircled{2} = x^2 + 16x + 64 + 8x^2 + 32x =$$

$$= 9x^2 + 48x + 64$$

$$(3x + 8)^2$$

$$-x^2 - x(4+y) - (8y + 2y^2) = 0$$

$$x^2 + x(4+y) + (8y - 2y^2) = 0$$

$$Q = 16 + 8y + y^2 - 32y + 8y^2 = 0$$

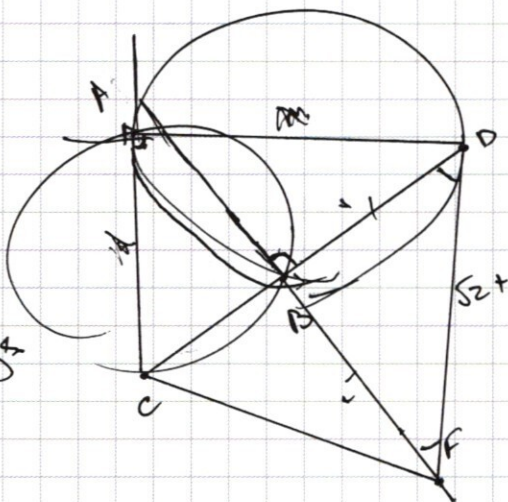
$$y^2 - 24y + 16 = 0$$

$$2(3y-4)^2$$

$$x = \frac{-4 - y \pm |3y - 4|}{2}$$

$$\frac{-4 - y \pm (3y - 4)}{2}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2y-8}{2} = y-4 \\ x = -2y \end{cases}$$



$$x^4 \lg y - 2 \lg y = (-x) \lg(-x) (-x) \lg y$$

$$(-x^3) \lg y - 2 \lg y = (-x) \lg(-x)$$

$$2 \lg^2 y - 2 \lg y = 4 \lg y$$

$$2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$$y = 85. +$$

$$y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81}$$

$$\cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{6} =$$

$$x = 1$$

$$y \geq 81 + 4 \cdot 3^{81}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$y < 81 + 4 \cdot 3^{81}$$

$$x = 4 \quad y = 4$$

$$(x) \lg y$$

$$(4-y)^2$$

$$(4-y)^3 \lg y - 2 \lg y = (4-y) \lg(4-y) e^x$$

$$f(x) = 3^x + 4 \cdot 3^{81}$$

$$f'(x) =$$

$$\lg t - 3 \lg y$$

$$\lg y^3$$

$$3 \lg y + \lg y$$

$$2 \lg y \lg t y = \lg t$$

$$\lg y (3 + 2 \lg t y) = \lg t$$

$$x = 9 - 8 = 1$$

$$f = \frac{3 \pm 1}{4}$$

$$f = 1$$

$$f = \frac{1}{2}$$

$$-1$$

$$D = 9 +$$

$$\log_2 2$$

$$1 (3 + 2)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y = 4 - y$$

$$y = 2$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$y = \sqrt{4 - y}$$

$$y^2 = 4 - y$$

$$y^2 + y - 4 = 0$$

$$D = 17$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$y = -\frac{1 - \sqrt{17}}{2} \quad \text{не проходит по ОУ 3.}$$

$$\begin{cases} y = -\frac{1 + \sqrt{17}}{2} \\ x = \frac{-9 + \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

Ответ: $(-2; 2); \left(\frac{-9 + \sqrt{17}}{2}; -\frac{1 + \sqrt{17}}{2}\right); (-4; 2).$

✓ 7.

р/н $f(x) = 85 + (3^{81} - 1)x - 3^x + 4 \cdot 3^{81}$

это ф-я показывает сколько y удовлетворяет данной системе при данном x .

$$f'(x) = 3^{81} - 1 - \ln 3 \cdot 3^x$$

$f'(x) = 0$ при x_1 , которое > 80 и < 81 $\Rightarrow f(x)$

при это ф-я сначала возрастает, потом убывает $\Rightarrow$

При $x = 4 \quad f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad$ При $x < 4 \quad f(x) < 0 \quad \Rightarrow$
 $x = 85 \quad f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad$ При $x > 85 \quad f(x) < 0 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow$ не будет реш системы

Всего решений $\sum f(4) + f(51) \dots f(85)$

~7

$$\Rightarrow: 85 + (3^{81} - 1) \times -3^x - 4 \cdot 3^{81}$$

$$\Sigma: 85,82 + (3^{81} - 1) \frac{82,89}{2} - 4 \cdot 82 \cdot 3^{81} - \frac{3^{81}}{2} + \frac{3^2}{2}$$

$$6970 + 4189 \cdot 3^{81} - 3649 - 4 \cdot 82 \cdot 3^{81} - \frac{3^{81}}{2} + \frac{3^1}{2}$$

$$\begin{aligned} & 3321 + 28 \cdot 3^{81} - 1,5 \cdot 3^{81} + 40,5 \\ & \underline{3361,5 + 26,5 \cdot 3^{81}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 3321 + 3645 \cdot 3^{81} \\ & \quad \cdot 3^{81} \end{aligned}$$

$$3321 + 3321 - 1,5 \cdot 3^{81} + 40,5$$

$$\underline{3361,5 + 3319,5 \cdot 3^{81}}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$85 + x \cdot 3^{81} - x - 3^x - 4 \cdot 3^{81}$$

$$4 + 5 + 6 +$$

$$(x-4)^3 \cdot 3^{81}$$

$$4 \cdot 82 +$$

$$\frac{82 \cdot 81}{2}$$

$$0 + 2 + 2 + 3 + 4$$

~~3, 4, 1~~ 10

$$85 \cdot 82 + (41 \cdot 81) \cdot 3^{81} - 41 \cdot 81 - 82 \cdot 4 - 4 \cdot 3^{81}$$

$$\frac{3^{81}}{(1-9)}$$

$$\frac{27}{2}$$

$$\frac{81}{2}$$

$$2 \cdot \frac{36}{2}$$

$$\frac{4 \cdot 3}{2}$$

$$\frac{5 \cdot 4}{2}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times 85 \\ \hline 170 \\ 680 \\ \hline 6970 \end{array}$$

$$4, 5, 6, 7;$$

$$\frac{13 \cdot 4}{2} = 26$$

$$495.$$

$$27 + 9 + 3 + 1$$

$$36 \quad 40$$

$$3 + 9 + 27 +$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 89 \\ \hline 27 \\ 356 \\ \hline 3649 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6970 \\ - 3649 \\ \hline 3321 \end{array}$$

$$3 \cdot 4.$$

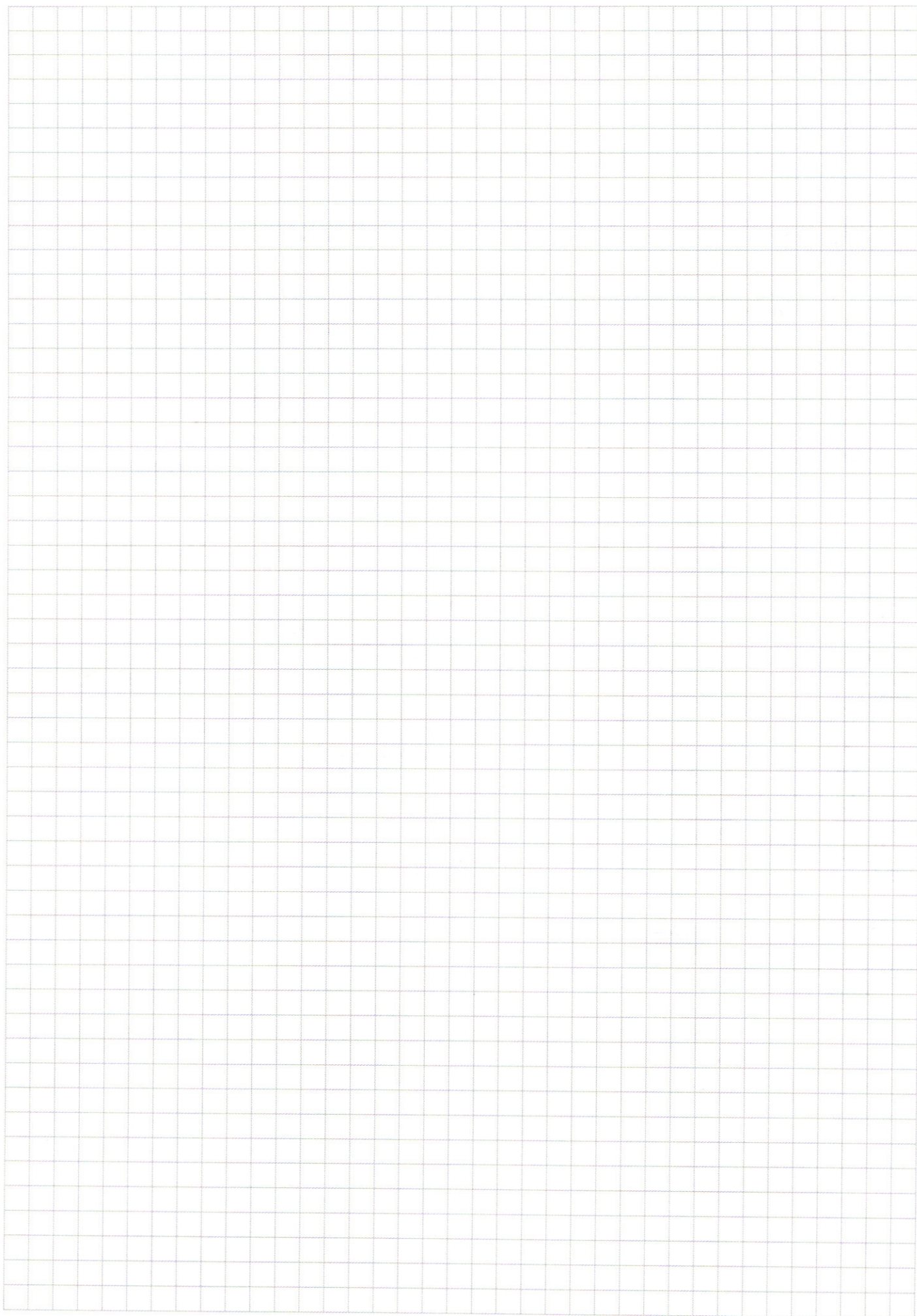
$$3 \cdot 12.$$

$$3649$$

$$\begin{array}{r} \times 82 \\ 4 \\ \hline 328 \end{array}$$

$$3645$$

$$\begin{array}{r} 3649 \\ - 328 \\ \hline 3321 \end{array}$$



☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)