

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО М

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

место «автоматический» становится единица.

Во втором случае сначала поставим 2 единицы, количество способов второго из 4 чисел 2 так, чтобы они были единицами
то $C_4^2 = \frac{4!}{2! \cdot (4-2)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2} = 6$.

На оставшиеся два места нужно поставить 2 9 и 3, количество способов по одному C_2^1 (т.к. сначала ставим 9, потом на оставшиеся место «автоматический становится 3»). $C_2^1 = 2$ т.е. всего способов расставить 3; 9; 11 среди 4-ых чисел
то $C_4^2 \cdot C_2^1 = 6 \cdot 2 = 12$.

Тогда количество способов расставить на 4 местах цифры на 4 места можно так, чтобы в каждом из них был 28
то $C_4^3 + C_4^2 \cdot C_2^1 = 4 + 12 = 16$.

Тогда всего количество способов на 8 местах расставить цифры так, чтобы они в произведении давали $5^4 \cdot 3^3$ то
 $C_8^4 \cdot (C_4^3 + C_4^2 \cdot C_2^1) = 70 \cdot 16 = 1120$, а значит таких 8-значных чисел, удовлетво-
ряющих условию задачи будет 1120.

№1.

Заметим, что $16895 = 5^4 \cdot 3^3$. Если $a_1; a_2; a_3; a_4; a_5; a_6; a_7; a_8$ - цифры такого восьмизначного числа то

при любых $1 \leq i \leq 8$ $a_i \in \mathbb{N}; a_i \leq 9$, поэтому

чтобы $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 = 16895$ то крайний левый равно 4 числа из $a_1; a_2 \dots a_8$ должны быть нечётными. Число способов

выбора из 8 чисел 4 так, чтобы они были нечётными это $C_8^4 = \frac{8!}{(8-4)! \cdot 4!} =$

$$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 70. \quad (сл. комбинаций в числе решений).$$

Укажем порядок 4 места под цифрами оставшихся 4 цифр, которые будут нечётными, у нас осталось ещё 4 числа из $a_1; a_2; a_3; a_4;$

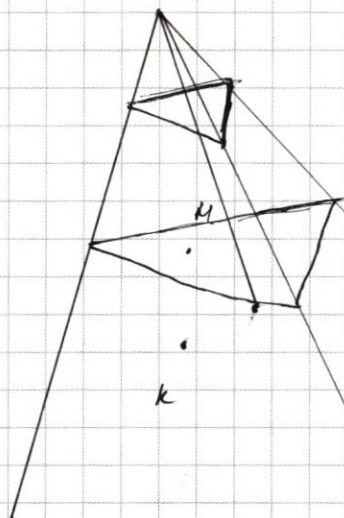
$a_5; a_6; a_7; a_8$, пусть эти оставшиеся будут $b_1; b_2; b_3; b_4$. Видно что $b_1 b_2 b_3 b_4 = 28$, а также $\forall i: 1 \leq i \leq 4 \quad b_i \leq 9; b_i \in \mathbb{N}$.

Поэтому либо среди $b_1; b_2; b_3; b_4$ есть 1.) 3 тройки и одна единица, либо среди $b_1; b_2; b_3; b_4$ есть 2 единицы; одна тройка и одна девятка т.к.

$28 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 9 \cdot 3$. В первом случае количество способов выбора 3 числа из 4-х так,

чтобы они были тройками это $C_4^3 = \frac{4!}{(4-3)! \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 4$. На оставшиеся

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\angle 7x = \angle 1.$$

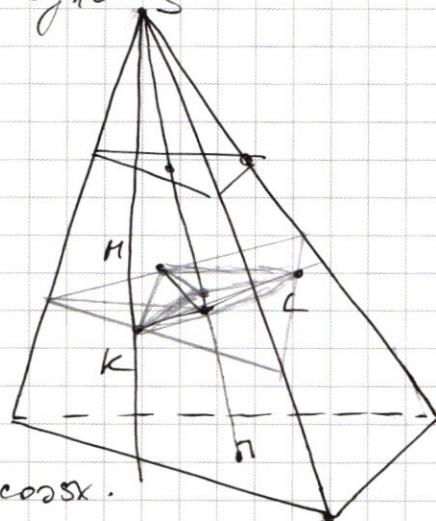
$$\lg y = \lg 10^2 S$$

$$\frac{\lg 2 y}{\lg 10}$$

$$\frac{\lg 2 y}{\lg 10}$$

$$(\cos x - \sin x)^2 = 1 - 2 \sin x \cos x.$$

$$\cos x - \sin x =$$



$$2 \cos x - \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin x \cdot \cos 2x.$$

$$\cos 7x + \cos 3x = \sqrt{2} \cos 7x \cdot \cos 3x - \sqrt{2} \sin 7x \cdot \sin 3x + \sin 7x + \sin 3x.$$

$$\cos 7x + \cos 3x = \sqrt{2} \cos 10x - \sqrt{2}$$

$$2 \cos x \cdot \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin x \cdot \cos 2x.$$

$$2 \cos 2x (\cos x - \sin x) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$\cos 2x (\cos x - \sin x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 10x.$$

$$\cos 2x (\cos x - \sin x) = \frac{\sqrt{2}}{2} (2 \cos^2 x - 1)$$

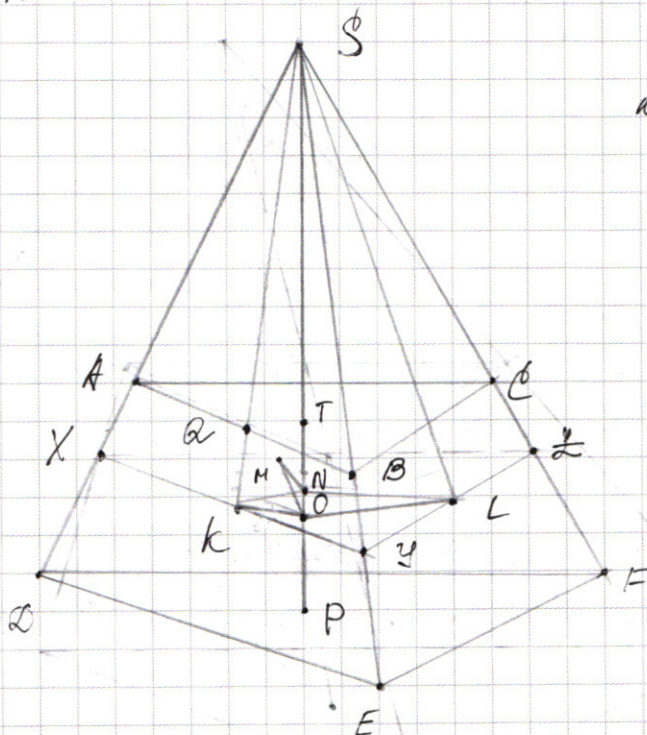
$$\cos 2x (\cos x - \sin x) = \sqrt{2} \cos^2 x - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ответ: 1120

Комментарий к решению: число 1; 3; 5

(единственные цифры, которые могут быть в разрядах 8 - разрядных чисел, т.к. $10^8 \cdot 5 = 5^4 \cdot 3^3$) можно ставить на любую позицию в числе т.к. $1 \neq 0$; $3 \neq 0$; $5 \neq 0$.

14.



Пусть сечение, которое касается сферы и $\perp$ SO и имеет площадь 4 пересекает лучи угла в точках A; B; C

И сечение, которое касается сферы, $\perp$ SO и имеет площадь 9 пересекает те же лучи в точках D; E; F (см. рис.).

Пусть $(ABC) \cap SO = T$
 $(DEF) \cap SO = P$

Заметим что т.к. $(ABC) \perp SO$ и $(DEF) \perp SO$ то $(ABC) \parallel (DEF)$, а значит

$AB \parallel DE$; $BC \parallel EF$; $AC \parallel DF$. А значит $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, значит

$$\frac{S(ABC)}{S(DEF)} = \left(\frac{AB}{DE}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{AB}{DE}\right)^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{2}{3}.$$

$\left(\frac{AB}{DE}\right)$ - коэффициент подобия $\triangle ABC$ и $\triangle DEF$.

В $\triangle STB$ - прямоугольный $\triangle$ и $\triangle SPE$ - прямоугольный $\triangle$.

А значит $\triangle STB \sim \triangle SPE \Rightarrow \frac{ST}{SP} = \frac{SB}{SE}.$

Пусть $ST = 2x$, значит $SP = \frac{ST \cdot SE}{SB} = \frac{ST \cdot DE}{AB} =$

$$= 2x \cdot \frac{3}{2} = 3x. \quad \left(\text{т.к. } \frac{SB}{SE} = \frac{AB}{DE} \text{ т.к. } AB \parallel DE \right).$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Если радиус сферы это R , тогда $TP = 2R$

$$TP = TP - TP = 3x - 2x = x \Rightarrow R = \frac{x}{2}.$$

$OK = \frac{x}{2}$. Рассмотрим $\triangle KO\Phi$, он прямоугольный, т.к. K - точка касания сферы грани ΦAE .

$$\sin \angle K\Phi O = \frac{KO}{O\Phi}. \quad KO = \frac{x}{2}; \quad \Phi O = \Phi T + OT = 2x + \frac{x}{2} = \frac{5x}{2}.$$

$$\sin \angle K\Phi O = \frac{\frac{x}{2}}{\frac{5x}{2}} = \frac{1}{5} \Rightarrow \angle K\Phi O = \arcsin\left(\frac{1}{5}\right).$$

Построим сечение плоскостью KLM угла Φ .

Заметим, что $(KLM) \perp$

Опустим n - перп из K на ΦO , перп он падает в точку N . Тогда расстояние от

Заметим, что $\triangle K\Phi O = \triangle \Phi LO = \triangle \Phi MO$ (т.к.

$KO = OL = MO$ - радиусы, ΦO - общий и $\angle K\Phi O = \angle \Phi LO = \angle \Phi MO = 90^\circ$ т.к. K, L, M - точки касания а

значит $\triangle K\Phi O = \triangle \Phi LO = \triangle \Phi MO$ как прямоугольные с равными гипотенузными и катетами).

Значит $\angle KON = \angle MON = \angle LON$, значит

$\triangle KON = \triangle LON = \triangle MON$ (т.к. ON - общий, $KO = OL = OM$

и $\angle KON = \angle LON = \angle MON$, а значит они равны по 2-м сторонам и углу между ними). Тогда $MN \perp \Phi O$;

$LN \perp \Phi O$; $KN \perp \Phi O$ а значит $N \in (KML)$ и $(KML) \perp \Phi O$.

Тогда $(KML) \parallel ABC$, т.е. $(KML) \perp SO$ и $(KLN) \perp SO$. $\Rightarrow$ угловая дуга (KLN) измеряется углом $\angle K$; $\angle B$; $\angle C$ в точках X ; Y ; Z соответственно, тогда $X \in AB$; $Y \in AC$; $XZ \parallel BC$.

Углы $\angle ABO$ и $\angle K$ — острые, поэтому $\angle K$ равен $\angle ABO$ и по теореме $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$.

Коэффициент подобия у треугольников равен $\frac{KT}{KN} = \frac{OT}{ON} = \frac{OT}{ON} = \frac{OK}{OB}$ (по теореме $\angle K = \angle B$), где

$O = SK \cap AB$. Докажем, что коэффициент

подобия именно такой: $\frac{KT}{KN} = \frac{OT}{ON}$ (т.к. — прямоугольные $\triangle OTK$ и $\triangle ONK$ подобны).

OT и KN — радиусы вписанных окружностей у этих 2-х треугольников, поэтому коэффициент

в прямоугольном $\triangle OKO$ $KO \cdot OK = KN \cdot KO$.

$$KO = \frac{x}{2}; \quad KO = \frac{5x}{2}; \quad KO = x \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{1}{4}} = x \sqrt{\frac{24}{4}} = x\sqrt{6}.$$

$$KN = \frac{KO \cdot OK}{KO} = \frac{\frac{x}{2} \cdot x\sqrt{6}}{\frac{5x}{2}} = \frac{x\sqrt{6}}{5}.$$

$$ON = \sqrt{KO^2 - KN^2} = x \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{6}{25}} = \sqrt{\frac{25 - 24}{100}} =$$

$$= \frac{1}{10}x \quad \angle N = \angle O - ON = \frac{5x}{2} - \frac{x}{10} = \frac{25x - x}{10} =$$

$= 2,4x$. Поэтому коэффициент подобия треугольников $\triangle ABC$ и $\triangle XYZ$ это

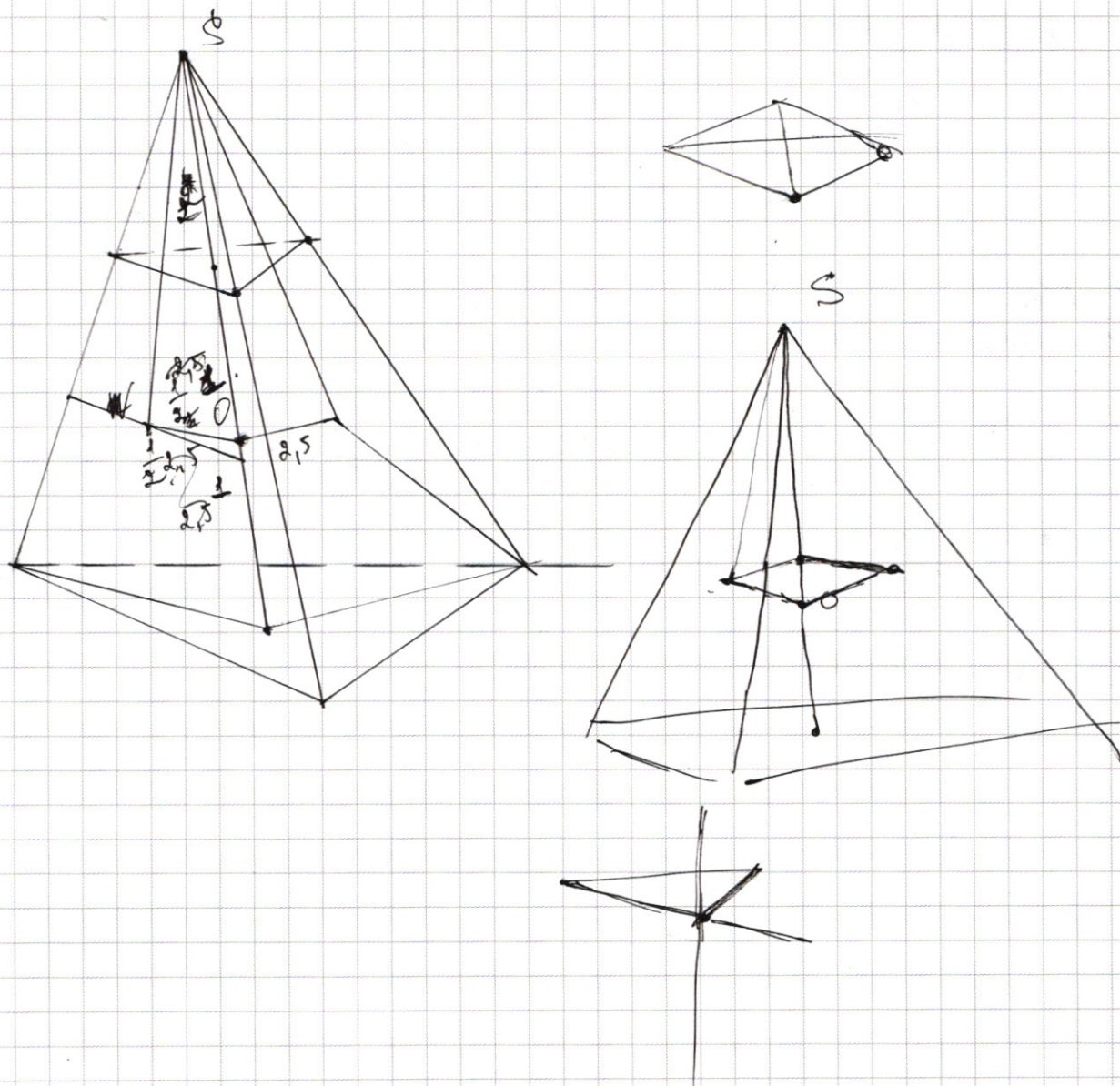
$$\frac{2x}{2,4x} = \frac{2 \cdot 10}{24} = \frac{5}{6} \quad \text{и значит}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

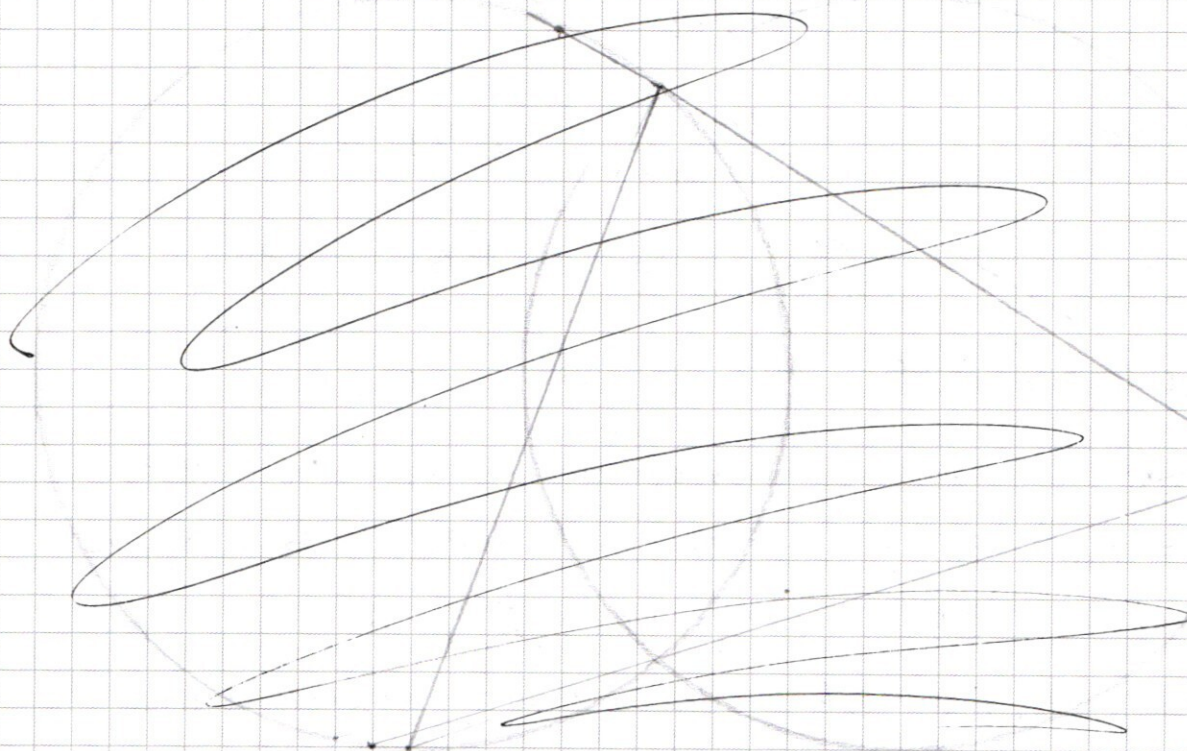
$$\frac{S(ABC)}{S(XYZ)} = \left(\frac{81}{36}\right)^2 = \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}.$$

$$S(XYZ) = \frac{36}{25} \cdot S(ABC) = \frac{36}{25} \cdot 4 = \frac{144}{25} =$$
$$= \frac{576}{100} = 5,76.$$

Ответ: 5,76.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\sin \angle FCA = \sin(\angle FCB + \angle BCA) =$$

$$= \sin \angle FCB \cdot \cos \angle BCA + \sin \angle BCA \cdot \cos \angle FCB.$$

$$\angle BCA = 45^\circ; \quad \angle FCB = 90^\circ - \angle BFC = 90^\circ - \angle BPC.$$

$$\Rightarrow \sin \angle FCA = \sin \angle BPC \cdot \cos \angle BFC \cdot \cos \angle BCA +$$

$$+ \sin \angle BCA \cdot \sin \angle BFC = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{12}{13} \cdot \frac{5}{13} \right) =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{12}{13}}{1} = \frac{12 \cdot \sqrt{2}}{26}.$$

$$S(ACF) = \frac{1}{2} \sin \angle FCA \cdot FC \cdot CA =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{12 \cdot \sqrt{2}}{26} \cdot 20 \cdot \sqrt{2} \cdot 17 = \frac{12^2 \cdot 2}{2} = 289.$$

Ответ: а.) 26; б.) 289.

$$\text{Также } \angle HAN + \angle HAN + \angle BAN + \angle ABH + \angle HAB = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 90^\circ - x + 90^\circ - y + x + y + z = 180^\circ \Rightarrow z = 0^\circ$$

$\Rightarrow$ M и N совпадают, пусть например $M = N = M \leftarrow B$ тогда M.

$$\triangle ABP \quad \frac{AB}{\sin \angle APB} = 2 \cdot 13$$

$$\triangle AAB \quad \frac{AB}{\sin \angle AAB} = 2 \cdot 13 \Rightarrow$$

$$\frac{AB}{\sin \angle APB} = \frac{AB}{\sin \angle AAB} \Rightarrow \angle AAB = \angle APB \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle AAB = \angle APB = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ, \text{ т.к.}$$

$\triangle ABP$ - прямоугольный $\Delta \Rightarrow AB = BP \Rightarrow$

$BP = BA = BF \Rightarrow \triangle BFC = \triangle BPC$ (ве - общие, $\angle FBC = \angle CBP = 90^\circ$; $BF = BP$) $\Rightarrow$

$FC = CP$, CP - диаметр окружности

т.к. на него смотрит $\angle CBP = 90^\circ$

$$\Rightarrow CF = CP = 2 \cdot 13 = 26.$$

ответ: а) 26.

$$5.) \quad \frac{CA}{\sin \angle CBA} = 2 \cdot 13 \Rightarrow CA = \sin \angle CBA \cdot 2 \cdot 13$$

$$CB = 10; \quad 2 \sin \angle CPB = \frac{10}{13} = \frac{5}{13}$$

$$\angle BAC = \angle BPC \Rightarrow \cos \angle CPB = \frac{12}{13}$$

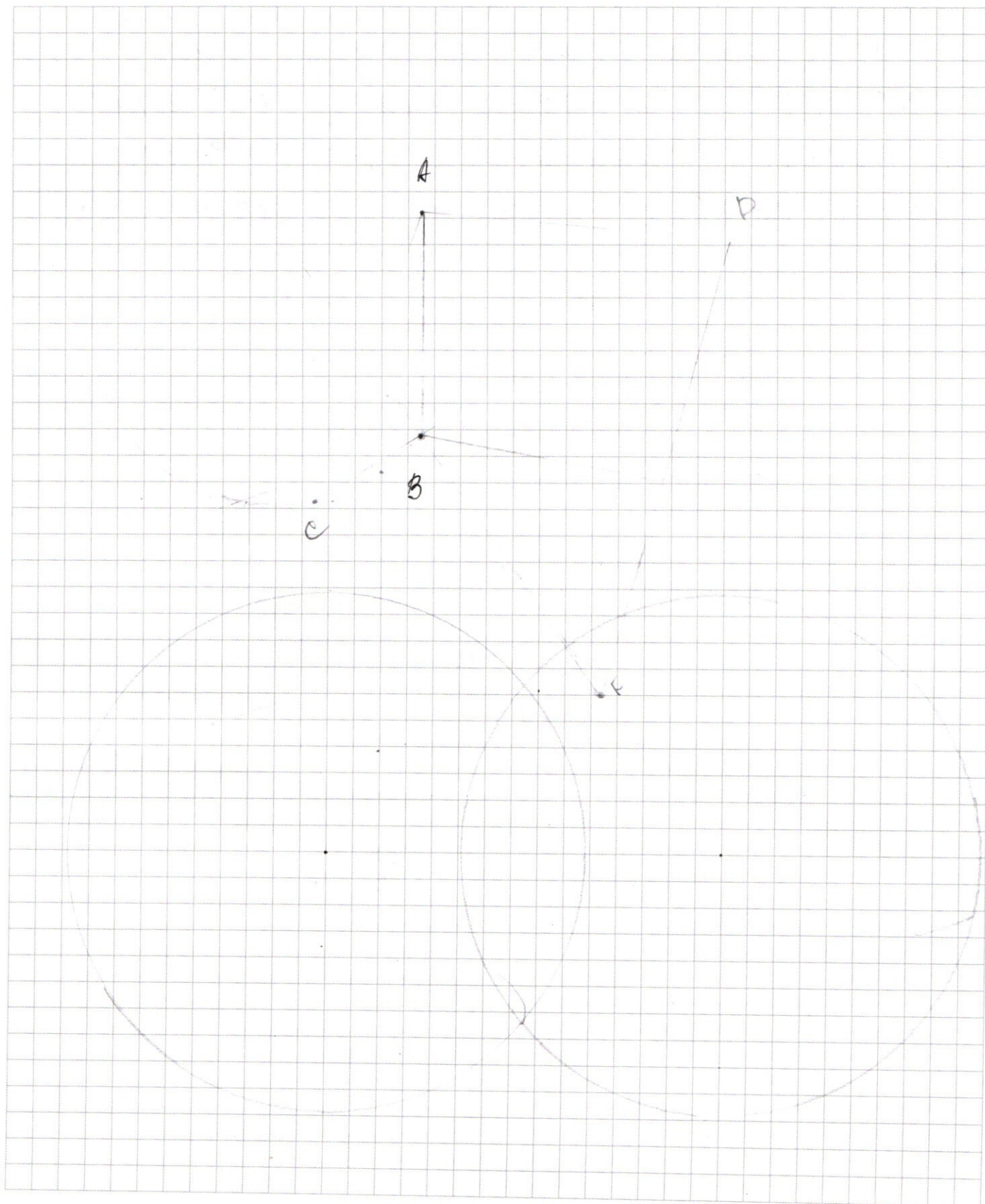
$$\sin \angle APC = \sin (\angle APB + \angle CPB) =$$

$$= \sin \angle APB \cdot \cos \angle CPB + \sin \angle CPB \cdot \cos \angle APB$$

$$= \frac{12}{2} \left(\frac{12}{13} + \frac{5}{13} \right) = \frac{12 \cdot 17}{13 \cdot 2} = \frac{12 \cdot 17}{26}$$

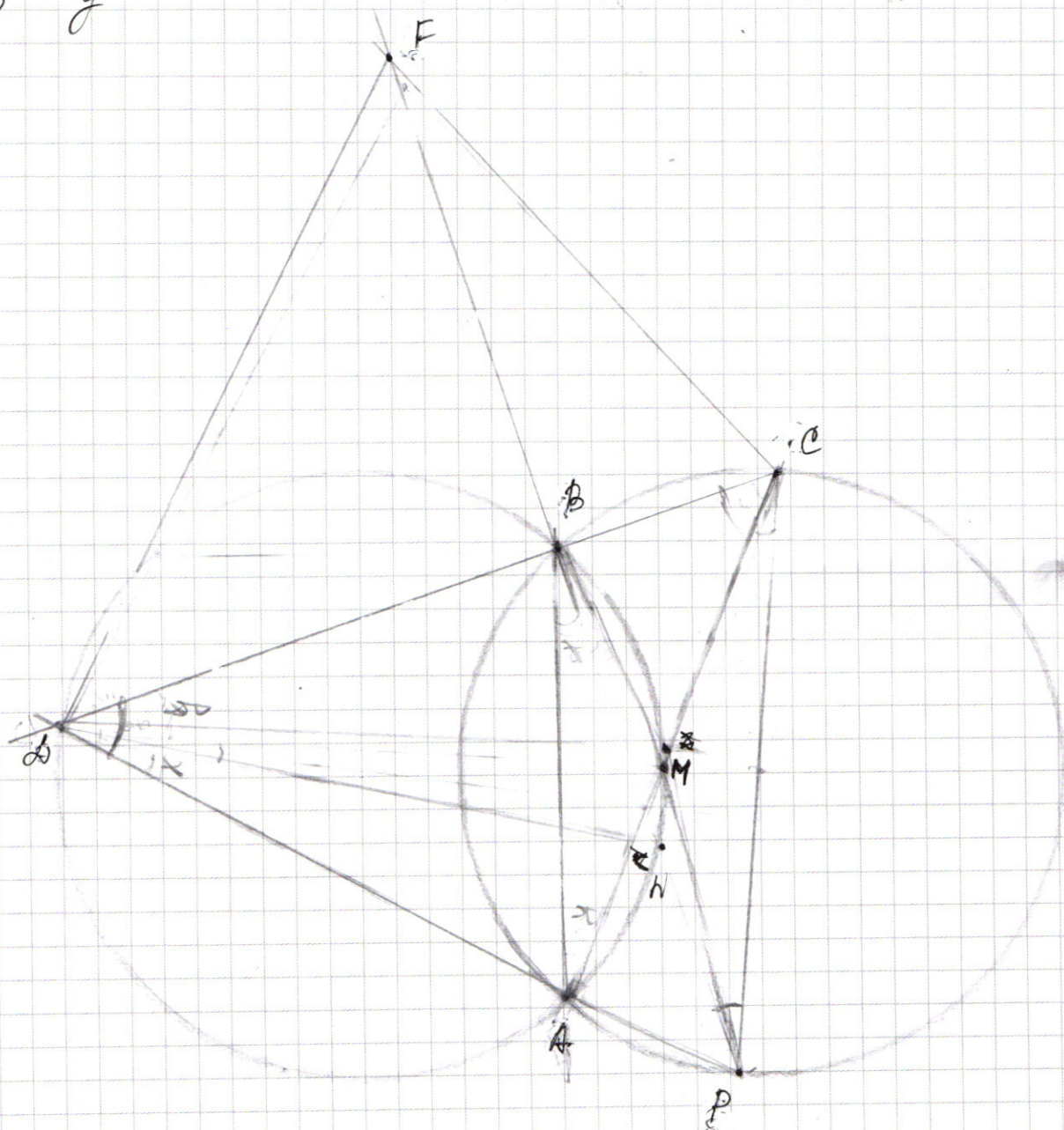
$$CA = \sin \angle APC \cdot 2 \cdot 13 = 12 \cdot 17.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



№ 6.

а) Пусть окружность на которой $\angle$ от ω_2 ;
 на которой $\angle$ от ω_1 . Пусть $FB \cap \omega_1 = P$
 (вторично пересекается). и $FB \cap \omega_2 = N$ (вторично)
 и $CA \cap \omega_2 = M$ (вторично). Тогда пусть
 $\angle BAN = \angle BPN = x$; $\angle MAB = \angle MAB = y$; $\angle MBN = \angle MAN =$
 $= \angle MBN = z$. Заметим, что $\angle CAB = \angle CAP = 90^\circ$,
 поэтому $\angle BAA = 90^\circ - \angle BAN = 90^\circ - x$; $\angle BAB = 90^\circ - \angle BAC$
 $= 90^\circ - y$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(16 y^2) \lg y = 2y \lg 2y^2$$

$$(4y)^2 \cdot \lg y = 2y \lg 2y^2$$

$$4y \lg y^2 = 2y \lg 2y^2$$

$$4y \lg y^2 = 2y \lg 2 + \lg y^2$$

$$4y \lg y^2 = 2y \lg 2 + 2y \lg y^2$$

~~$$2 \lg y^2 \cdot 2y \lg y^2 = 2y \lg 2 \cdot 2y \lg y^2$$~~

$$2 \lg y^2 = 2y \lg 2$$

$$2^2 \lg y = 2y \lg 2$$

$$\begin{array}{r} \times 685 \\ 28 \\ \hline + 4325 \\ \hline 1350 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1685 \mid 625 \\ 1250 \mid 28 \\ \hline 4325 \mid \\ - 4325 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{16} \\ 4 \\ \hline 16 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 625 \\ 28 \\ \hline + 4325 \\ \hline 1250 \\ \hline 16825 \end{array}$$

$$4 \cdot 3 \cdot 2$$

$$4!$$

16875

$$\begin{array}{r} \times 144 \\ 686 \end{array}$$

378

16875

$$\begin{array}{r} 135 \overline{) 5} \\ 10 \overline{) 128} \end{array}$$

16875 =

16875

$$\begin{array}{r} 16875 \overline{) 25125} \\ 185 \overline{) 135} \\ 437 \\ 385 \\ 625 \\ 625 \\ 0 \end{array}$$

$$16875 = 125 \cdot 5 \cdot 27$$

$$16875 = 54 \cdot 3^3$$

9 3 1

~~27~~

9 3 3 1

9 3 1 1

$$\begin{array}{r} 8 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 5 \\ 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \end{array}$$

$$C_8^4 \cdot (C_4^3 + C_4^2 \cdot 2)$$

$$= \frac{8 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \left(\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2} \cdot 2 \right)$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2} \right) \lg y = (-x) \lg (-xy)$$

$$4 \cdot 100$$

$$+ 4 \cdot 40 + 4 \cdot 4 =$$

$$\lg 2y^2 = 576.$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$2y^2 - 2xy + xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$2y(y - x) + x(y - x) - 4x - 8y = 0$$

$$(2y + x)(y - x) - 4(y + x) = 0$$

$$(2y + x)(y - x - 4) = 0$$

$$2y = -x \quad x = -2y$$

$$\left(\frac{16y^4}{y^2} \right) \lg y =$$

$$16y^2 \lg y =$$

$$\lg x = 6$$

$$\lg 2x = c$$

$$10^c = 2x$$

$$10^6 = x$$

$$\frac{10^c}{10^6} = 2$$

$$10^{c-6} = 2$$

$$c-6 = \lg 2$$

$$c = \lg 2 + 6$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(2y+x)(y-x-4)=0.$$

$$x = -2y$$

y

$$\left(\frac{16y^4}{y^2}\right) \lg y = 2y \lg 2y^2$$

~~2y~~

$$(16y^2) \lg y = 2y \lg 2y^2$$

$$y = 164$$

$$y > 0.$$

$$4y \lg y^2 = 2y \lg 2y^2$$

$$4y \lg y^2 = 2y \lg 2 + \lg y^2$$

$$2 \lg y^2 \cdot (2y) \lg y^2 = (2y) \lg 2 \cdot (2y) \lg y^2$$

$$2 \lg y^2 = 2y \lg 2$$

4

$$2 \lg y = 2y \lg 2$$

$$2 \lg y = 2 \lg 2 \cdot y \lg 2$$

$$\cos 4x + \cos 2x = 2 \cos 3x \cdot \cos 2x.$$

$$2 \sin x \cdot \sin y = (\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$2 \cos x \cdot \cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)$$

$$\cos(3x+2x) + \cos(3x-2x) = 2 \cos 3x \cdot \cos 2x.$$

$$\cos x - \sin y = \cos x + \sin(-y) =$$

$$2 \cos x \cdot \cos$$

$$2 \cos x \cdot \sin y = (\sin(x+y) + \sin(x-y)) =$$

$$= \sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos y - \sin y \cdot \cos x$$

$$2 \sin x \cdot \cos y = \sin(x+y) + \sin(x-y)$$

$$2 \sin(3x+2x) + \sin(3x-2x) =$$

$$= 2 \sin 3x \cdot \cos 2x.$$

$$2 \cos 3x \cdot \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 3x \cdot \cos 2x.$$

$$2 \cos x$$

$$2 \cos 2x (\cos 3x - \sin 3x)$$

$$\pm \sqrt{1 - 2 \sin 10x}$$

$$\sqrt{2} \sin$$

$$\cos(\cos 3x - \sin 3x)$$

$$\cos(x+y) - \cos(x-y) =$$

$$\cos(x+y) - \sin(x-y)$$

$$2 \cos 3x \cdot \cos 2x - 2 \sqrt{2} \cos 3x + \sqrt{2} = 2 \sin 3x \cdot \cos x$$

$$2 \cos 3x (\cos 2x - \sqrt{2} \cos 3x) = 2 \sin 3x \cos x \sqrt{2}$$

$$\cos x + \sin(-y) \sqrt{2} (2 \cos^2 3x - 1)$$

$$2 \cos 2x (\cos 3x - \sin 3x) = \sqrt{2} \cos 10x$$