

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра-
боты без вложенного задания не проверяются.

- ✓ 1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
- ✓ 2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

- ✓ 4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.

- ✓ 5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

- ✓ 6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$15 = 16875 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 5^4 \cdot 3^3$$

восьмизначное число $\Rightarrow$ 8-произведение 8-ми цифр

$$\begin{array}{l} 1) 4 \times "5" + 3 \times "3" + 1 \times "1" \\ 2) 4 \times "5" + 1 \times "9" + 1 \times "3" + 2 \times "1" \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \text{варианты набора цифр,} \\ \text{из которых должно} \\ \text{состоять число} \end{array} \right.$$

$3 \times 3 = 9$ - цифра, можем использовать

$3 \times 5 = 15$ - число, не можем использовать

$5 \times 5 = 25$ - число, не можем использовать

$$1) 1 \times "1" \Rightarrow 8 \text{ вариантов расстановки цифры "1"}$$

$$3 \times "3" \Rightarrow C_7^3 \text{ вариантов расстановки цифр "3"} \\ (\text{1 место уже занято цифрой "1"})$$

остальные места займут цифры "5" $\Rightarrow$
1 вариант расстановки цифр "5"

$$n_1 = 8 \cdot C_7^3 \cdot 1 = \frac{8 \cdot 7!}{(7-3)! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 4! \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{4! \cdot 2 \cdot 3} = 8 \cdot 5 \cdot 7 = 40 \cdot 7 = 280$$

$$2) 1 \times "9" \Rightarrow 8 \text{ вариантов расстановки цифры "9"}$$

$$1 \times "3" \Rightarrow 7 \text{ вариантов расстановки цифры "3"}$$

$$2 \times "1" \Rightarrow C_6^2 \text{ вариантов расстановки цифр "1"}$$

(2 места уже заняты "9" и "3")

остальные места займут цифры "5" $\Rightarrow$
1 вариант расстановки цифр "5"

$$n_2 = 8 \cdot 7 \cdot C_6^2 \cdot 1 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{(6-2)! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 4! \cdot 5 \cdot 6}{4! \cdot 2} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 = 40 \cdot 21 = 840$$

$$N = n_1 + n_2 = 280 + 840 = 1120 - \text{ка-во искоемых чисел}$$

Ответ: 1120

$$5. \begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\ (|x-6|)^2 + (|y-8|)^2 = a \end{cases}$$

$$(|x-6|)^2 + (|y-8|)^2 = a$$

$$\begin{cases} x-6-y \geq 0 \\ x-6+y \geq 0 \\ 2x-12 = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \leq x-6 \\ y \geq 6-x \\ x = 12 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} \quad \begin{matrix} y_1 = x-6 \\ y_2 = 6-x \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x-6-y \geq 0 \\ x-6+y < 0 \\ -2y = 12 \end{cases}$$

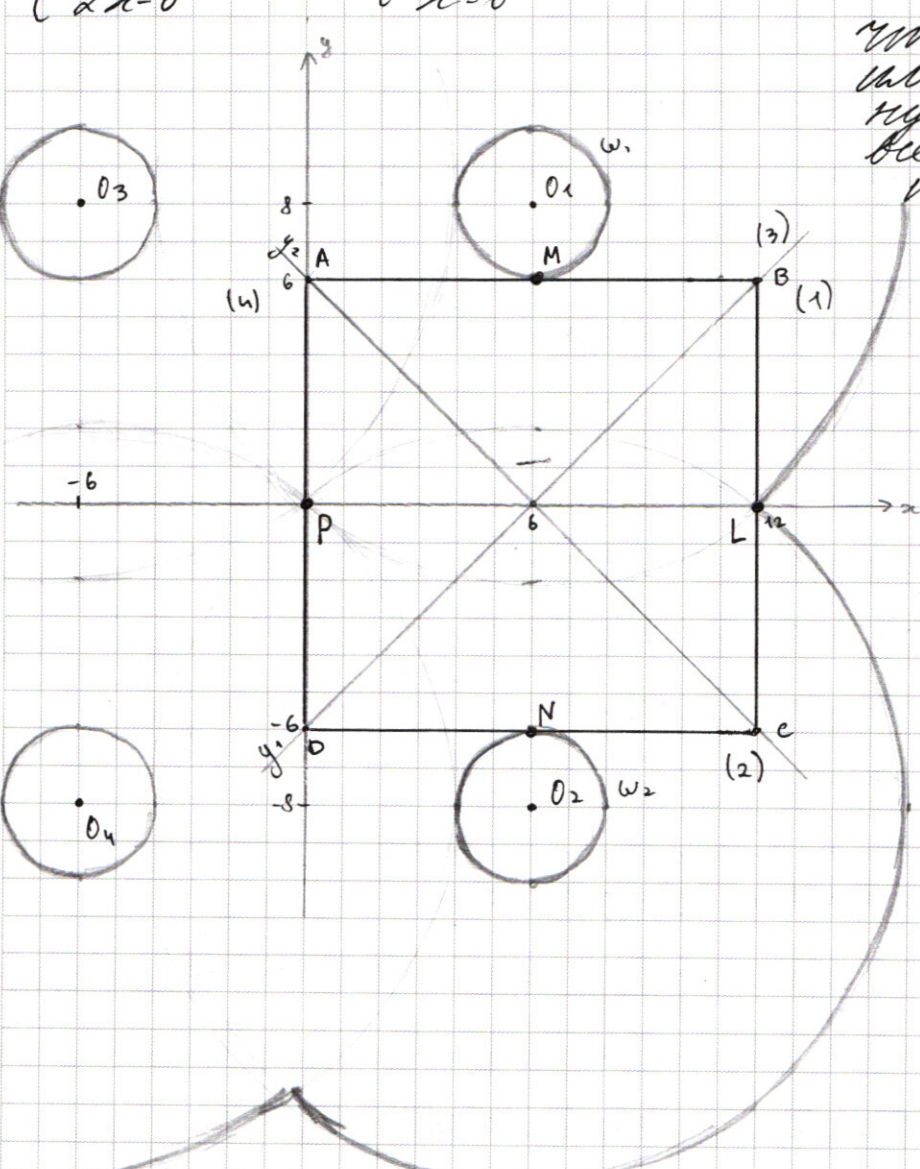
$$\begin{cases} y \leq x-6 \\ y < 6-x \\ y = -6 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x-6-y < 0 \\ x-6+y \geq 0 \\ 2y = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y > x-6 \\ y \geq 6-x \\ y = 6 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x-6-y < 0 \\ x-6+y < 0 \\ 2x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y > x-6 \\ y < 6-x \\ x = 0 \end{cases} \quad (4)$$



$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ (x-6)^2 + (y-8)^2 = a \end{cases} \quad R = \sqrt{a} \quad O_1(6;8) \quad \text{окр. с цент. } O_1$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y < 0 \\ (x-6)^2 + (y+8)^2 = a \end{cases} \quad R = \sqrt{a} \quad O_2(6;-8) \quad \text{окр. с цент. } O_2$$

$$\begin{cases} x < 0 \\ y \geq 0 \\ (x+6)^2 + (y-8)^2 = a \end{cases} \quad R = \sqrt{a} \quad O_3(-6;8) \quad \text{окр. с цент. } O_3$$

$$\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \\ (x+6)^2 + (y+8)^2 = a \end{cases} \quad R = \sqrt{a} \quad O_4(-6;-8) \quad \text{окр. с цент. } O_4$$

чтобы система имела 2 решения, нужно, чтобы все окружности имели только 2 точки пересечения с "квадратом" ABCD. Это возможно, если:

1) окружн. W_1 и W_2 касаются $y=6$ и $y=-6$ соотв. $\checkmark$ 2 решения - M и N
 $R = O_2N = O_1M = 2$
 $\checkmark$
 $a = 4 = R^2$

2) окружности проходят через начало координат, а окр. W_1 и W_2 также проходят через точку L
 $\checkmark$
 2 решения: M и L
 $\checkmark$
 $O_1P = O_2P = O_1L = O_2L = R$

$$R = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = 10$$

$$\checkmark$$

$$a = 100 = R^2$$

Ответ: при $a = 4$ и $a = 100$ система имеет ровно 2 решения

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2. \cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2 \cos \frac{7x+3x}{2} \cos \frac{7x-3x}{2} - 2 \sin \frac{7x+3x}{2} \cos \frac{7x-3x}{2} = \sqrt{2} \cos 10x$$

~~$$\cos 7x - \sin 7x + \cos 3x - \sin 3x = \sqrt{2} \cos 10x$$~~

~~$$\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 7x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 7x \right) + \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 3x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 3x \right) = \sqrt{2} \cos 10x$$~~

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x - 2 \sin 5x \cdot \cos 2x = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$\sqrt{2} \cdot \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = (\cos^2 5x - \sin^2 5x)$$

$$(\cos 5x - \sin 5x)(\sqrt{2} \cos 2x - \cos 5x - \sin 5x) = 0$$

$$\cos 5x + \sin 5x = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x \right) = \sqrt{2} \cos \left(5x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x - \sin 5x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - 5x \right)$$

$$\sqrt{2} \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} - 5x \right) \cdot \sqrt{2} (\cos 2x - \cos (5x - \frac{\pi}{4})) = 0$$

$$\begin{cases} \sin \left(\frac{\pi}{4} - 5x \right) = 0 \\ -2 \sin \frac{2x+5x-\frac{\pi}{4}}{2} \sin \frac{2x-5x+\frac{\pi}{4}}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \left(\frac{\pi}{4} - 5x \right) = 0 \\ \frac{\pi}{4} - 5x = \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$5x = \frac{\pi}{4} - \pi n$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} \sin \left(\frac{7}{2}x - \frac{\pi}{8} \right) = 0 \\ \sin \left(\frac{\pi}{8} - \frac{3}{2}x \right) = 0 \end{cases}$$

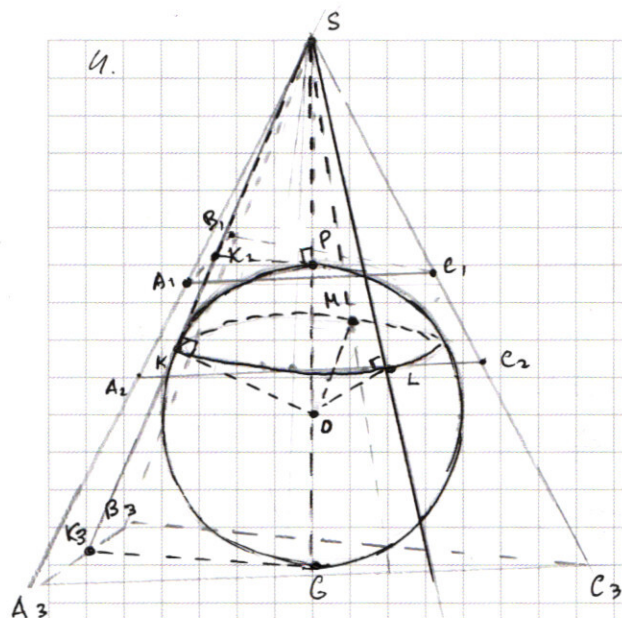
$$\begin{cases} \frac{7}{2}x - \frac{\pi}{8} = \pi n \\ \frac{\pi}{8} - \frac{3}{2}x = \pi n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{7}{2}x = \frac{\pi}{8} + \pi n \\ \frac{3}{2}x = \frac{\pi}{8} + \pi n \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi n}{7} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3} \end{cases}$$

$$n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\frac{\pi}{28}, \frac{2\pi n}{7}, \frac{\pi}{12}, \frac{2\pi n}{3}, \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}$



Дано: $W \cap A_2B_2 = K$ W - сфера с
 $W \cap B_2C_2 = M$ центром O
 $W \cap A_2C_2 = L$
 $S_{A_1B_1C_1} = 4$ $S_{A_3B_3C_3} = 9$
 $(A_1B_1C_1) \perp SO$
 $(A_3B_3C_3) \perp SO$

Найти: $\angle KLM$? $\angle KSO$?
 $S_{A_2B_2C_2} = ?$

Решение:

1. $(A_1B_1C_1) \perp SO$ $K_1 \in A_1B_1$
~~сфера~~
 $(A_1B_1C_1)$ касается $W \Rightarrow OP \perp (A_1B_1C_1)$

$$g(S; (A_1B_1C_1)) = SP \Leftrightarrow SO \cap (A_1B_1C_1) = P$$

2. $(A_3B_3C_3) \perp SO$

$K_3 \in A_3B_3$

$(A_3B_3C_3)$ - касается $W \Rightarrow OG \perp (A_3B_3C_3) \Rightarrow SO \cap (A_3B_3C_3) = G$

$$g(S; (A_3B_3C_3)) = SG$$

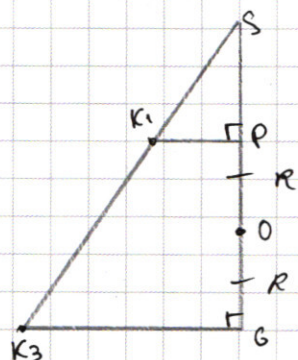
2. $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_3B_3C_3$ м.р.

$$\Rightarrow k^2 = \frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{A_3B_3C_3}}; k = \frac{g(S; (A_1B_1C_1))}{g(S; (A_3B_3C_3))} = \frac{SP}{SG}$$

$(A_1B_1C_1) \perp SO$
 $(A_3B_3C_3) \perp SO \Rightarrow (A_1B_1C_1) \parallel (A_3B_3C_3)$

$$k = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

$A_1B_1 \parallel A_3B_3$ (пересек. с (A_3SB_3))
 $B_1C_1 \parallel B_3C_3$ (пересек. с (B_3SC_3))
 $C_1A_1 \parallel A_3C_3$ (пересек. с (A_3SC_3))



поэтому $SP = h$, тогда $SG = h + 2R$

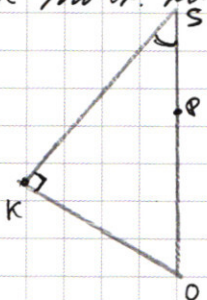
$$k = \frac{2}{3} = \frac{h}{h + 2R}$$

$$2h + 6R = 3h$$

$$h = 6R$$

3. $\triangle KSO$

K - точка касания $\Rightarrow \angle OKS = 90^\circ$



$$KO = R$$

$$SO = R + h = R + 6R = 7R$$

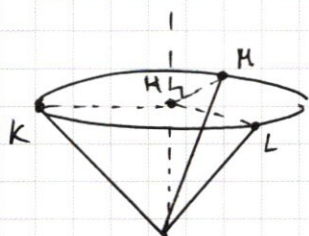
$$\sin \angle KSO = \frac{KO}{SO} = \frac{R}{7R} = \frac{1}{7} \Rightarrow \angle KSO = \arcsin \frac{1}{7}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4. SO -объ.

$$\angle SKO = \angle SLO = \angle SMO = 90^\circ \Rightarrow \triangle SKO = \triangle SLO = \triangle SMO; \angle KOS = \angle MOS = \angle LOS$$

$$KO = MO = LO = R$$



д.н. $KH \perp SO$

$MH_2 \perp SO$

$LH_3 \perp SO$

точки совпадают

$H_1 = H_2 = H_3$

т.к. $\triangle H_1OK = \triangle H_2OM = \triangle H_3OL$

$(KLM) \perp SO$

или $A_2B_2C_2$ - сечение угла (KLM) ,
то $\triangle A_2B_2C_2 \sim \triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_3B_3C_3$
(аналогично 1-ым
лучам)

$$g(S; (KLM)) = g(S; (A_2B_2C_2)) = SH$$

$$\triangle OKS \sim \triangle OHK \Rightarrow \frac{OK}{OH} = \frac{OS}{OK} \Rightarrow OH = \frac{OK^2}{OS} = \frac{R^2}{4R} = \frac{R}{4}$$

$$SH = OS - OH = \frac{48}{4}R$$

$$\angle KSO = \angle OKH$$

$$\bullet \angle < 90^\circ \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \sin^2 \angle KSO} = \sqrt{1 - \frac{1}{49}} = \frac{\sqrt{48}}{7}$$

$$KH = OK \cdot \cos \alpha = R \cdot \frac{\sqrt{48}}{7}$$

$$\triangle A_2B_2C_2 \sim \triangle A_1B_1C_1 \Rightarrow \frac{S_{A_2B_2C_2}}{S_{A_1B_1C_1}} = \left(\frac{g(S; (A_2B_2C_2))}{g(S; (A_1B_1C_1))} \right)^2 = \left(\frac{SH}{SP} \right)^2 =$$

$$= \left(\frac{h}{\frac{48}{4}R} \right)^2 = \left(\frac{4R \cdot 4}{48R} \right)^2 = \frac{49^2}{48^2}$$

$$S_{сеч} = S_{A_2B_2C_2} = S_{A_1B_1C_1} \cdot \frac{49^2}{48^2} = \frac{4 \cdot 49^2}{48^2} =$$

$$= \frac{2401}{576}$$

Ответ: $\angle KSO = \arcsin \frac{1}{7}$

$$S_{сеч} = \frac{2401}{576}$$

$$3. \left\{ \left(\frac{x^4}{y^2} \right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \right.$$

$$\left. \begin{cases} 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases} \right.$$

$$\begin{cases} y > 0 \\ y - xy > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y > 0 \\ xy < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y > 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

$$2y^2 - 2xy + xy - x^2 = 4x + 8y$$

$$2y(y - x) + x(y - x) = 4x + 8y$$

$$(2y + x)(y - x) = 4(x + 2y)$$

$$(x + 2y)(y - x - 4) = 0$$

$$\begin{cases} x = -2y \\ y = x + 4 \end{cases}$$

$$\left(\frac{(2y)^4}{y^2} \right)^{\lg y} = (2y)^{\lg(2y^2)}$$

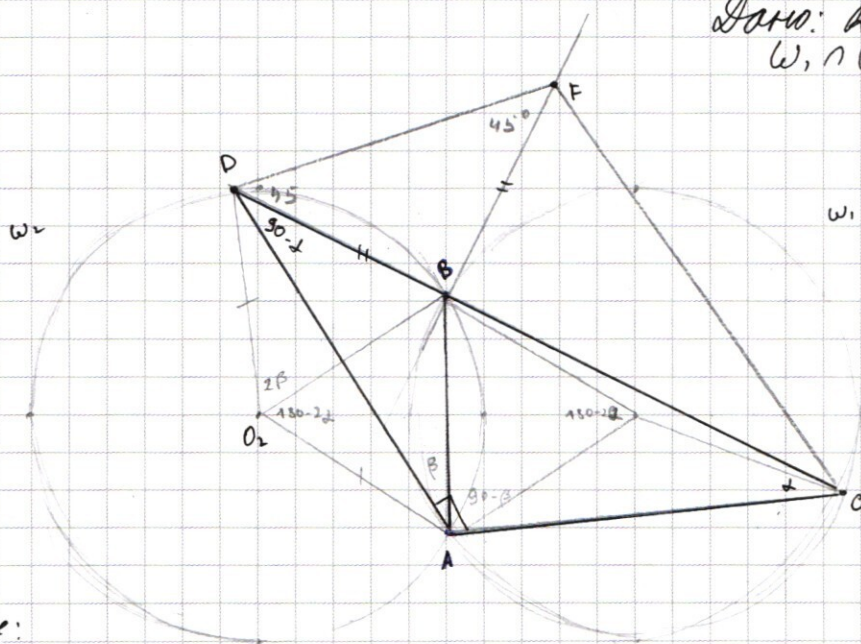
$$(16y)^2 \lg y = (2y) \lg^2 y^2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6

Дано: $R_1 = R_2 = 13$; $B \in CD$
 $W_1 \cap W_2 = A \cup B$; $\angle CAD = 90^\circ$
 $BF \parallel CD$ ($BC = 10$)

Haar: CF-? S AFC-?



Решение:

1. пусть $\angle ACD = \alpha \Rightarrow \angle ADC = 90^\circ - \alpha$ (O_2 - центр W_2 ; O_1 - центр W_1)

∠ ADB отпр. на АВ - вписанный

$\angle AOB$ отп. на AB - центральный $\angle$ $\angle AOB = 2 \angle ADB = 180 - 2 \angle$

 ΔAOB
$$AO_2 = O_2B = R$$
$$AO_2 = O_2B = R \quad \Rightarrow \quad \angle AO_2B = 180^\circ - 2\alpha \quad \angle O_2AB = \angle O_2BA = \alpha$$
$$\angle O_2AB = \angle O_2BA = \angle$$

2. $\triangle AOC_2B = \triangle AOC_1B$

AB - ошгу.

$$AO_2 = AO_1 = BO_2 = BO_1 = R$$
$$\rightarrow \angle O_2AB = \angle O_2BA = \angle O_1AB = \angle O_1BA = x$$
$$\angle AOB = 180 - 2\angle$$

2. AO, B - центр, отпр. на AB

∠ ACB - внутр., опущ. на AB

$$\angle AOB = 2 \cdot \angle ACB$$
$$180 - 2x = 2x$$
$$180 = 4x$$
$$\alpha = 45^\circ$$

3. $\angle ACD = \angle$

$$\angle ADC = 90^\circ$$
 $\angle CAD = 90^\circ$
$$BD = BF$$
 $\angle DBF = 90^\circ$
$$\angle ACD = \angle ADC = 45^\circ$$
$$\angle BOF = \angle DFB = 45^\circ$$

DBF - право

равнодей

по теореме sin-ов:

$$4 \quad \frac{AB}{\sin 45^\circ} = \frac{BC}{\sin \angle BAC} = 2R = 26 \Rightarrow AB = 26 \cdot \sqrt{2}$$

$$5. \angle BAD = \beta \Rightarrow \angle BAC = 90 - \alpha \Rightarrow \angle ABC = 45 + \beta$$

$$\angle ABD = 135 - \beta$$

по теореме синусов:

$$\frac{AC}{\sin \angle ABC} = 2R$$

$$\frac{AD}{\sin \angle ABD} = 2R \Rightarrow$$

$$\sin(45 + \beta) = \sin(135 - \beta)$$

$$\sin \angle ABC = \sin \angle ABD$$

$$45 + \beta = 135 - \beta$$

$$2\beta = 90$$

$$\beta = 45^\circ$$

AB - биссектриса, медиана, высота в $\triangle ACD$

$$\Rightarrow BD = BC$$

$$CD = 2AB$$

$$BD = BF = BC = AB = 26\sqrt{2}$$

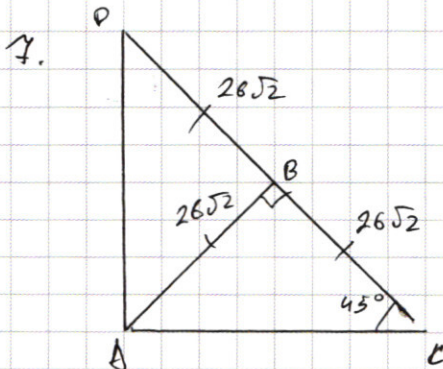
$$6. BF = BC = 26\sqrt{2}$$

$$\angle FBC = 90^\circ$$

$\Rightarrow \triangle FBC$ - прямоугольный, равнобедренный

$$\angle BFC = \angle BCF = 45^\circ$$

$$CF = BC \cdot \sqrt{2} = 26 \cdot 2 = 52$$



$$\angle ACB = \angle FCB = 45^\circ \Rightarrow \angle ACF = 90^\circ$$

$$S_{AFC} = \frac{1}{2} AC \cdot FC$$

$$\angle ACD = 45^\circ \Rightarrow \frac{AC}{DC} = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$DC = 52\sqrt{2}$$

$$AC = \frac{\sqrt{2} \cdot DC}{2} = \frac{52 \cdot 2}{2} = 52$$

$$AC = 52$$

$$FC = 52$$

$$S_{AFC} = \frac{1}{2} \cdot 52 \cdot 52 = 52 \cdot 26 = 1352$$

$$\text{Ответ: } FC = 52; S_{AFC} = 1352$$

$$\begin{array}{r} \times 52 \\ 26 \\ \hline 312 \\ + 104 \\ \hline 1352 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 7\alpha + \cos 3\alpha - \sqrt{2} \cos 10\alpha = \sin 7\alpha + \sin 3\alpha$$

$$2 \cos 2\alpha (\cos 5\alpha - \sin 5\alpha) = \sqrt{2} \cos 10\alpha$$

$$\cos^2 5\alpha - \sin^2 5\alpha = \sqrt{2} (\cos 5\alpha - \sin 5\alpha) (\cos 5\alpha + \sin 5\alpha)$$

$$\cos 5\alpha$$

$$(\cos 5\alpha - \sin 5\alpha) (2 \cos 2\alpha - \sqrt{2} \cos 5\alpha - \sqrt{2} \sin 5\alpha) = 0$$

$$\cos 5\alpha + \sin 5\alpha = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5\alpha \right) =$$

$$= \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - 5\alpha \right)$$

$$(\cos 5\alpha - \sin 5\alpha) (2 \cos 2\alpha - \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos \left(\frac{\pi}{4} - 5\alpha \right)) = 0$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos 90^\circ + \cos 30^\circ = 2 \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$60^\circ - 30^\circ \quad \cos 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 60^\circ \sin 30^\circ$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{4} - 5\alpha \right) = 0 \quad \frac{\pi}{4} - 5\alpha = \pi n$$

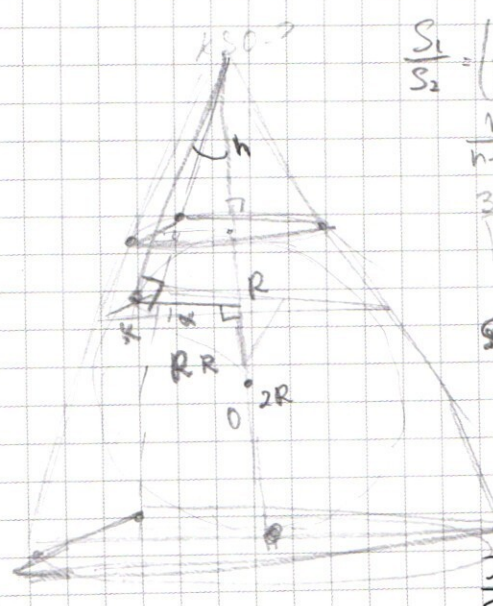
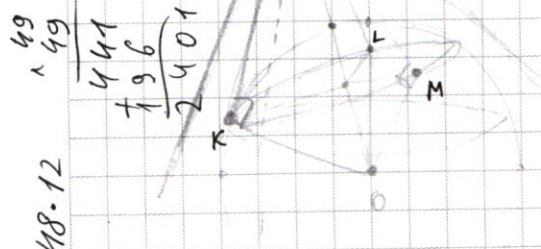
$$\cos \left(5\alpha + \frac{\pi}{4} \right) = 0 \quad 5\alpha + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$5\alpha = \pi n + \frac{\pi}{4}$$

$$5\alpha = \frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$\cos 2\alpha - \cos \left(5\alpha + \frac{\pi}{4} \right) = -2 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin$$

$$\frac{2\alpha - \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{3\alpha + \frac{\pi}{4}}{2} \quad \cos \frac{\pi}{4}$$



$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{h}{h+2R} \right)^2$$

$$\frac{h}{h+2R} = \frac{2}{3}$$

$$3h = 2h + 6R$$

$$h = 6R$$

$$\sin \alpha = \frac{R}{hR} = \frac{R}{6R \cdot R} = \frac{1}{6}$$

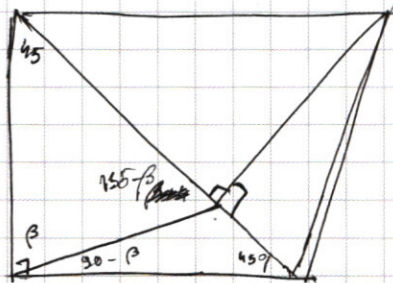
$$\overline{OK} = 40$$

$$\frac{OK}{OS} = \frac{OK}{KS} = \frac{40}{60}$$

$$y \geq 3^2 + 4 \cdot 3^{81}$$

$$y < 85 + (3^{81} - 1)x$$

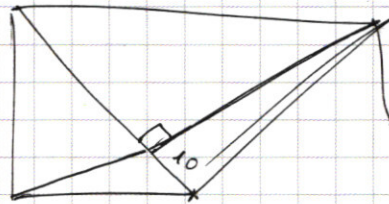
$$\begin{array}{r} 85 \overline{) 5} \\ \underline{85} \\ -5 \\ \hline 35 \end{array}$$



$$180 - 90 + \beta - 45^\circ = 45 + \beta$$

$$90 - \beta + 45^\circ = 135 - \beta$$

$$\frac{AC}{\sin(45 + \beta)} =$$



$$\frac{10}{\sin(90 - \beta)} = 20$$

$$10 = 20 \cdot \cos \beta$$

$$\cos \beta = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

$$(\sqrt{2}y - x)(\sqrt{2}y + x) - 4(x - 2y)$$



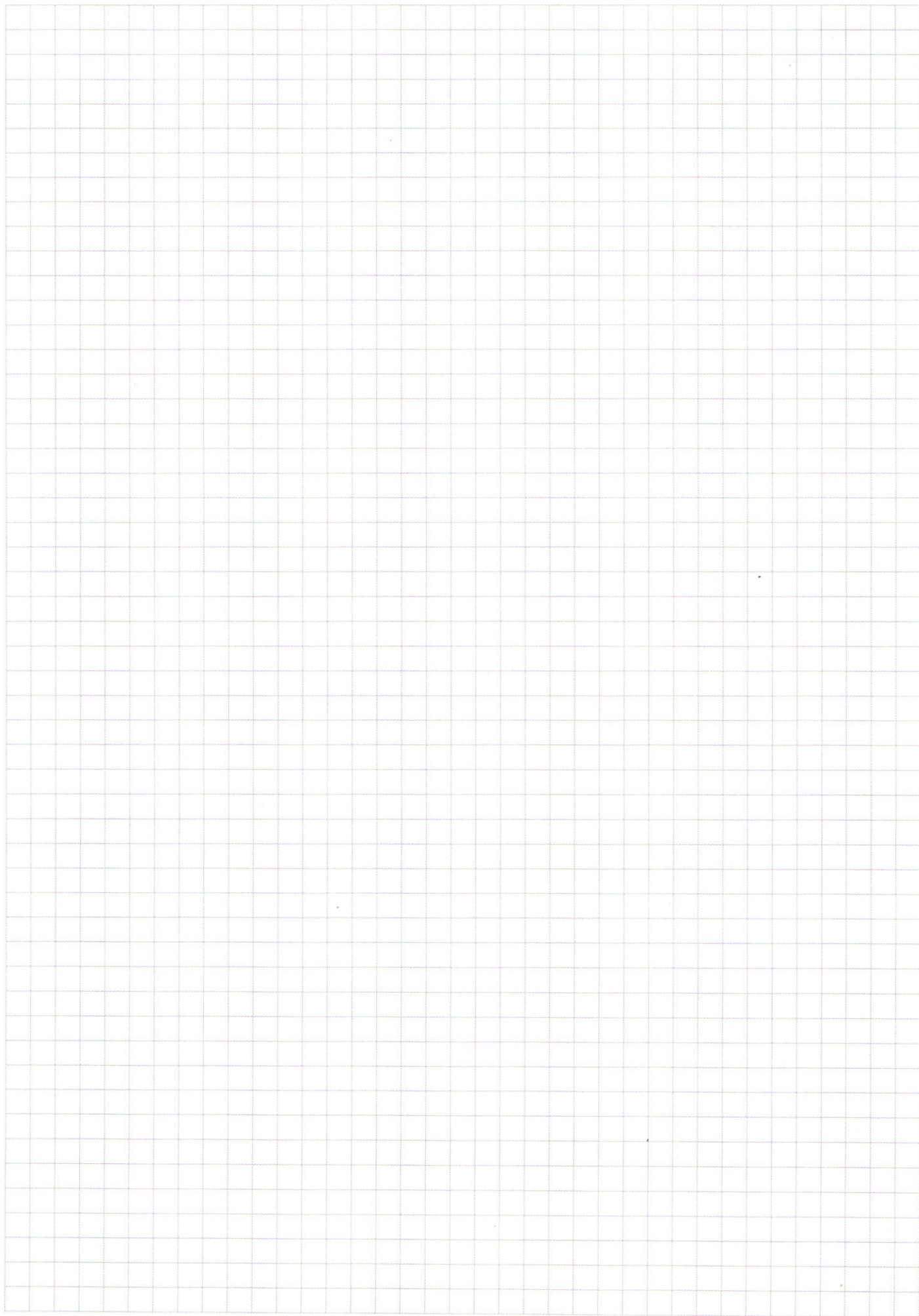
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2 \cdot \cos \frac{10x}{2} \cdot \cos \frac{4x}{2} \quad 2 \cdot \sin \frac{10x}{2} \cdot \cos \frac{4x}{2}$$

$$2\cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2} \cos 10x = 0$$

$$CF = \sqrt{a^2 + (b\sqrt{2} - a)^2}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\sqrt{2(2\cos^2 5x - 1)}$$

$$\begin{aligned}\cos 2x \cdot \sin 2x &= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin 2x \right) = \sqrt{2} \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \\ \cos 3x \cdot \sin 3x &= \sqrt{2} \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{2} (\cos(7x + \frac{\pi}{4}) + \cos(3x + \frac{\pi}{4})) &= \sqrt{2} \cos 10x \\ 2 \cdot \cos \frac{10x - \frac{\pi}{2}}{2} \cdot \cos \frac{4x + 0}{2} &= \cos 10x \end{aligned}$$

$$2 \cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos 2x = \cos 10x$$

$$\cos(10x) = \cos\left(5x + \frac{\pi}{4} + 5x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\left(\frac{x}{y^2}\right)^{\log y} = (-x)^{\log(-xy)}$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$\begin{aligned} y > 0 & \quad \lg(-xy) = \lg y + \lg(-x) \\ xy < 0 \end{aligned}$$

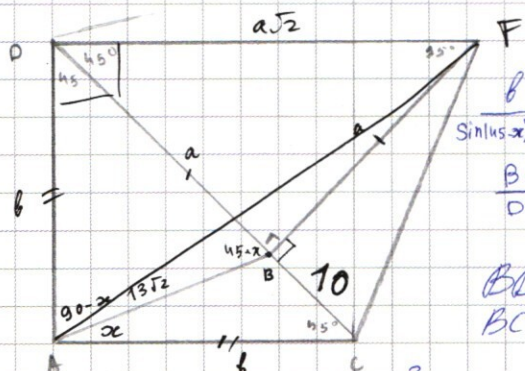
$$12x^{4 \lg y} = (-x)^{\lg y + \lg(-x)} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$2y^2 - 8y - x^2 - 4x = xy$$

$$2y(y-u) - x(x+u) = xy$$

$$\sin(45-x) = \sin 45 \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos 45 = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x - \sin x)$$

$$135 - 90 + x = 45 + 2$$



$$\frac{b}{\sin(\alpha)} = \frac{BC}{\sin \alpha} = \frac{DB}{\sin(90-\alpha)} = 36$$

$$\frac{BC}{DB} = \lg x$$

$$BD = 26 \cos \alpha$$
$$BC = 26 \sin \alpha$$

$$n = \binom{3}{2} \cdot 6$$

$$C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

$$C_x^n = \frac{k!}{(k-n)!}$$

$$C_k^n = \frac{n!}{(k-n)!n!}$$

$$68 \cdot 6.5 = \frac{8 \cdot 6.5}{6 \cdot 21} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 5}{2} = \frac{40 \cdot 21}{7} = 840$$

$$1 \times 9'' + 1 \times 3'' + 4 \times 5'' + 2 \times 1''$$

$$\begin{array}{r} 18845 \overline{) 5375} \\ \underline{15} \\ 18 \\ \underline{15} \\ 37 \\ \underline{35} \\ 25 \\ \underline{25} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3375 \overline{) 5} \\ \underline{30} \\ 37 \\ \underline{35} \\ 25 \\ \underline{25} \\ 0 \end{array}$$

$$16875 = 5^4 \cdot 3^3$$

1 2 2 2 _ _ _ _
лет 0 ель 1

$$8 \cdot C_7^3 = \frac{8 \cdot 7!}{(7-3)! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 3} = 40 \cdot 4 = 160$$

$$\begin{array}{r} 675 \overline{) 4535} \\ \underline{5} \\ 13 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 135 \overline{) 18025} \\ \underline{10} \\ 35 \\ \underline{35} \\ 0 \end{array}$$

$$C_5^3$$

$$1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5$$

$$4 + 3 + 2 + 1 = 10$$

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!2!} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ 25 \\ + 125 \\ \hline 30 \\ \checkmark 625 \\ \quad 25 \\ \quad 4375 \\ + 1250 \\ \hline 16875 \\ 3 \times 2 = 6 \end{array}$$

$$|x-6-y| + |x-6+y| = 12$$

$$(|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a \text{ - окружн.}$$

решения

$$y_1 = x-6$$

$$y_2 = 6-x$$

$$\begin{cases} x-6-y \geq 0 & y \leq x-6 & y \leq x-6 \\ x-6+y \geq 0 & y \geq x-6 & y \geq 6-x \\ x-6-y + x-6+y = 12 & x = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-6-y \geq 0 & y \leq x-6 \\ x-6+y \leq 0 & y \leq 6-x \\ x-6-y - x+6+y = 12 & y = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-6-y \leq 0 & y \geq x-6 \\ x-6+y \geq 0 & y \geq 6-x \\ -x+6+y + x-6+y = 12 & y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-6-y \leq 0 \\ x-6+y \leq 0 \\ 2x-12 = -12 & x = 0 \end{cases}$$

$$(|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a$$

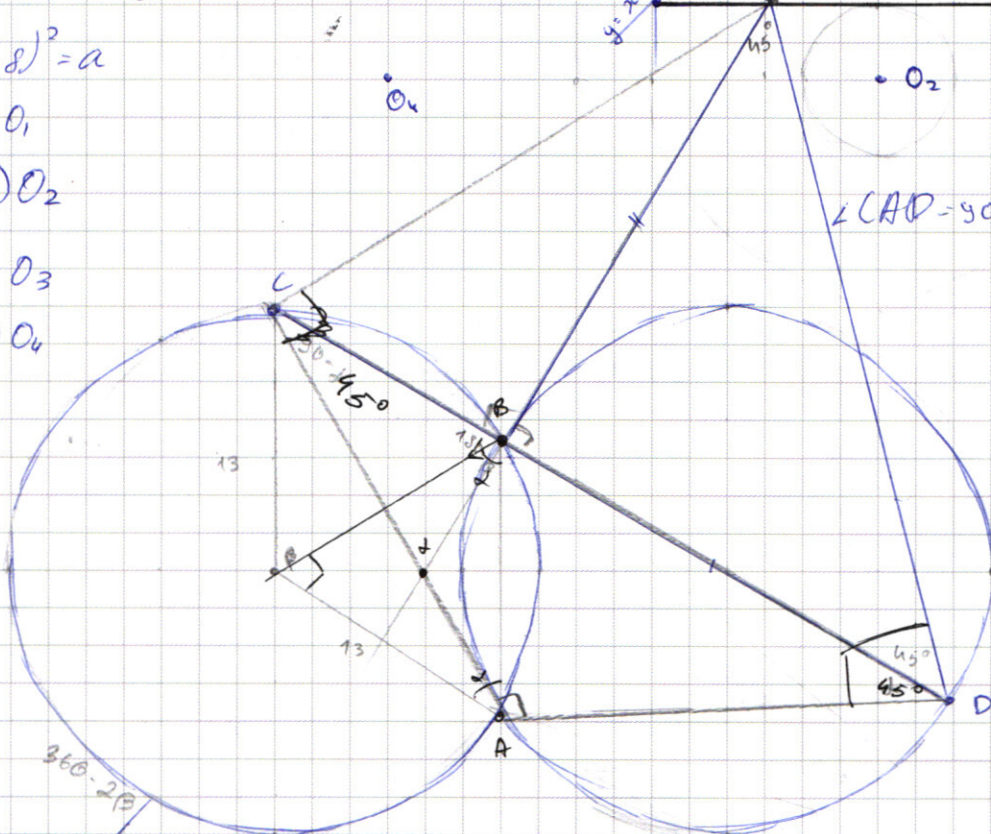
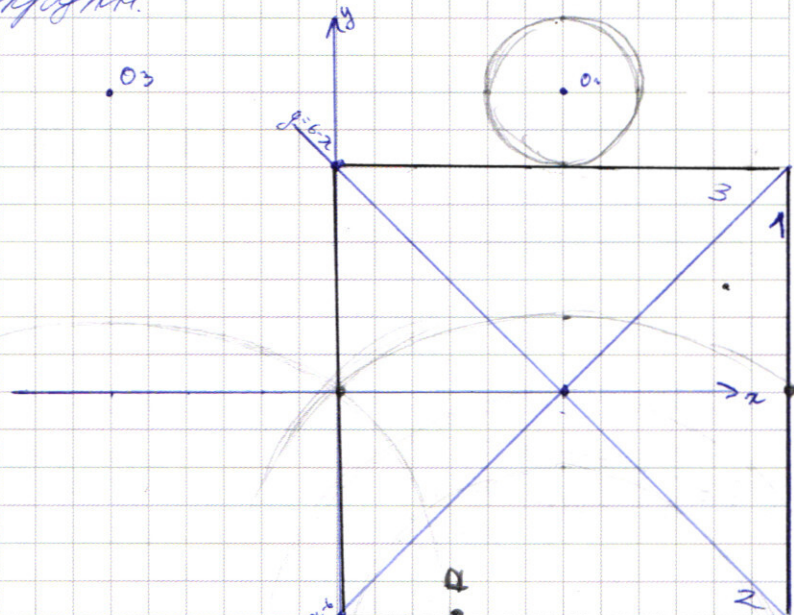
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} (6; 8) O_1$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 0 \end{cases} (6; -8) O_2$$

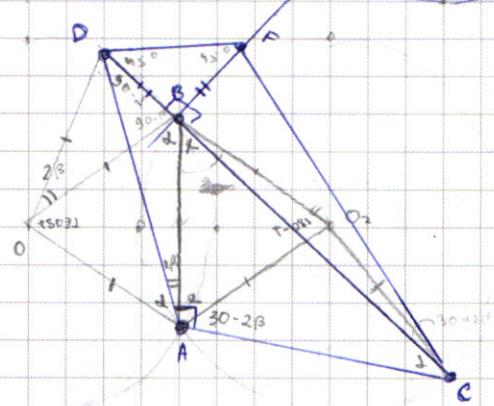
$$\begin{cases} x \leq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} (-6; 8) O_3$$

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq 0 \end{cases} (-6; -8) O_4$$

$$a = 4$$



$$\begin{aligned} O_1 &= (6; 8) \\ O_2 &= (6; -8) \\ O_3 &= (-6; 8) \\ O_4 &= (-6; -8) \end{aligned}$$

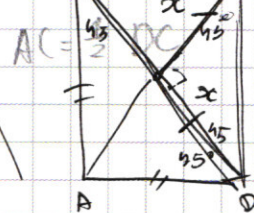


F-на окр.

$$\frac{CB}{CA} = \frac{CX}{CD} = \frac{BX}{AD} \\ 2XB = CX$$

$$\angle = 60^\circ$$

$$AB = \sqrt{13^2 - 2^2} = \sqrt{169 - 4} = \sqrt{165} = 13\sqrt{2-33}$$



$$\angle = 30 + 23 = 53^\circ$$