

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИС

Бланк задания должен быть вложен в
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$16875 = 3^3 \cdot 5^4$$

Нам необходимо, чтобы произведение цифр восьмизначного числа было $(3^3 \cdot 5^4)$. Так как числа 3 и 5 — простые, то искомое восьмизначное число должно содержать цифры: 1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5.

Значит, всего искомых чисел:

$$C_8^3 \cdot C_5^4 = \frac{8!}{3!5!} \cdot \frac{5!}{4!1!} = \frac{8!}{3!4!} = 5 \cdot 7 \cdot 8 = 280$$

Ответ: 280

№2

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$\sqrt{2} \cos 5x \cos 2x - \cos^2 5x + \sin^2 5x = \sqrt{2} \sin 5x \cos 2x$$

$$\sqrt{2} (\cos 5x \cos 2x - \sin 5x \cos 2x) = \cos^2 5x - \sin^2 5x$$

$$\sqrt{2} \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = (\cos 5x + \sin 5x) (\cos 5x - \sin 5x)$$

$$\begin{cases} \cos 5x - \sin 5x = 0 \\ \sqrt{2} \cos 2x = \cos 5x + \sin 5x \end{cases}$$

Решаем первое уравнение совокупности:

$$\cos 5x - \sin 5x = 0$$

$$\sin 5x - \cos 5x = 0$$

$$\sqrt{2} \sin(5x - \frac{\pi}{4}) = 0 \quad (\text{по методу вспомогательного угла})$$

$$5x - \frac{\pi}{4} = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}$$

Запишем второе уравнение совокупности:

$$\sqrt{2} \cos 2x = \cos 5x + \sin 5x$$

$$\sqrt{2} \cos 2x = \sqrt{2} \sin(5x + \frac{\pi}{4}) \text{ (по методу равносильных уравнений)}$$

$$\cos 2x = \sin(5x + \frac{\pi}{4})$$

$$\sin(2x + \frac{\pi}{2}) = \sin(5x + \frac{\pi}{4})$$

~~Решим~~ это уравнение разбиваемся на два случая:

$$\text{I} \quad 2x + \frac{\pi}{2} = 5x + \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{II} \quad 2x + \frac{\pi}{2} = \pi - 5x - \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$7x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7}, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}$

$$x_2 = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_3 = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi t}{7}, t \in \mathbb{Z}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

Решим первое уравнение системы:

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

$$\boxed{y > 0; x < 0}$$

Логарифмируем данное уравнение по основанию 10.

$$\lg y \cdot \lg\left(\frac{x^4}{y^2}\right) = \lg(-x) \cdot \lg(-xy)$$

$$\lg y (4 \lg|x| - 2 \lg|y|) = \lg|x| (\lg|x| + \lg y)$$

$$4 \lg y \lg|x| - 2 \lg^2 y = \lg^2|x| + \lg|x| \lg y$$

(т.к. $y > 0$, модуль можем раскрыть)

$$\lg^2|x| + \lg|x| \lg y - 4 \lg y \lg|x| + 2 \lg^2 y = 0$$

$$\lg^2|x| - 3 \lg y \lg|x| + 2 \lg^2 y = 0$$

$$\left(\lg|x| - \frac{3 \lg y}{2}\right)^2 = \frac{\lg^2 y}{4}$$

Решим второе уравнение системы:

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$x^2 + 4x + xy + 8y - 2y^2 = 0$$

$$x^2 + x(4+y) + 8y - 2y^2 = 0$$

$$x = \frac{-4-y \pm \sqrt{3y-4}}{2}$$

(решает данное ур-ие как квадратное относительно x)

$$x_1 = \frac{-4-y + \sqrt{3y-4}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-4-y - \sqrt{3y-4}}{2}$$

$$x_1 = y - 4 \quad x_2 = -2y$$

Подставим два уравнения в систему:

$$\begin{cases} (\lg|x| - \frac{3\lg y}{2})^2 = \frac{\lg^2 y}{4} \\ \begin{cases} x = y - 4 \\ x = -2y \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lg|x| - \frac{3\lg y}{2} = \frac{\lg y}{2} \\ \lg|x| - \frac{3\lg y}{2} = -\frac{\lg y}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y - 4 \\ x = -2y \end{cases}$$

Рассмотрим все четыре случая

$$\text{I} \begin{cases} \lg|x| - \frac{3\lg y}{2} = \frac{\lg y}{2} \\ x = y - 4 \end{cases}$$

$$2\lg|x| = 4\lg y$$

$$|x| = y^2$$

$$|y - 4| = y^2 \text{ (т.к. } y^2 \geq 0 \text{ то получим со своим знаком)}$$

$$y^2 - y + 4 = 0$$

$$\emptyset \quad (D < 0)$$

$$\text{II} \begin{cases} \lg|x| - \frac{3\lg y}{2} = \frac{\lg y}{2} \\ x = -2y \end{cases}$$

$$|x| = y^2 \text{ (как в случае I)}$$

$$|-2y| = y^2 \text{ (т.к. } y^2 \geq 0 \text{, то получим со своим знаком)}$$

$$y(y - 2) = 0$$

$$y = 0,$$

не соответствует ОДЗ

$$\boxed{y = 2 \\ x = -4}$$

$$\text{III} \begin{cases} \lg|x| - \frac{3\lg y}{2} = -\frac{\lg y}{2} \\ x = y - 4 \end{cases}$$

$$\lg|x| = \lg y$$

$$|x| = y$$

$$|y - 4| = y$$

$$y \geq 4 \\ y - 4 = y \\ \emptyset$$

$$y < 4 \\ -y + 4 = y \\ y = 2 \\ \boxed{y = 2 \\ x = -2}$$

$$\text{IV} \begin{cases} \lg|x| - \frac{3\lg y}{2} = -\frac{\lg y}{2} \\ x = -2y \end{cases}$$

$$|x| = y \text{ (как в 3-м примере)}$$

$$|-2y| = y$$

$$\emptyset \text{ (} y = 0 \text{ не соответствует ОДЗ)}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

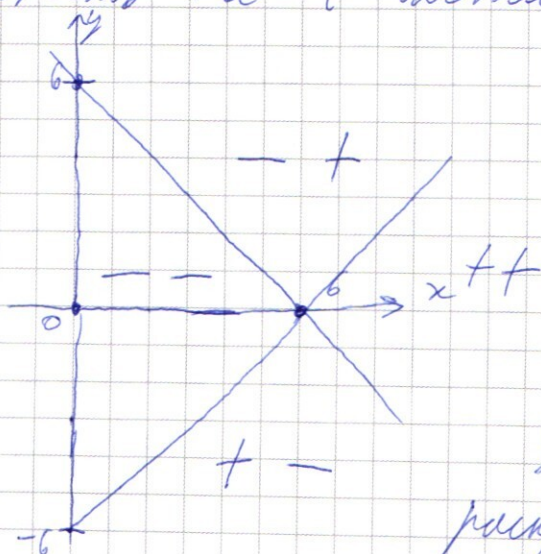
Найдем, у нас два корня: $(-4; 2)$, $(-2; 2)$

Проведем проверку: подставим данные корни в систему и убедимся, что оба корня являются решением системы

Ответ: $(-4; 2)$, $(-2; 2)$

№ 5

Рассмотрим на первое уравнение системы. На координатной плоскости отметим две прямые, которые задаются уравнениями $x - 6 - y = 0$; $x - 6 + y = 0$. Получим, что они пересекаются в точке $(0; 6)$ и делят плоскость на 4 части. Отметим, с какими зна-



кам раскрывается модуль двух выражений из первого уравнения системы.

Теперь рассмотрим каждую из четырех частей, раскроем модуль из первого

уравнения. Получим, что в каждой из четырех частей уравнение задаёт прямую, параллельную

осей координат. В итоге, как поместим на все четыре оси вместе, получим, что первое уравнение системы задаст квадрат с вершинами $(0; -6), (0; 6), (12; 6), (12; -6)$.

Теперь рассмотрим второе уравнение системы. $a \geq 0$, в противном случае равенств нет (т.к. в правой части сумма квадратов, квадрат больше или равен нулю).

Также, как и с первым уравнением, разделим плоскость на четыре части и поместим на каждую, как они раскрываются. Разделим плоскость на четверти и рассмотрим каждое уравнение. Получим, что второе уравнение системы задаст четыре окружности с центрами в точках $(6; 8), (6; -8), (-6; 8), (-6; -8)$.

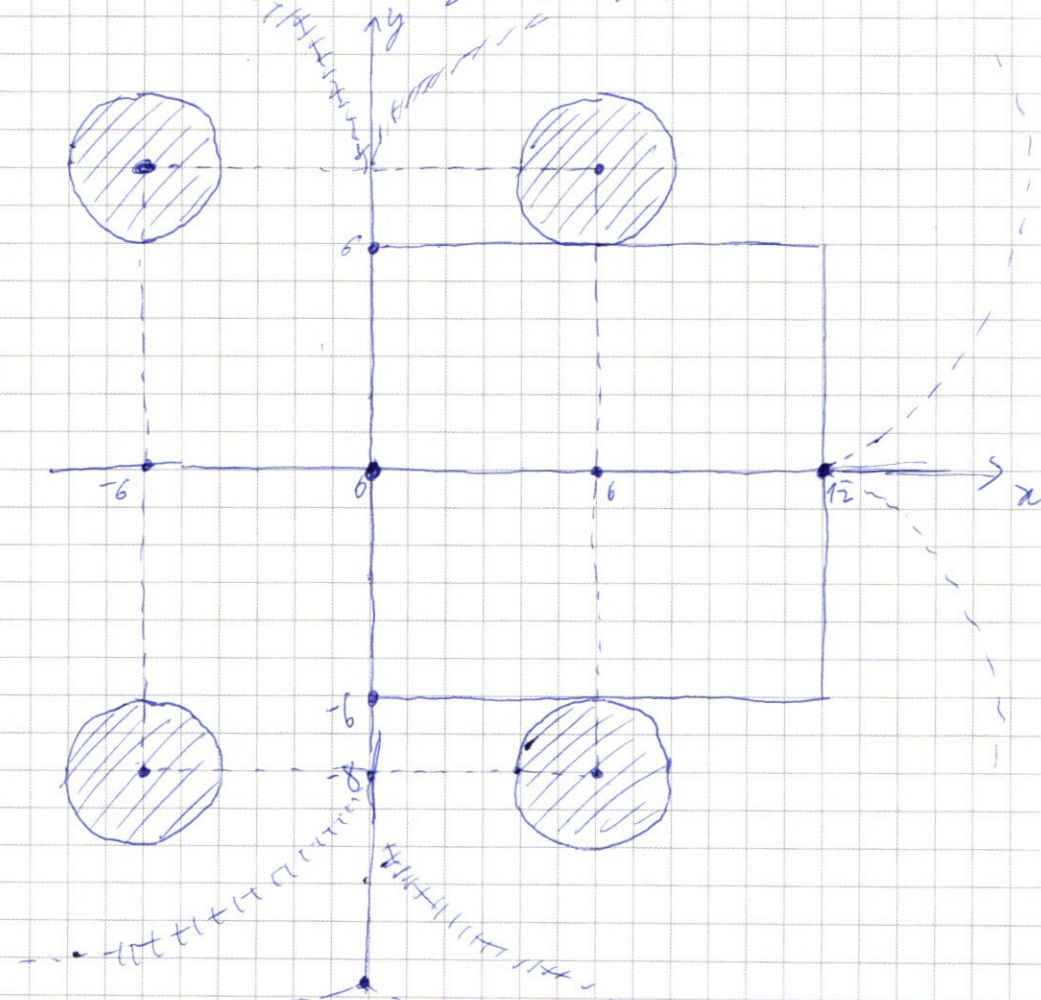
Теперь объединим два уравнения системы и изобразим их на координатной плоскости. Возьмем $a = 0$ и будем постепенно увеличивать значения a , пока не получим две общие точки квадрата и первого уравнения и окружностей из второго.

I при $a = 4$ у нас общие точки, две окружности касаются квадрата в одной точке квадрата

II при $a = 100$ у нас также две общие точки, $(0; 0)$ и $(12; 0)$, все четыре окружности переходят

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

хотя бы через одну из двух точек



Заштрихованные окружности - при $a = 4$

Прочерченные пунктирные радиусы - при $a = 100$
(также при $a = 100$ точка $(0,0)$ ~~является~~ лежит
на каждой из четырех окружностей)

Ответ: $a_1 = 100$

$a_2 = 4$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

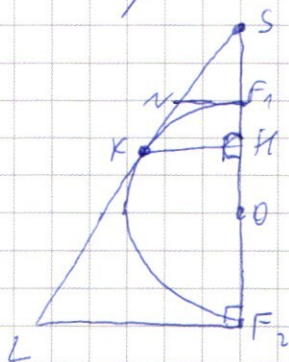
Ненасыщенный $\angle$ KSO

$$f_y \leq K_{SO} = \frac{LF_2}{5F_2} = \frac{\sqrt{3}R}{\sqrt{2} \cdot 6R} = \frac{1}{2\sqrt{6}}$$

$$\angle KSO = \arctg \frac{1}{2\sqrt{6}}$$

omben: $\angle KSO = \arctg \frac{1}{2\sqrt{6}}$

Теперь решим вторую часть задачи.



Провести КН-перпендикуляр к SO.

$$\frac{K_H}{L F_2} = \frac{K_S}{L S} \text{ (не требуется, } KHS \text{ и } SLF_2 \text{ м.к.)}$$

$$\angle SHK = \angle SF_2L \text{ и } \angle S - \text{общий})$$

$$KH = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} R \cdot 2\sqrt{6} R}{\left(\frac{5\sqrt{3} R}{\sqrt{5}} \right)} = \frac{2\sqrt{6}}{5} R$$

Менее нагнем NF_1 , максим. разн. попутное ΔNF_1 и ΔLSF_2 .

$$\frac{NF_1}{LF_2} = \frac{SF_1}{SF_2} \Rightarrow NF_1 = \frac{LF_2 \cdot SF_1}{SF_2}$$

$$NF_1 = \frac{\sqrt{3}R \cdot 4R}{\sqrt{2} \cdot 6R} = \sqrt{\frac{2}{3}} R$$

Теперь рассмотрим два параллельных треугольника, один из них, это сечение площади $\mathcal{C}$, который находится в головке. Другой же содержит КН, третья исходная площадь равна S т.е. $\mathcal{C}$.

$$\frac{4}{S} = \left(\frac{\sqrt{\frac{2}{3}} R}{\frac{2\sqrt{6}}{5} R} \right)^2 = \frac{\left(\frac{2}{3} \right)}{\left(\frac{24}{25} \right)} = \frac{25}{36} \quad \text{(н.к. площади относятся как квадраты подобных коэффициентов подобных треугольников)}$$

$$S = \frac{4 \cdot 36}{25} = \frac{144}{25}$$

Ответ: $S = \frac{144}{25}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 5x - \sin 5x = 0$$

$$\sqrt{2} \cos 2x = \cos 5x + \sin 5x$$

$$\sqrt{2} \cos 2x = \sqrt{2} \sin(5x + \frac{\pi}{4})$$

$$\cos(2x) = \sin(5x + \frac{\pi}{4})$$

$$\cos(2x) = \cos(5x - \frac{\pi}{4})$$

или

$$\sin(2x + \frac{\pi}{2}) = \sin(5x + \frac{\pi}{4})$$

$$I \quad 2x + \frac{\pi}{2} = 5x + \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$3x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

$$x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}$$

$$\cos 2 = \sin(2)$$

$$\sin(2 + \frac{\pi}{2}) = \cos 2$$

$$\cos 5x = \sin 5x$$

$$\sin 5x - \cos 5x = 0$$

$$\sqrt{2} \sin(5x - \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$\sin(5x - \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$5x - \frac{\pi}{4} = \pi n$$

$$II \quad 2x + \frac{\pi}{2} = \pi - 5x - \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$7x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}$$

$$x^2 + 4x + xy + 8y - 2y^2 = 0$$

$$(x^2 + x(4+y) + 8y - 2y^2 = 0$$

$$\sqrt{2} \sin 2x \cos \frac{\pi}{2} + \cos 2x \sin \frac{\pi}{2}$$

$$3x = \frac{16 + 8y + y^2 - 48y - 2y^2}{16 + 8y + y^2 - 32y + 8y^2}$$

$$2y^2 - (8+x)y - x^2 - 4x = 0$$

$$D = 64 + 16x + x^2 - 8(-x^2 - 4x) =$$

$$= 9x^2 + 48x + 64$$

$$y = \frac{8+x \pm \sqrt{9x^2 + 48x + 64}}{4}$$

$$9y^2 - 24y + 16 = (3y-4)^2$$

$$\sin(5x - \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$5x - \frac{\pi}{4} = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\lg x^4 - \lg y^2 = \lg \frac{3}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \quad \sqrt{4r \cdot 6r} = 2\sqrt{6}r$$

$$4 \lg |x| - 2 \lg |y| = \lg^3 |x|$$

$$x^2 + 4x + 8y + xy - 2y^2 = 0$$

$$(x^2 + 4x + 4)$$

$$I \quad x \geq 0, y \geq 0$$

окружность с (6; 8)

$$II \quad x < 0, y \geq 0$$

окр. с (-6; 8)

$$III \quad x \geq 0, y < 0$$

окр. (6; -8)

$$IV \quad x < 0, y < 0$$

(-6; -8)

$$r = 2$$

$$a = 4$$

$$r = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$$

$$a = 400$$

$$\frac{144}{256} = \frac{9}{16}$$



$$\frac{12R^2}{4\sqrt{6}R} =$$

$$\frac{12R}{4\sqrt{6}} = \frac{3R}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}R}{\sqrt{2}}$$

$$3l = 2l + 4r$$

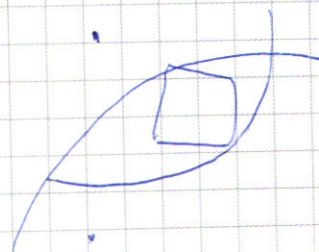
$$l = 4r$$

$$(x-6)^2 +$$

$$(0; 6), (6; 8)$$

Точка:

II случай



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

$$\lg y \quad \lg\left(\frac{x^4}{y^2}\right) = \lg(-xy) \quad \lg(-x)$$

$$(\lg(-x) + \lg y)$$

$$\lg y \quad \lg\left(\frac{x^4}{y^2}\right) = \lg^2(-x) + \lg(-x) \lg y$$

$$\lg y (4 \lg|x| - 2 \lg y) = \lg^2|x| + \lg|x| \lg y$$

$$4 \lg y \lg|x| - 2 \lg^2 y = \lg^2|x| + \lg|x| \lg y$$

$$\lg^2|x| + \lg|x| \lg y - 4 \lg y \lg|x| + 2 \lg^2 y = 0$$

$$\lg^2|x| - 3 \lg y \lg|x| + 2 \lg^2 y = 0$$

$$\left(\lg|x| - \frac{3 \lg y}{2}\right)^2 = \frac{\lg^2 y}{4}$$

$$\lg|x| - \frac{3 \lg y}{2} = \pm \frac{\lg y}{2}$$

$$\lg|x| = 2 \lg y$$

$$|x| = y^2$$

$$\text{Ил. } (y-4) = y^2 \quad (-2y) = y^2$$

$$y - 4 = y^2$$

$$y^2 - y + 4 = 0$$

$$y = 0$$

$$y = 2$$

$$x = -4$$

$$\text{Ил. } \lg|x| - \frac{3 \lg y}{2} = -\frac{\lg y}{2}$$

$$\lg|x| = \lg y$$

$$y = |x|$$

$$\text{Ил. } y = (y-4)$$

$$y = 4 - y$$

$$y = 2$$

$$x = 2$$

$$\lg^2 = \lg 4$$

$$4 = 2$$

$$2 \lg^2 = 2 \lg 2$$

$$2 = 2$$

$$\text{Проверка:}$$

$$\lg^2 = \lg 8$$

$$4 = 4$$

$$4 \lg^2 = 4 \lg 2$$

$$4 = 4$$

$$8 - 2x^2 - x^2 - 4x - 16 = 0$$

$$-x^2 - 6x - 8 = 0$$

$$x^2 + 6x + 8 = 0$$

$$x_1 = -4, x_2 = -2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$\sqrt{2} (\cos 5x \cos 2x - \sin 5x \cos 2x) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$\sqrt{2} \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \cos 10x$$

$$-\sqrt{2} \cos 2x (\sin 5x - \cos 5x) = \cos 10x$$

$$\sqrt{2} \sin(5x - \frac{\pi}{4})$$

$$-2 \cos 2x \sin(5x - \frac{\pi}{4}) = \cos 10x$$

$$-2 \cdot \frac{1}{2} (\sin(7x - \frac{\pi}{4}) + \sin(-3x - \frac{\pi}{4})) = \cos 10x$$

$$-\sin(7x - \frac{\pi}{4}) + \sin(3x + \frac{\pi}{4}) = \cos 10x$$

$$\frac{\sqrt{3} \cdot 4R}{6\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad \sin \alpha$$

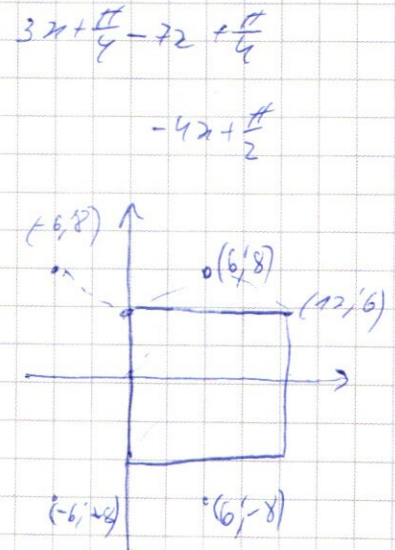
$$2 \sin(-2x + \frac{\pi}{4}) \cos(5x) = \cos 10x$$

$$2 \cos^2 5x - 1$$

$$\frac{\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{6} \cdot R}{\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{3}}$$

$$\sin(-2x + \frac{\pi}{4}) \cos 5x = \cos^2 5x - \frac{1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}R}{\sqrt{2}} + 2\sqrt{6}R = \frac{R(\sqrt{3} + 4\sqrt{3})}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{3}R}{\sqrt{2}}$$



$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{24}{25}} = \frac{2 \cdot 25}{3 \cdot 24} = \frac{25}{36}$$

$$\cos 7x - \sin 7x + \cos 3x - \sin 3x = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$\sin 7x - \cos 7x + \sin 3x - \cos 3x = -\sqrt{2} \cos 10x$$

$$\sqrt{2} \sin(7x - \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \sin(3x - \frac{\pi}{4}) = -\sqrt{2} \cos 10x$$

$$\sin(7x - \frac{\pi}{4}) + \sin(3x - \frac{\pi}{4}) = -\cos 10x$$

$$2 \sin(5x - \frac{\pi}{4}) \cos 2x = -\cos 10x$$

$$\swarrow \quad \frac{10x - \frac{\pi}{2}}{2} \quad \frac{7x - \frac{\pi}{4} - 3x + \frac{\pi}{4}}{2x}$$

$$2 \cos(5x - \frac{\pi}{4}) \cos 2x = \cos 10x$$

$$\cos(2x) \neq 0$$

$$\sin(5x - \frac{\pi}{4}) = \sin 5x \cos \frac{\pi}{4} - \cos 5x \sin \frac{\pi}{4}$$

$$= (\sin 5x \sin \frac{\pi}{4} - \cos 5x \cos \frac{\pi}{4})$$

$$= -\cos(5x - \frac{\pi}{4})$$

$$2 \cos(\quad) \cos(\quad) = \cos 10x$$

$$\cos(\alpha + \beta) = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos(8x + 2x)$$

$$\cos 8x \cos 2x - \sin 8x \sin 2x$$

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 5$$

$$\alpha + \beta = 10$$

$$\frac{\alpha - \beta}{2} = 2$$

$$\begin{aligned} + / \quad \alpha - \beta &= 4 \\ \alpha + \beta &= 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= 7 \\ \beta &= 3 \end{aligned}$$

$$\sqrt{2} \cos 5x \cos 2x - \cos^2 5x + \sin^2 5x = \sqrt{2} \sin 5x \cos 2x$$

$$\sqrt{2} (\cos 5x \cos 2x - \sin 5x \cos 2x) = \cos^2 5x - \sin^2 5x$$

$$\sqrt{2} \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = (\cos 5x + \sin 5x)(\cos 5x - \sin 5x)$$

$$\cos(7x + 3x) = 2 \cos$$

$$\sqrt{2} \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 2 \sin 5x \cos 2x$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$36r^2 + 48r^2 = 9x^2 + 24r^2 + 12\sqrt{6}xr$$

$$12r^2 = 12\sqrt{6}xr$$

$$r = \sqrt{6}x$$

№2

$$\cos 7x - \sin 7x = \sqrt{2} \sin$$

Handwritten calculations and diagrams are present, including a sequence of numbers: 1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 5.

$$\cos 7x - \sin 7x + \cos 3x - \sin 3x = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$-\sqrt{2} \sin(7x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \sin(3x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$-(\sin 7x - \cos 7x) =$$

$$-(\sin(7x - \frac{\pi}{4}) + \sin(3x - \frac{\pi}{4})) = \cos 10x$$

$$-(2 \sin(5x - \frac{\pi}{4}) \cos(2x)) = \cos 10x$$

$$-\sqrt{2} \cos 2x (\sin 5x - \cos 5x) = \cos 10x$$

$$\cos(5x + 5x) = 2 \cos^2 5x - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin 5x - \cos 5x)$$

Handwritten notes and formulas are present, including: $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$, $7x - \frac{\pi}{4} - 3x + \frac{\pi}{4}$, $\cos(5x + 5x)$, $2 \cos^2 5x - 1$, $\frac{\sqrt{2}}{2} (\sin 5x - \cos 5x)$.

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right) \lg y = (-x) \lg(-xy)$$

$$\begin{cases} xy < 0 \\ y > 0 \\ \begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\underbrace{y^2 - xy + \frac{1}{4}x^2}_{(y - \frac{1}{2}x)^2} + \underbrace{y^2 - 8y + 16}_{(y-4)^2} = -2 \cdot \frac{1}{2}xy \quad -16 \quad (y - \frac{1}{2}x)^2$$

$$= \frac{\left(\frac{5}{4}x^2 + 4x + \frac{16}{5}\right)}{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}x + \frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{64}{5}$$

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{2}x + l\right)^2 =$$

$$= \frac{5}{4}x^2 + \sqrt{5}xl + l^2$$

$$\sqrt{5}xl = 4x$$

$$l = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{16}{5}$$

$$-16 + \frac{16}{5} = \frac{-80+16}{5} = \frac{-64}{5}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{2}x + 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}x \cdot l$$

$$(-x) \lg(-xy) = (-x) \lg(-x) + \lg(y)$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{81} = 85 + 3^{81} - x$$

$$l = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$l = \frac{16}{5}$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right) \lg y = (-x) \lg(-x) + (-x) \lg y$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{81} = 85 + 3^{81} - x$$

$$\lg y \lg\left(\frac{x^4}{y^2}\right) = \lg^2(-x) \cdot \lg(-x) \lg y$$

$$\lg\left(\frac{x^4}{y^2}\right) = \lg^3(-x) = \lg(x) \cdot \lg(-x) \cdot \lg(-x)$$

$$\lg 4 \lg|x| - 2 \lg|y| = \lg^3|x|$$

$$\lg^3|x| - 4 \lg|x| + 2 \lg|y| = 0$$

$$\begin{aligned} 3^{81}(4-x) &= 85-x-3^x \\ 3^{81}(x-4) &= 3^x+x-85 \end{aligned}$$