

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

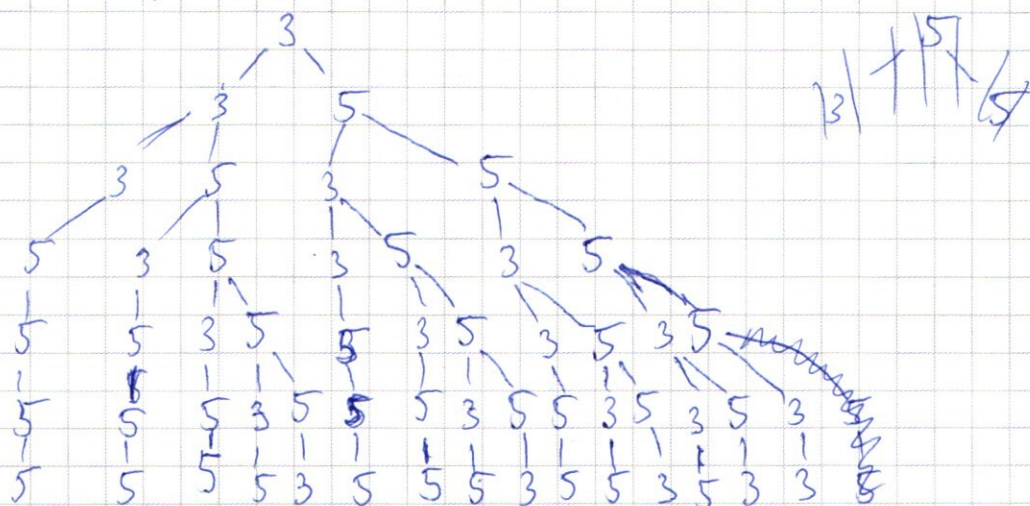
$$16875 = 5^4 \cdot 3^3$$

Возможны два варианта составления восьмизначного
числа из этих множителей:

- 1) 4 по 5, 3 по 3 и 1 - 8 цифр, произв. которых равно 16875.
- 2) 4 по 5 (т.е. $5 \cdot 3 > 8$ и $5 \cdot 5 > 8$), 9, 3 и 2 по 1 - 8 цифр
(5 5 5 5 9 3 1 1), произв. которых равно 16875.

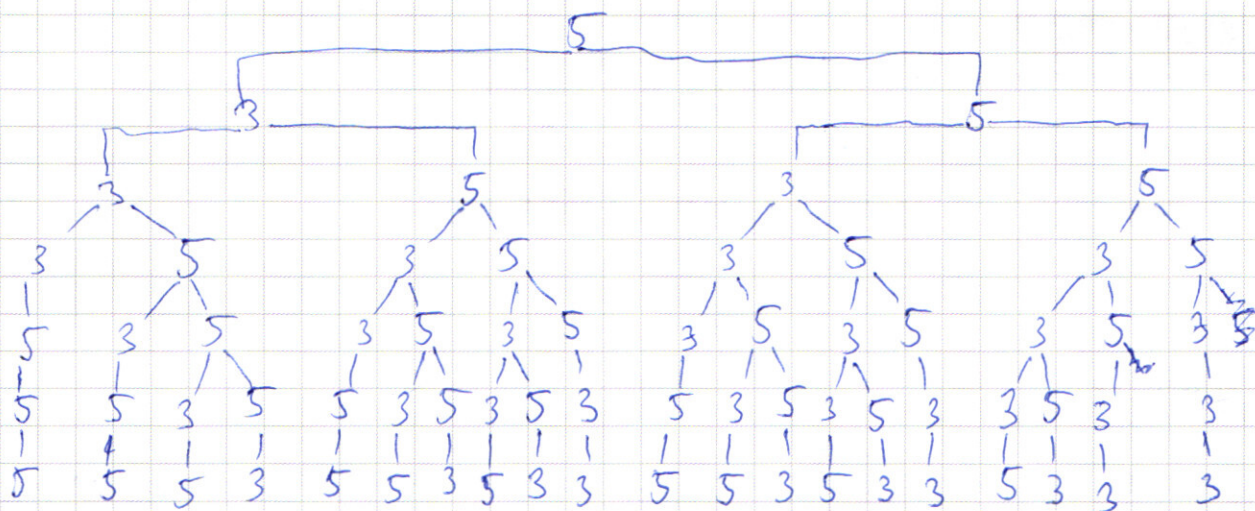
Рассмотрим первый случай (дерево вариантов):

Возьмём 7-ми значное число из 5 и 3 (4 по 5 и 3 по 3)
и наметим для него дерево вариантов:



15 вариантов с первой цифрой 3.

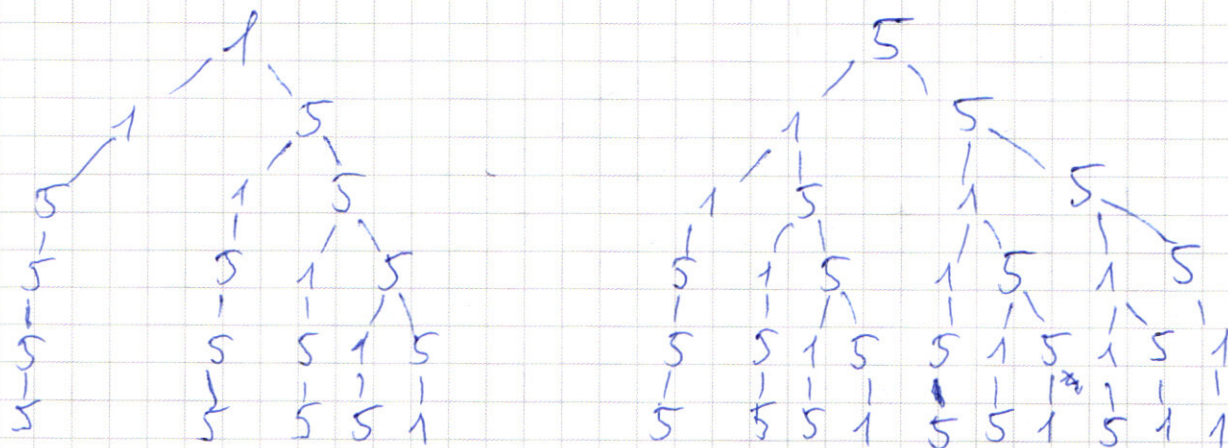
По аналогии наметим для первой цифры 5 (20 вар.)
Каждому 35 различным чисел из 5 и 3. В
каждое из этих чисел можно 8-ью способами
вставить 1 (вначале, в конце и между 7 цифрами) и



20 вариантов.

каждый раз получится новое число. Т.е. суммарно
 $8 \cdot 35 = 280$ различные восьмизначные числа получ.
 из которых равно 16875 (они все различны, т.к. ^{цифры} фиксированы
 335 и 355 не станут ~~разными~~ ^{одинаковыми} ни при какой
 постановке единиц).

Аналогично рассмотрим второй вариант пере-
 мен чисел, только теперь будем рассматривать чис-
 ла 4 по 5 и 2 по 1;



Всего 15 вариантов (чисел)

В эти 15 восьмизначные числа можно добавлять
 вставит 9 и в получившиеся семизначные 8-ю спо-
 собом можно вставить 3 (или наоборот). Тогда всего

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$15 \cdot 7 \cdot 8 = 840$ чел. Да ещё те 280. Суммарно 1120 чел.
Ответ: 1120 чел.

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right) \lg y = (-x) \lg(-xy) & N 3. \quad \frac{(\lg(-x) + \lg y)}{(\lg(-x) + \lg y)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases}$$

Из ОДЗ логарифма: $y > 0$ и $(-xy) > 0$, значит $x < 0$.

Пусть $a = \lg y$; $b = \lg(-x)$. Тогда $y = 10^a$; $-x = 10^b$

Тогда первое уравнение принимает вид:

$$\left(\frac{(10^b)^4}{(10^a)^2}\right)^a = (10^b)^{b(a+1)} \quad (10^a \neq 0 \text{ и } y > 0, \text{ поэтому } \cdot (10^a)^{2a})$$

$$10^{4ab} = 10^{b(b+a)} \cdot 10^{2a^2} = 10^{b^2+ab+2a^2}$$

$$4ab = b^2 + ab + 2a^2$$

$$b^2 - 3ab + 2a^2 = 0$$

$$b^2 - a^2 - 3ab + 3a^2 = 0$$

$$(b-a)(b+a) - 3a(b-a) = 0$$

$$(b-a)(b-2a) = 0$$

$$b = a \quad \text{или} \quad b = 2a$$

$$\lg(-x) = \lg y \quad \lg(-x) = 2\lg y$$

$$-x = y \quad (1) \quad -x = y^2 \quad (2)$$

1) $2x^2 + x^2 - x^2 - 4x + 8x = 0$ — подставили $y = -x$ во второе уравн.
 $2x^2 + 4x = 0$

$$x(x+2) = 0$$

$$\begin{cases} x=0 & \text{не вх. в } x < 0 \\ x=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases} \text{ — корень } (y^{\lg 2} = 2^{\lg 4})$$

2) $2y^2 + y^3 - y^4 + 4y^2 - 8y = 0$ подставим $y^2 = -x$ в второе уравнение

$$y(y^3 - y^2 - 6y + 8) = 0$$

$$y=0 \text{ или } y^3 - y^2 - 6y + 8 = 0$$

$$\text{не вх. в } y > 0 \quad (y-2)(y^2+y-4) = 0$$

$$\text{корень } \rightarrow \begin{cases} y=2 \text{ или } y^2+y-4=0 \\ x=-4=-y^2 \end{cases} \quad \sqrt{D} = \sqrt{17}$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$y_1 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} < 0 \text{ не вх. в ОДЗ } (y > 0)$$

$$\begin{cases} y_2 = \frac{\sqrt{17}-1}{2} > 0 \text{ — корень} \\ x = \frac{\sqrt{17}-9}{2} = -y^2 \end{cases}$$

ответ: $(-2; 2); (-4; 2); \left(\frac{\sqrt{17}-9}{2}; \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$ — ~~не~~ решены системы.

н2.

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\cos 7x + \cos 3x = 2 \cdot \cos\left(\frac{7x+3x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{7x-3x}{2}\right) = 2 \cdot \cos 5x \cdot \cos 2x$$

$$\sin 7x + \sin 3x = 2 \cdot \sin\left(\frac{7x+3x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{7x-3x}{2}\right) = 2 \cdot \sin 5x \cdot \cos 2x$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x - \sqrt{2} \cdot \cos 10x = 2 \sin 5x \cdot \cos 2x$$

$$\cancel{2 \cos 5x} \cdot 2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} \cdot \cos 10x$$

$$\cos 10x = \cos^2 5x - \sin^2 5x = (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x)$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) (2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)) = 0$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) \left(\cos 2x - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 5x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 5x \right) \right) = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 5x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 5x = \sin \left(5x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) \cdot (\cos 2x - \sin (5x + \frac{\pi}{4})) = 0$$

$$\cos 5x = \sin 5x \quad \text{или} \quad \cos 2x = \sin (5x + \frac{\pi}{4})$$

$$\cos 5x = \cos (\frac{\pi}{2} - 5x)$$

$$\cos 2x = \cos (\frac{\pi}{4} - 5x)$$

$$\begin{cases} 5x = \frac{\pi}{2} - 5x + 2\pi n \\ 5x = 5x - \frac{\pi}{2} + 2\pi n \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} 2x = \frac{\pi}{4} - 5x + 2\pi k \\ 2x = 5x - \frac{\pi}{4} + 2\pi m \end{cases} \quad k, m \in \mathbb{Z}$$

$$10x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi}{10} n$$

$$7x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

$$-3x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi m$$

$$x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi}{7} k$$

$$x = \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi}{3} m$$

$$\text{или} \quad x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} l$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi}{10} n \quad ; \quad x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi}{7} k \quad ; \quad x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} l \quad n, k, l \in \mathbb{Z}.$$

№5.

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

$$(x-6)^2 + (y-8)^2 = a$$

Построим график ф-ции $|x-6-y| + |x-6+y| = 12$. Для этого нарисуем прямые $y=x-6$, $y=-x+6$, которые разобьют плоскость на четыре четверти и для каждой четверти раскроем модули:

$$\text{I)} -x + 6 + y + x - 6 + y = 12$$

$$y = 6$$

$$\text{II)} x - 6 - y + x - 6 + y = 12$$

$$x=12$$

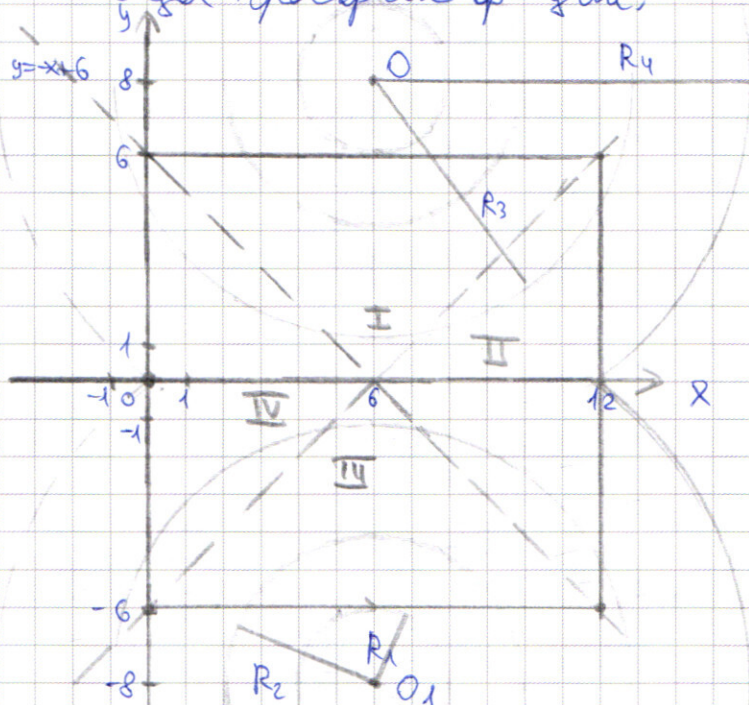
$$\text{IV)} x-6-y-x+6-y=12$$

$$y=-6$$

$$\text{IV)} -x+6+y-x+6-y=12$$

$$x=0$$

Потом график ф-ции:



$$y=x-6$$

стороны 6

это квадрат лежащий правее OY , т.е. $x \geq 0$ с центром в точке пересечения $y=-x+6$ и $y=x-6$ $(6;0)$, т.к. эти прямые являются диагоналями этого квадрата. Стороны квадрата параллельны осям OX и OY .

$(|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a$ — уравнение окружности, касательной к оси OY только по условию $x \geq 0$. Из-за $|x|$ часть окружности $(|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a$ ^{лежащая в четверти $(x \geq 0, y \geq 0)$} отразится симметрично относительно OY в четверть $(x \geq 0, y \leq 0)$ и как-то решенный ^{(центр O пересечет в $(6;-8)$)} y -вариант, если эти решения не будут лежать на оси симметрии, т.е. на OY . Рассмотрим решения

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

не лежащие на OX ;

Точка $O(6;8)$ лежит на $x=6$ - оси симметрии квадрата, т.к. эта прямая параллельна двум сторонам и перпендик двум сторонам и проходит через центр квадрата. Т.к. центр окружности лежит на оси симметрии, то решения будут совпадать, если они не лежат на $x=6$. Но если они не лежат на оси OX и $x=6$, то их $2 \cdot 2 = 4$ и это нам не подходит, потому что нам нужно равно 2 решения. Тогда или решение лежит на $x=6$ и не лежит на OX и $1 \cdot 2 = 2$ или два решения лежат на OX и $2 \cdot 1 = 2$. В первом случае нужно найти точку касания квадрата и окружности $\&$ на вершинах и середин $\&$ сторонах на $x=6$. Т.е. точки $(6;6)$ и $(6;-6)$ соотв. Тогда $R = |8-6| = 2$ и $a = R^2 = 4$.

$$(|6|-6)^2 + (|6|-8)^2 = a \quad \text{отсюда } a = 4.$$

Васиотурин решения на $OX (y=0)$:

~~Или~~ Они могут быть только точки пересечения квадрата и OX , т.е. точки $(0;0)$ и $(12;0)$. Подставим их и найдем a :

$$(|0|-6)^2 + (|0|-8)^2 = a \Leftrightarrow a = 100$$

$$(|0|-8)^2 + (|12|-6)^2 = a \Leftrightarrow a = 160$$

$\left. \begin{array}{l} a \text{ равны, значит} \\ \text{это одна окружность} \\ \text{с двумя решениями на } OX. \end{array} \right\}$

Полученные окружности изображ. на рисунке. В то же время можно убедиться, что любые окружности лежащие между этими двумя будут равны более двух ^{решения} решений. Так окружности с R_2 и R_3 дают по 4 круга, а с R_4 и R_1 по два круга (решения). Графиком ф-ции $(|x-6|)^2 + (|y|-8)^2 = 100$ - будут эти окружности и начало координат, потому что $(0;0)$ удовл.).

Ответ: ~~$a=4$ и $a=100$~~

При $a < 4$ и $a > 100$ график ф-ции $(|x-6|)^2 + (|y|-8)^2 = a$ не будет пересек. с квадратом, а при $4 \leq a \leq 100$ будет иметь 4 точки пересечения.

Ответ: $a=4$ и $a=100$.

№2.

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Найдём x , при котором $3^x + 4 \cdot 3^{81} = 85 + (3^{81} - 1)x$

при $x=4$ достигается равенство.

Заметим, что обе ф-ции возрастающие на области определения и в точке $x=4$ их производные равны соответственно:

$$y_1'(x) = (3^x + 4 \cdot 3^{81})' = x \cdot 3^{x-1} \quad (\text{при } x=4 \quad y_1'(4) = 4 \cdot 27 = 108)$$

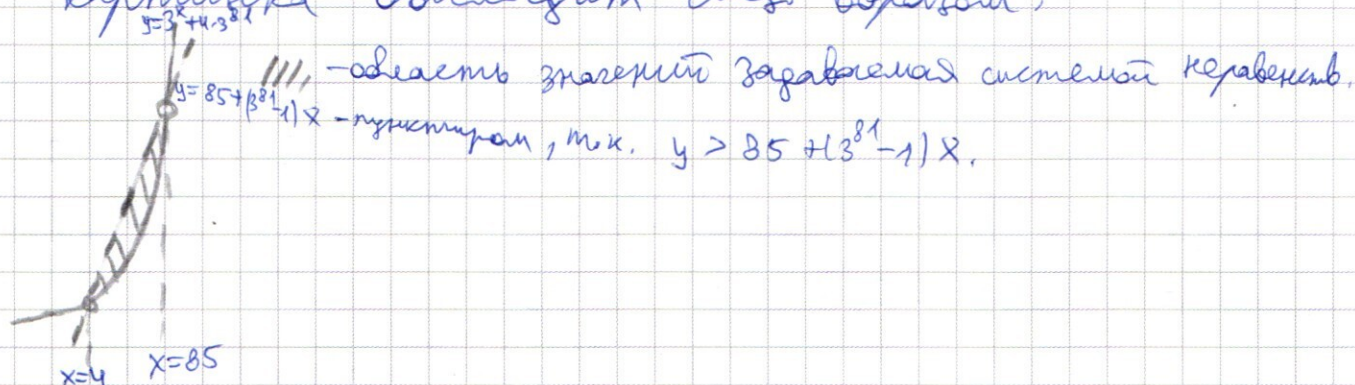
$$y_2'(x) = (85 + (3^{81} - 1)x)' = 3^{81} - 1$$

Заметим, что $y_1'(x) < y_2'(x)$, но $y_2'(x)$ постоянно не зависит от x , а $y_1'(x)$ зависит от x , а значит можно утверждать, что при больших x ф-ции вновь пересекутся. Найдём второе x пересечения:

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x = 85 \quad (3^{85} + 4 \cdot 3^{81} = 85 \cdot 3^{81} = 85 + (3^{81} - 1) \cdot 85 = 85 \cdot 3^{81}).$$

Соответственно нам необходимо найти кол-во пар целых чисел, удовл. системе на интервале $(4; 85)$, т.к. именно на нём ~~и~~ возможно такое, что $y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81}$ и $y < 85 + (3^{81} - 1)x$, поэтому это картинка выглядит след. образом:



Для каждого x существует n целых y , удовл. системе:
 $n = y_2(x) - y_1(x) = 85 + (3^{81} - 1)x - 3^x - 4 \cdot 3^{81}$ ($y_2(x)$ - верхн.,
потому что строгое неравенство для y_2).

Т.к. нам нужны целые x и y , то интервал $(4; 85)$ ~~равен~~ можно представить в виде отрезка $[5; 84]$, где найдем $m = 84 - 5 + 1 = 80$ целых x . Тогда найдем сумму всех n для m целых x из отрезка $[5; 84]$.

$$S = 80 \cdot (85 - 4 \cdot 3^{81}) + S_a - S_b, \text{ где } S_a - \text{сумма арифметической прогрессии } \sum_{i=5}^{84} (3^{81} - 1) \cdot i \text{ (с разностью } 3^{81} - 1);$$

$$S_a = \frac{a_1 + a_m}{2} \cdot m = \frac{(3^{81} - 1) \cdot 5 + (3^{81} - 1) \cdot 84}{2} \cdot 80 = 40 \cdot 89 \cdot (3^{81} - 1),$$

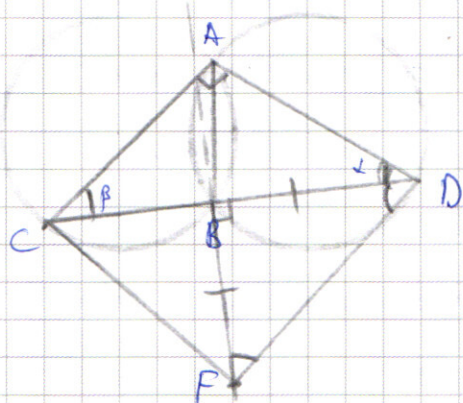
$$S_b - \text{сумма геом. прогрессии } \sum_{i=5}^{84} 3^i \text{ (с знаменателем 3)}.$$

$$S_0 = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} = \frac{3 \cdot (3^{80} - 1)}{2}$$

$$\text{Тогда } S = 80 \cdot (85 - 4 \cdot 3^{81}) + 40 \cdot 89 \cdot (3^{81} - 1) - \frac{81 \cdot (3^{81} - 3)}{2} =$$

$$= \frac{160 \cdot 85 - 840 \cdot 3^{81} + 80 \cdot 89 \cdot 3^{81} - 80 \cdot 89 - 81 \cdot 3^{81} + 243}{2} = \frac{5388 \cdot 3^{81} + 6723}{2}$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{2} \cdot 5388 \cdot 3^{81} + \frac{1}{2} \cdot 6723$$



по теореме синусов:

$$\frac{AB}{\sin \alpha} = 2R = \frac{AB \cdot (1)}{\sin \beta}, \text{ т.к.}$$

$$R = 13$$

$$\angle CAD = 90^\circ$$

$$BF = BD$$

$$CF = ?$$

окружности равны

т.к. $\angle CAD = 90^\circ$, то

$\angle ACD$ и $\angle ADC < 90^\circ$, а

значит $\angle ADB = \angle ACD$, т.к. $\sin \alpha = \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Отсюда $\triangle CAD$ равнобедренный и $CA = AD$. а также

$$\angle ADB = \angle ACD = \frac{180 - 90}{2} = 45^\circ; AB = 2R \cdot \sin \alpha = \sqrt{2} R = 13\sqrt{2}$$

$\angle BDF = \angle BFD = 45^\circ$ ($\triangle FBD$ - ^{прямоугольный} и равнобедренный).

Тогда $DF \parallel AC$, т.к. $\angle CDF = \angle ACD$, как накрест лежащие и $\angle ADF$ - прямой, т.к. $\angle ADC + \angle CDF = 90^\circ$.
Тогда $DF \parallel AC$, т.к. $\angle CAD + \angle ADF = 180^\circ$ - ~~со~~ ^{односторонние}

при параллельных и $ACFD$ - прямоугольник, т.

т.к. $AD = AC$ ($\triangle ACD$ - равнобедренный), то $ACFD$ - квадрат.

$\triangle CBF$ - равнобедренный, т.к. $\angle BCF = \angle BFC = 45^\circ$ ^{$90 - 45^\circ$} , а значит

$CB = BF = BD$ и B делит диаг. квадрата пополам,

значит B - точка пересечения диагоналей и $AB = BD = BF =$

$$= BC = 13\sqrt{2}, CF = \sqrt{CB^2 + BF^2} = 26 \quad (\triangle CBF - \text{прямоугольный т.к.}$$

диаг. квадрата пересекаются под прямым углом).

д) Если $BC = 10$, то $S_{ACF} = \frac{1}{2} BC \cdot AF = BC \cdot \frac{BC}{\sqrt{2}} = 130\sqrt{2}$.

ответ: $CF = 26$, $S_{ACF} = 130\sqrt{2}$, $S_{ACF} = 100$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{6} = 2 \cos 15^\circ \cdot \cos 37.5^\circ$ $\sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1$
 $\cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4} = -2 \cdot 0$

$\cos \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{4} =$ Рассмотрим синусные
и косинусные
функции (без 1) из 5 и 3.

$\cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ 16 байт скан. 3.

$\cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$ $\cos 5x = \cos(\frac{\pi}{2} - 5x)$
 $2 \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$

$\cos 7x + \cos 3x = \sqrt{2} \cos 10x = \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x)$
 $\cos 7x + \cos 3x = 2 \cdot \cos 5x \cdot \cos 2x$
 $\sin 7x + \sin 3x = 2 \cdot \sin 5x \cdot \cos 2x$

$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} \cos 10x = \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x)$
 $(\cos 5x - \sin 5x) / (2 \cos 2x) = (\cos^2 5x - \sin^2 5x) / (\cos 5x + \sin 5x)$
 $\cos 5x = \sin 5x$ или $\cos 5x = \sin(5x + \frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4} - 5x)$

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} &= (-x)^{\lg(-xy)} \quad \sqrt[3]{} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$y > 0 \quad x < 0$$

$$10^a = y$$

$$10^b = (-x)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^a &= (-x)^{\lg(-x) + \lg(y)} = (-x)^{\lg(-x)} \cdot (-x)^{\lg(y)} = \\ &= 10^{\lg^2(-x)} \cdot 10^{\lg(-x) \cdot \lg(y)} = \frac{x^{4 \cdot \lg y}}{10^{2 \lg^2 y}} \end{aligned}$$

$$x^{4 \cdot \lg y} = 10^{\lg^2(-x)} \cdot 10^{\lg(-x) \cdot \lg y} \cdot 10^{2 \lg^2 y}$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-x) \cdot y}$$

$$a = \lg y \quad ; \quad b = \lg(-x)$$

$$10^a = y \quad 10^b = (-x)$$

$$\left(\frac{10^{4b}}{10^{2a}}\right)^a = (10^b)^{a^2}$$

$$10^{4ba} = 10^{b^2 a} \cdot 10^{2a^2} = 10^{b^2 a + 2a^2}$$

$$4ba = b^2 a + 2a^2$$

$$a(4b - b^2 - 2a) = 0$$

$$(b^2 - 4b + 2a) a = 0$$

$$a = 0 \quad \text{или} \quad b^2 - 4b + 2a = 0$$

$$10^{4ba} = 10^{(ab+b^2)} \cdot 10^{2a^2}$$

$$4ba = ab + b^2 + 2a^2$$

$$b^2 - 3ab + 2a^2 = 0$$

$$b^2 - a^2 - 3ab + 3a^2 = 0$$

$$(b-a)(b+a) - 3a(b-a) = 0$$

$$(b-a)(b-2a) = 0$$

$$\lg y = \lg(-x) \quad \text{или} \quad \lg(-x) = 2 \lg y = \lg y^2$$

$$y = -x$$

$$-x = y^2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$1) 2x^2 + x^2 - x^2 - 4x + 8x = 0$$

$$2x^2 + 4x = 0$$

$$x(x+2) = 0$$

$$x = 0 \text{ — не в } x, \text{ в } x < 0$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases} \quad - 4^{\log 2} = 2^{\log 4} = 2^{\log 2^2} = 4^{\log 2} \text{ — не подходит}$$

$$2) 2y^2 + y^3 - y^4 + 4y^2 - 8y = 0$$

$$y^4 - y^3 - 6y^2 + 8y = 0$$

$$y(y^3 - y^2 - 6y + 8) = 0$$

$$y = 0 \text{ — не в } x, \text{ в } y > 0$$

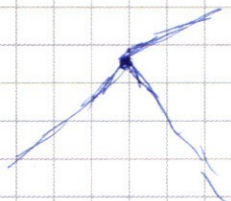
$$(y-2)(y^2+y-4) = 0$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ x = -4 \end{cases} \quad \sqrt{D} = \sqrt{17}$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$64^{\log 2} = 4^{\log 8} \quad y = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \text{ — в } x, \text{ в } 0 < 3,$$

$$64^{\log 2} \uparrow \text{ не подходит} \quad 64^{\log 2} \uparrow \text{ не подходит}$$



$$\begin{array}{r} y^3 - y^2 - 6y + 8 \\ \underline{y^3 - 2y^2} \\ y^2 - 6y + 8 \end{array} \quad \begin{array}{r} y-2 \\ \underline{y^2+y-4} \\ y^2+y-4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} y^2 - 6y \\ \underline{y^2 - 2y} \\ -4y + 8 \end{array}$$

$$(y-2)(y^2+y-4) =$$

$$= y^3 - 2y^2 + y^2 - 2y - 4y + 8 =$$

$$= y^3 - y^2 - 6y + 8$$

$$\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2} \right)^2 =$$

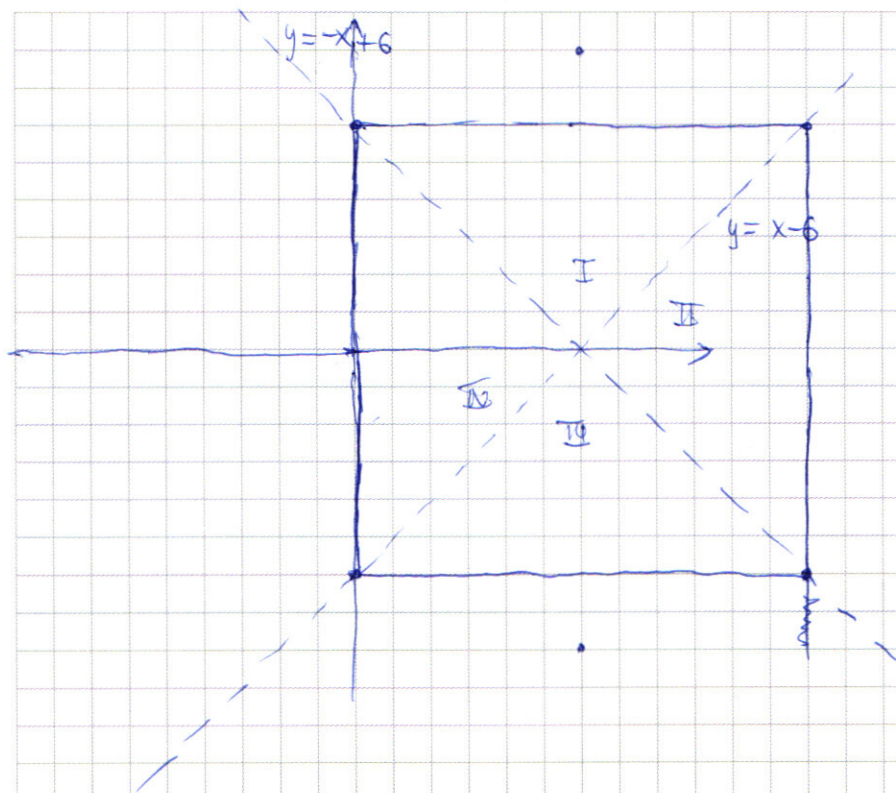
$$= \frac{17+1-2\sqrt{17}}{4} = \frac{8-\sqrt{17}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{17}-1}{2}$$

н.б.

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \text{ — не подходит} \\ (x-6)^2 + (y-8)^2 = a \end{cases} \quad \text{окружность}$$

$$(x-6)^2 + (y-8)^2 = a \quad \text{окружность}$$



$$I) -x + 6 + y + x - 6 + y = 12$$

$$y = 6$$

$$II) x - 6 - y + x - 6 + y = 12$$

$$x = 12$$

$$III) x - 6 - y - x + 6 - y = 12$$

$$y = -6$$

$$IV) -x + 6 + y - x + 6 - y = 12$$

$$x = 0$$

Тогда $R=2$ и $a=4$.

перез центр куда $(6; 0)$.

Тогда одно решение будет если попадем в т. пересечения квадрата и линии симметрии $(6; 6)$.

Получается квадрат, лежащий на x и y осях.

т.к. $|x|$ и $|y|$, то часть, лежащая в четверти $(x \geq 0, y \geq 0)$ образует ось симметрии.

Каждое решение удвоится. Значит нужно, чтобы в четверти $(x > 0, y > 0)$ было одно решение.

Линия симметрии, параллельная вертикальной стороне квадрата.

Проходит через центр окружности $(6; 8)$, т.к. эта точка лежит на x и y осях, проходящих.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81}$
 $y < 85 + (3^{81} - 1)x$
 $3^x + 4 \cdot 3^{81} < 85 + (3^{81} - 1)x = 85 + 3^{81} \cdot x - x$
 $3^x + 4 \cdot 3^{81} = 85 + (3^{81} - 1)x$
 $3^{81} / (4 - x) = 85 - x - 3^x$
 $4 \cdot 3^{81} = 85 + (3^{81} - 1)x$
 $x = \frac{4 \cdot 3^{81} - 85}{3^{81} - 1} = \frac{4(3^{81} - 1) - 81}{3^{81} - 1} = 4 - \frac{81}{3^{81} - 1} \approx 4$
 $y = 3^4 + 4 \cdot 3^{81} = 81 + 4 \cdot 3^{81}$
 $y(x) \downarrow$
 $3^x + 4 \cdot 3^{81} = 85 + (3^{81} - 1)x$
 $x = 4$ - м. пересечения графиков
 В т. $x = 4$ график $y(x)$ равен $1 \cdot 3^{x-1} = 4 \cdot 3^3 = 4 \cdot 27 = 108$
 укажите угол наклона 3^{81}
 Найдите, какова $x = 1$
 $y(x)$ еще раз $78 \cdot 3^{81}$
 $3^{81} + 4 \cdot 3^{81} = 5 \cdot 3^{81}$
 $3^{80} + 4 \cdot 3^{81}$
 $85 + 81 \cdot 3^{81} - 81 = 4 + 81 \cdot 3^{81}$
 $85 + 80 \cdot 3^{81} - 80$

$$(3^4 + 4) \cdot 3^{81} \text{ и } 85 + 85 \cdot 3^{81} - 85$$

и $x=85$ - вторая т. пересечения,

т.е. на промежутке от $[4; 85]$ ищем корни для

y и x .

$$n = 85 - 4 + 1 = 82_x$$

Для $x=4$ и $x=85$ по формуле

равные для каждого x справедливы:

$$x=5; \quad 3^4 + 4 \cdot 3^{81} \rightarrow 85 + (3^{81} - 1) \cdot 5 - 3^5 + 4 \cdot 3^{81} \text{ - кан-ва}$$

$$\text{т.е. } 85 + (3^{81} - 1) \cdot x - 3^x + 4 \cdot 3^{81} = a_1 \cdot 3^x$$

$$= 85 - 4 \cdot 3^{81} + x$$

В итоге получим сумму ~~раз~~:

$$S = 85 \cdot 82 - 82 \cdot 4 \cdot 3^{81} + S_a - S_b, \text{ где}$$

S_a - сумма арифм. прогрессии с шагом 1, а

S_b - сумма геом. прогрессии с множит. 3.

$$S_a = \frac{(3^{81} - 1) \cdot 4 + (3^{81} - 1) \cdot 85}{2} \cdot 82 = (3^{81} - 1) \cdot 89 \cdot 41$$

$$S_b = \frac{3^4 \cdot 82}{2} = 41 \cdot 3^4$$

$$S = 85 \cdot 82 - 82 \cdot 4 \cdot 3^{81} - 41 \cdot 81 + 41 \cdot 89 \cdot (3^{81} - 1) \cdot 82 + b \cdot (q^n - 1) \cdot \frac{b \cdot q^n}{q - 1}$$

$$3^{81} (41 \cdot 89 - 82 \cdot 4) - 41 \cdot 180 +$$

$$41 \cdot 81 \cdot 3^{81} = 41 \cdot 3^{85}$$

$$\frac{b \cdot (q^n - 1)}{q - 1} = \frac{3 \cdot (26 - 1)}{2 - 1} = 39$$

$$\frac{b \cdot q^n}{q - 1} = \frac{3 \cdot 26}{2 - 1} = 78$$

$$3 + 9 = 12$$

$$3 + 9 + 27 = 39$$

$$\frac{b_1 \cdot q}{q - 1} \cdot n$$

$$2 + 4 + 8 + 16$$

$$\frac{2 \cdot 15}{1} = 30$$

$$2 \cdot 4 \cdot 8 = 64$$

$$\frac{2 \cdot 2^n}{1} = 3$$

$$2 + 4 = 6$$

$$\frac{2 \cdot 3}{1} = 6$$

80.

$$\begin{array}{r} 89 \\ \times 80 \\ \hline 7120 \\ 090 \\ \hline 7120 \\ - 82 \\ \hline 81 \\ 1 \end{array}$$

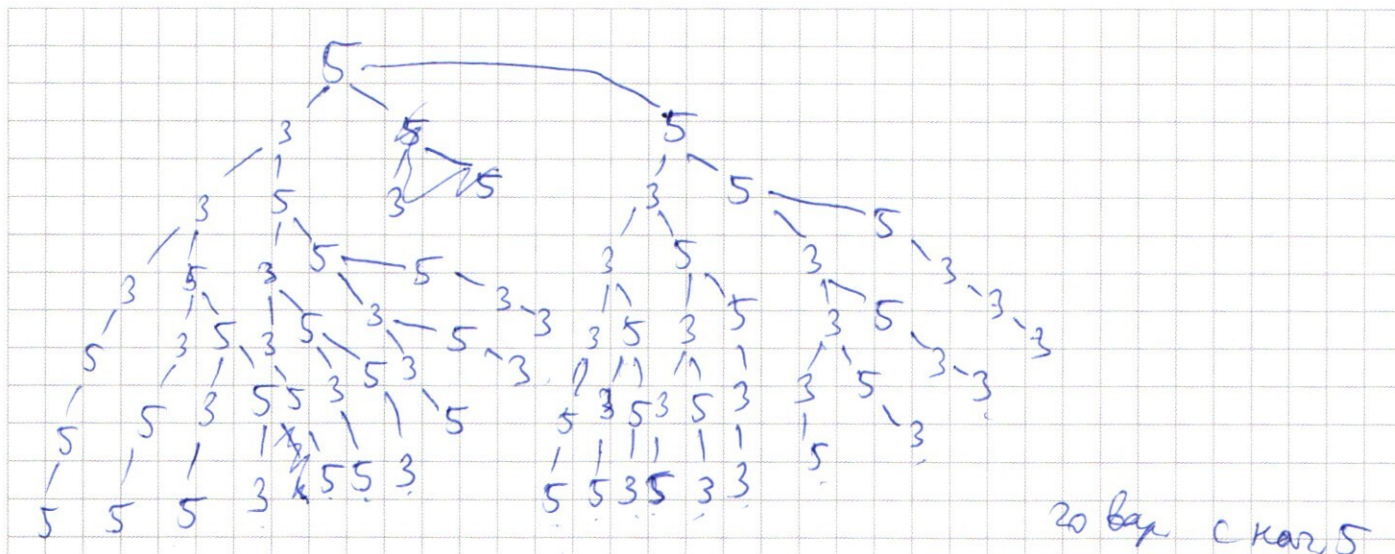
$$\begin{array}{r} 2120 \\ - 640 \\ \hline 6480 \\ - 81 \\ \hline 5399 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 85 \\ \times 16 \\ \hline 510 \\ + 85 \\ \hline 13600 \\ - 7120 \\ \hline 6480 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6480 \\ + 243 \\ \hline 6723 \end{array}$$

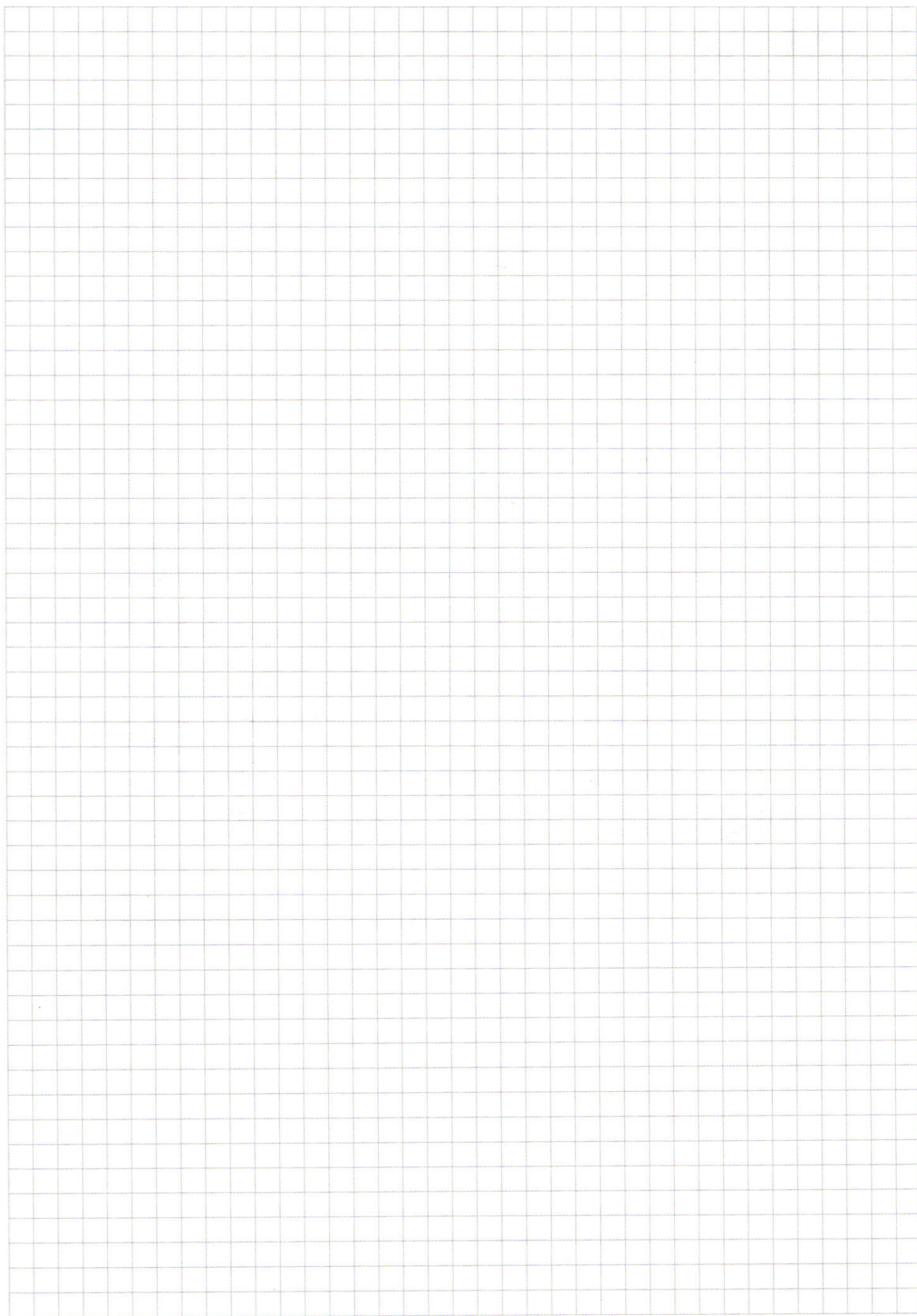
$$\begin{array}{r} 6723 \\ - 5399 \\ \hline 1324 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



20 вар. с кал. 5

В каждое из этих 36 чисел в 8 мест
можно вставить 1 и получить восьмизначные
числа увеличив. Увидим, что все они будут
разные, т.к. 33 5 и 355 будут
разными как не ставь в них 1. Поэтому
восьмизначных чисел $8 \cdot 36 = 288$.



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)