

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

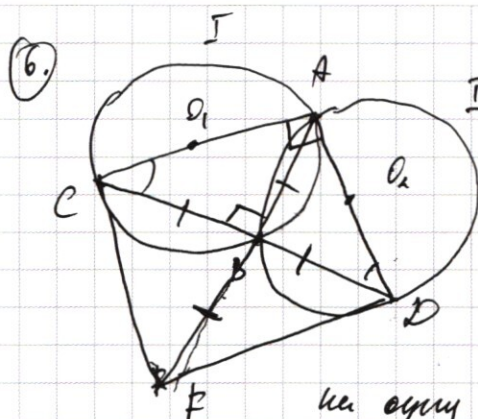
имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Решение.

а) Пусть центры окружностей будут O_1 и O_2 .

(O_1 - центр I-ой, O_2 - центр II-ой)

П.к. хорды ACB и ADB опираются

на одну и ту же дугу, то $\angle ACB = \angle ADB \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ACB$ - р/б и н/у (по условию) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ACB = \angle ADB = 45^\circ$. (2)

$\angle CAD = 90^\circ$ (по условию) $\Rightarrow \triangle ABC$ - р/у $\Rightarrow AC$ -
лежит на диаметре, аналогично с $\triangle ABD \Rightarrow AD$ - диаметр
II-ой окружности, AC - диаметр - I-ой.

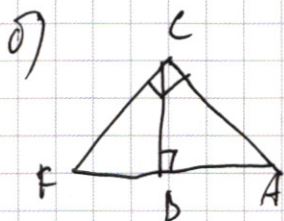
П.к. AB - перпендикуляр, опущенный из вершины
р/б $\triangle ABC$, то $CB = BD$, и AB - биссектриса $\Rightarrow \angle CAB = \angle DAB$.
значит, $\angle CAB = \angle DAB = 45^\circ$ (1)

Из (1) и (2): $\triangle ABC$ - р/б $\Rightarrow BC = AB$

Из условия: $BF = BD$, и $BD = BC = AD$, $AF \perp CD$ (по условию),
значит, $ABFC$ - квадрат, т.к. диагонали отсекают
между собой равные отрезки и угол между диагоналями
 90° .

значит, $AD = CF = 2 \cdot BC$, т.к. AD - диаметр.

$CF = 26$.



$$S(\triangle FCA) = \frac{1}{2} CB \cdot AF$$

$$AF = 2CB$$

$$S(\triangle FCA) = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 = 100$$

Ответ: а) $CF = 20$; б) $S(\triangle FCA) = 100$.

①

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$$

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_p = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 3^3 \cdot 5^4$$

$$0 \leq a_n \leq 9$$

Есть 2 способа:

1) a_n — либо 3, либо 5, либо 1.

$$A_1 = \{1; 3; 3; 3; 5; 5; 5; 5\}$$

$$k_1 = \frac{8!}{3!4!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{8} = \frac{56 \cdot 5}{1} = 280$$

2) a_n равно нулю $a_n = 9$, а остальные либо 3, либо 5, либо 1.

$$A_2 = \{1; 1; 3; 5; 5; 5; 5; 9\}$$

$$k_2 = \frac{8!}{2!4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2} = 30 \cdot 28 = 840$$

$$k_1 + k_2 = 1120$$

Ответ: 1120.

② $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x \quad (4)$

Решение.

ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$.

$$\cos 7x + \cos 3x = 2 \cos 5x \cdot \cos 2x \quad (1)$$

$$\sin 7x + \sin 3x = 2 \sin 5x \cdot \cos 2x \quad (2)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~С помощью вспомогательного угла:~~

$$\sqrt{2} \cos 10x = \sqrt{2} (\cos 5x - \sin^2 5x) = \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x)(\cos 5x + \sin 5x) / 2$$

из (1), (2) и (3), (4):

$$2 \cos 5x + \cos 2x - 2 \sin 5x \cdot \cos 2x = \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x)(\cos 5x + \sin 5x) = 0$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x)(\cos 5x + \sin 5x) = 0$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) (2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 5x - \sin 5x = 0 & (1) \\ 2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x) = 0 & (2) \end{cases}$$

(1) С помощью вспомогательного угла:

$$\cos 5x - \sin 5x = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos 5x - \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin 5x \right) = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} + 5x \right) \right)$$

$$\sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} + 5x \right) = 0$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{4} + 5x \right) = 0$$

$$5x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$5x = \frac{2\pi - \pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}.$$

$$(2): 2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x) = 0$$

$$\begin{aligned} (*) : \cos 5x + \sin 5x &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos 5x + \sin \frac{\pi}{4} \sin 5x \right) = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - 5x \right) = \\ &= \sqrt{2} \cos \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

$$2 \cos 2x - \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$2 \left(\cos 2x - \cos \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) \right) = 0 \quad | :2$$

$$\cos 2x - \cos \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$-2 \sin \frac{2x + 5x - \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \sin \frac{2x - 5x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

$$-2 \sin\left(3,5x - \frac{\pi}{8}\right) \cdot \sin\left(-1,5x + \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

$$2 \sin\left(3,5x - \frac{\pi}{8}\right) \cdot \sin\left(1,5x - \frac{\pi}{8}\right) = 0 \quad | :2$$

$$\sin\left(3,5x - \frac{\pi}{8}\right) \cdot \sin\left(1,5x - \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

$$\begin{cases} \sin\left(3,5x - \frac{\pi}{8}\right) = 0 \\ \sin\left(1,5x - \frac{\pi}{8}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3,5x - \frac{\pi}{8} = \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 1,5x - \frac{\pi}{8} = \pi l, l \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{7}{2}x = \frac{\pi}{8} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{3}{2}x = \frac{\pi}{8} + \pi l, l \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi}{56} + \frac{2\pi k}{7}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2\pi}{24} + \frac{2\pi l}{3}, l \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (2)$$

$$(2) \begin{cases} x = \frac{\pi}{14} + \frac{2\pi k}{7}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi l}{3}, l \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$U_2(1) \cup (2)$:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{105}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi l}{3}, l \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{105}, k \in \mathbb{Z}; x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z};$
 $x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi l}{3}, l \in \mathbb{Z}.$

$$(3) \begin{cases} \text{II) } \left(\frac{x^2}{y^2}\right)^{\lg y} = \text{IV) } (-x)^{\lg(-xy)} \\ 2y^2 - xy - x^2 < 4x - y^2 = 0 \end{cases}$$

ОДЗ: $x > 0, y > 0 \Rightarrow x < 0, y > 0$

Прологарифмируем обе части:

$$\begin{aligned} \text{1) } \lg_{10}\left(\frac{x^2}{y^2}\right)^{\lg y} &= \lg y \cdot \lg \frac{x^2}{y^2} = \lg y (\lg x^2 - \lg y^2) = \lg y \cdot \lg x^2 - \\ &= \lg y \cdot \lg y^2 = 4 \lg y \cdot \lg(-x) - 2 \lg^2 y, \text{ так как } x < 0. \end{aligned}$$

$$\text{2) } \lg(-x)^{\lg(-xy)} = \lg(-xy) \cdot \lg(-x) = (\lg(-x) + \lg(y)) \cdot \lg(-x) =$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$= \lg^2(-x) + \lg(-x) \cdot \lg(y)$$

$\lg(1)$ и $\lg(2)$!

$$4 \lg y \cdot \lg(-x) - 2 \lg^2(y) - \lg^2(-x) - \lg(-x) \cdot \lg(y) = 0$$

Пусть $\lg(-x) = a$, $\lg(y) = b$, тогда

$$4ab - 2b^2 - a^2 - ab = 0$$

$$-2b^2 - a^2 + 3ab = 0$$

$$a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$$

$$D = (3b)^2 - 4 \cdot 2b^2 = 9b^2 - 8b^2 = b^2$$

$$a_1 = \frac{3b + b}{2} = \frac{4b}{2} = 2b$$

$$a_2 = \frac{3b - b}{2} = b$$

Одн. замена!

$$\begin{cases} \lg(-x) = 2\lg(y) \\ \lg(-x) = \lg(y) \\ 2\lg y = \lg y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x = y^2 \\ -x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y^2 \\ x = -y \end{cases}$$

Подставим значения по-очереди во II-е уравнение!

$$1) -x = y^2$$

$$x = -y^2$$

$$2y^2 - (-y^2)y - (-y^2)^2 - 4(-y^2) - 8y = 0$$

$$2y^2 + y^3 - y^4 + 4y^2 - 8y = 0$$

$$-y^4 + y^3 + 6y^2 - 8y = 0$$

$$y^4 - y^3 - 6y^2 + 8y = 0$$

$$y(y^3 - y^2 - 6y + 8) = 0$$

Рассмотрим $y^3 - y^2 - 6y + 8 = 0$.

заменим, что один из корней $y = 2$, тогда по т. Безу:

$$\begin{array}{r|l} y^3 - y^2 - 6y + 8 & y-2 \\ \underline{-y^3 + 2y^2} & y^2 + y - 4 \\ -y^2 - 2y & \\ \underline{-y^2 - 2y} & 4y + 8 \\ 4y + 8 & \\ \underline{-4y + 8} & 0 \end{array} \quad y^3 - y^2 - 6y + 8 = (y-2)(y^2 + y - 4)$$

Тогда уравнение примет вид:

$$y(y-2)(y^2 + y - 4) = 0$$

$$\Delta: D = 1 + 4 \cdot 4 = 17$$

$$y_1 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$$

$$y_2 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

$$y(y-2)(y^2 + y - 4) = y(y-2)\left(y - \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}\right)\left(y - \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}\right) = 0$$

Тогда:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -y^2 \\ y = 0 \\ y = 2 \\ y = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -y \\ y = 2 \\ y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -4 \\ y = 2 \\ x = -\frac{\sqrt{-1 + \sqrt{17}}}{2} \\ y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \end{array} \right.$$

2) $x = -y$;

$$4y^2 - (-y)y - (-y)^2 - 4(-y) - 8y = 0$$

$$4y^2 + y^2 - y^2 + 4y - 8y = 0$$

$$4y^2 - 4y = 0$$

$$4y(y-2) = 0$$

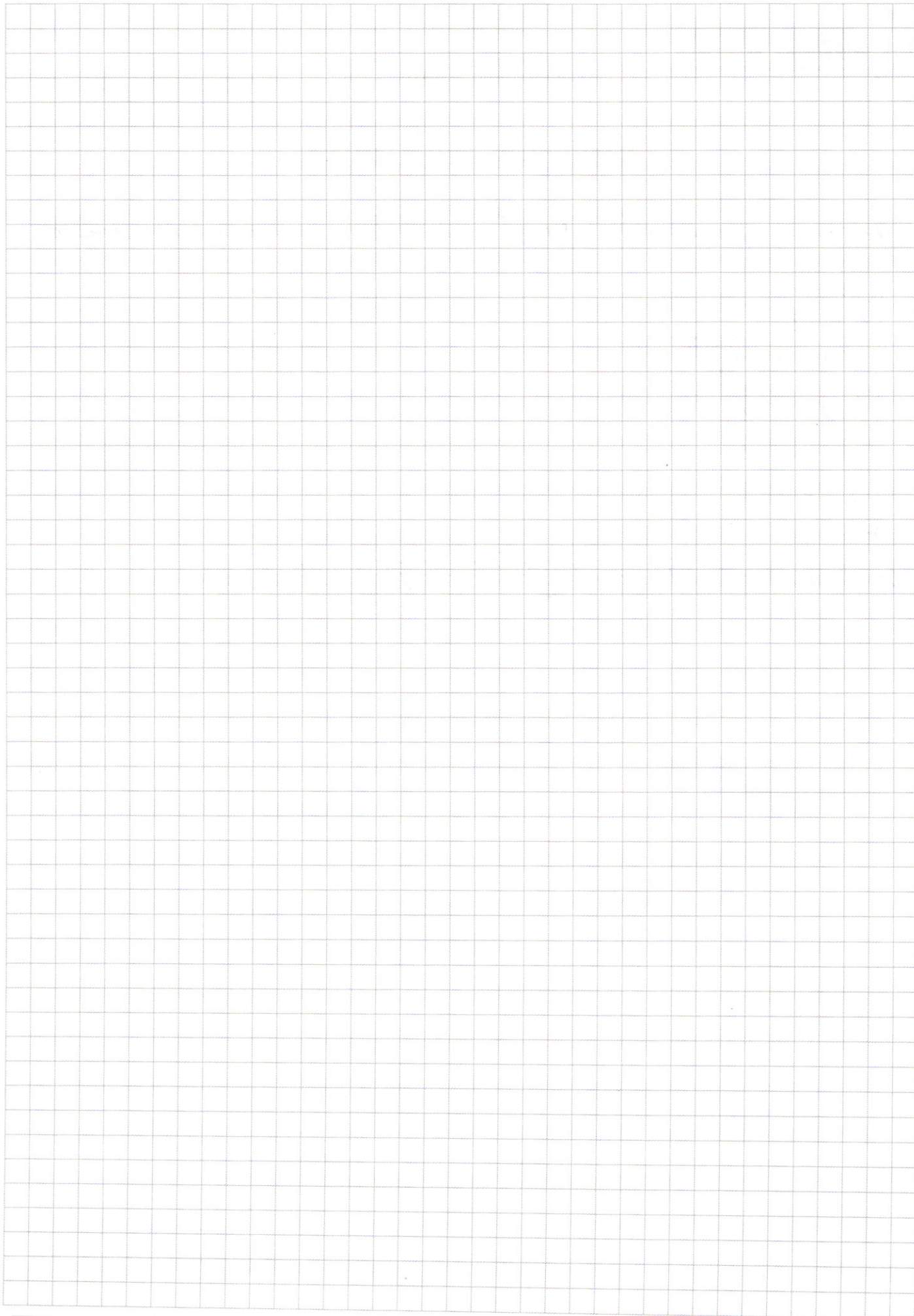
$$\left\{ \begin{array}{l} x = -y \\ y = 0 \\ y = 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -y \\ y = 2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -2 \\ y = 2 \end{array} \right.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Значит, решение ~~тогда~~ ^{если} будет ^{есть} иметься такая совокупность:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -4 \\ y = 2 \\ x = -\sqrt{\frac{-1+\sqrt{17}}{2}} \\ y = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \\ x = -2 \\ y = 2 \end{array} \right.$$

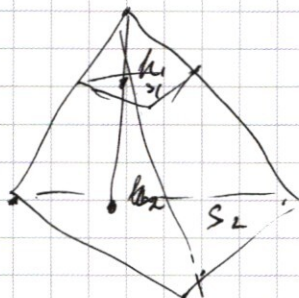
Ответ: $(-4; 2); (-\sqrt{\frac{-1+\sqrt{17}}{2}}; \frac{-1+\sqrt{17}}{2}); (-2; 2).$



☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 8
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



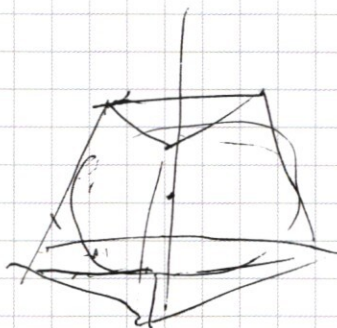
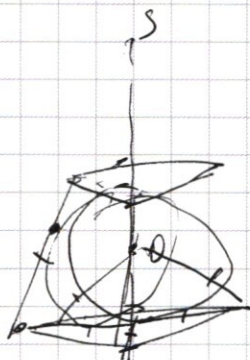
$$V = V_1 + V_2$$

$$V = Sh = \frac{1}{3} S_2 (h_1 + h_2)$$

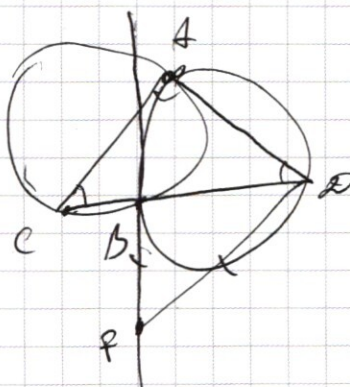
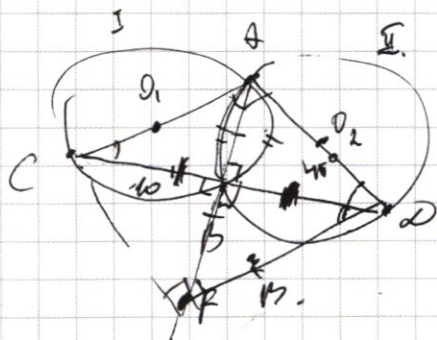
$$V_1 = \frac{1}{3} S_1 \cdot h_1$$

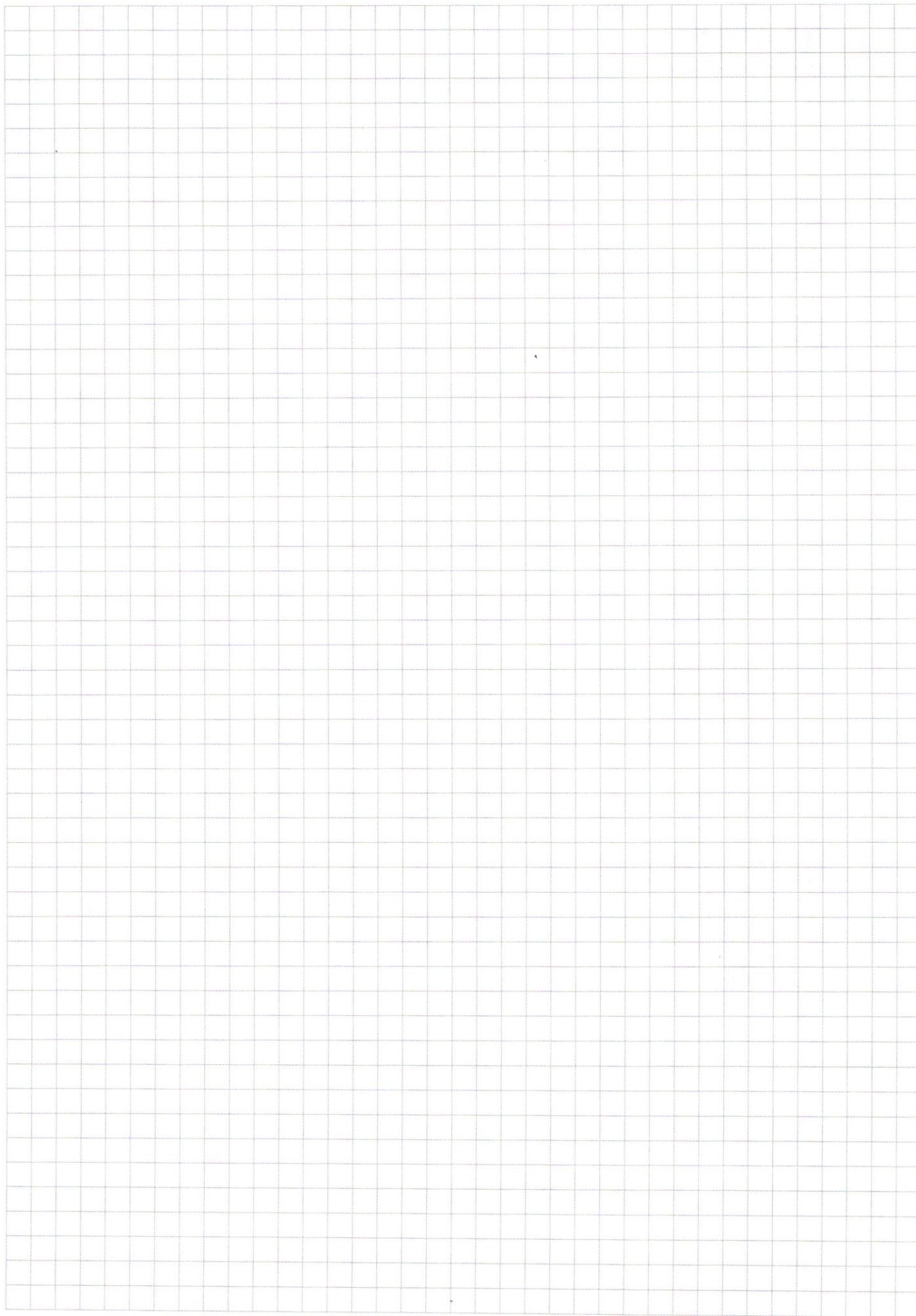
$$h_2 = \frac{1}{3} S, \quad V_2 = \frac{1}{3} S_2 h_1 + \frac{1}{3} S_2 h_2 - \frac{1}{3} S_1 h_1 =$$

$$= \frac{1}{3} (h_1 (S_2 - S_1) + S_2 h_2)$$



6.





☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8$$

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdot a_7 \cdot a_8 =$$

$$= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 =$$

$$= 3^3 \cdot 5^4$$

$$0 \leq a_k \leq 9$$

а) У нас есть 2 способа представления этих чисел:

1) Когда каждое a_k — либо 3, либо 5, либо 1.

$$A_1 = \{1; 3; 3; 3; 5; 5; 5; 5\}$$

$$k_1 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3! \cdot 4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 5}{6!} = \frac{56 \cdot 5}{1} = 280$$

$$\begin{array}{r} \times 56 \\ \times 5 \\ \hline 280 \end{array}$$

2) Когда каждое a_k равно 9, ~~или~~ + остальные

либо 3, либо 5, либо 1

$$A_2 = \{1; 1; 3; 5; 5; 5; 5; 9\}$$

$$k_2 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 8!}{2! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8^4}{2,} = 30 \cdot 28 = 840$$

$$\begin{array}{r} \times 28 \\ \times 30 \\ \hline 840 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 40 \\ + 280 \\ \hline 1120 \end{array}$$

$$k_1 + k_2 = 280 + 840 = 1120$$

$$\{ AA BB \} \quad \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 6$$

A A B B
 A B A B
 B A B A
 B A A B
 A B B A
 B B A A

$$2. \quad \cos 7x + \cos 3x = \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\cos 7x + \cos 3x = 2 \cos \frac{10x}{2} \cdot \cos \frac{4x}{2} = 2 \cos 5x \cdot \cos 2x$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin 7x + \sin 3x = 2 \sin \frac{10x}{2} \cos \frac{4x}{2} = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$\cos 10x = \cos^2 5x - \sin^2 5x$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x = \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x = \sqrt{2} \cos^2 5x + \sqrt{2} \cdot \sin^2 5x - 2 \sin 5x \cos 2x = 0$$

$$\cos 5x (2 \cos 2x - \sqrt{2} \cos 5x) + \sin^2 5x (\sqrt{2} \sin 5x - 2 \cos 2x) = 0$$

$$2 \cos 2x (2 \cos 5x - \sqrt{2} \sin 5x) = \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x)$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x) \quad \text{/: } \cos 5x - \sin 5x$$

$$2 \cos 2x = \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)$$

$$\sin 5x + \cos 5x = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 5x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 5x \right) =$$

$$= \sqrt{2} \left(\sin \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \sin 5x + \cos \frac{\pi}{4} \cos 5x \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos 5x + \sin \frac{\pi}{4} \sin 5x \right) =$$

$$= \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} - 5x \right) \right)$$

$$2 \cos 2x = 2 \cos \left(\frac{\pi}{4} - 5x \right) \quad | :2$$

$$\cos 2x = \cos \left(\frac{\pi}{4} - 5x \right) = 0$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos 2x - \cos \left(\frac{\pi}{4} - 5x \right) = -2 \sin \frac{2x + \frac{\pi}{4} - 5x}{2} \cdot \sin \frac{2x - \frac{\pi}{4} + 5x}{2} =$$

$$= -2 \sin \left(-\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{8} \right) \cdot \sin \left(\frac{7}{2}x - \frac{\pi}{8} \right)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) = \sqrt{2} \cos\left(6x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$2 \cos 2x - \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos\left(6x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$2 \left(\cos 2x - \cos\left(6x - \frac{\pi}{4}\right) \right) = 0 \quad | :2$$

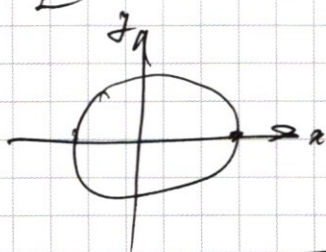
$$\cos 2x - \cos\left(6x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$2 \cos \frac{2x + 6x - \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \sin \frac{2x - 6x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow -2 \sin\left(3,5x - \frac{\pi}{8}\right) \cdot \sin\left(-1,5x + \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

$$2 \sin\left(3,5x - \frac{\pi}{8}\right) \cdot \sin\left(1,5x - \frac{\pi}{8}\right) = 0 \quad | :2$$

$$\begin{cases} \sin\left(3,5x - \frac{\pi}{8}\right) = 0 \\ \sin\left(1,5x - \frac{\pi}{8}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3,5x - \frac{\pi}{8} = \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 1,5x - \frac{\pi}{8} = \pi l, l \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow$$



$$\begin{cases} 3 \frac{7}{2} x = \frac{\pi}{8} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{3}{2} x = \frac{\pi}{8} + \pi l, l \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi}{56} + \frac{2\pi k}{7}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2\pi}{24} + \frac{2\pi l}{3}, l \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi l}{3}, l \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: $U_8 \setminus \{1\} \cup \{2\}$:

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{10}, k \in \mathbb{Z}; \quad x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7}, k \in \mathbb{Z}; \quad x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi l}{3}, l \in \mathbb{Z}.$$

$$3. \begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ 2y^4 - xy - x^2 - 4x - 9y = 0 \end{cases}$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} =$$

ОДЗ: $-x > 0, y > 0 \Rightarrow x < 0, y > 0$.

$$\lg(-xy) = \lg(-x) + \lg y$$

$$(-x)^{\lg(-x)} \cdot (y)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-x)}$$

$$\begin{aligned} (-x)^{\lg(-x)} &= \log_{10}(-x)^{\lg(-x)} = \log_{10}(-x) \cdot \log_{10}(-x) = \\ &= \lg^2(-x) \cdot (-x)^{\lg y} \end{aligned}$$

$$\log_{10} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = \lg y \cdot \lg \frac{x^4}{y^2} = \lg y \cdot (\lg x^4 - \lg y^2) =$$

$$\begin{aligned} \log_{10}(-x)^{\lg(-xy)} &= \lg(-xy) \cdot \lg(-x) = (\lg(-x) + \lg y) \cdot \lg(-x) = \\ &= \lg^2(-x) + \lg(-x) \cdot \lg y \end{aligned}$$

$$\lg y \cdot \lg x^4 - \lg y^2 \cdot \lg y = 4 \lg y \cdot \lg(-x) - 2 \lg^2 y$$

$$4 \lg y \cdot \lg(-x) - 2 \lg^2 y - \lg^2(-x) - \lg(-x) \cdot \lg y = 0$$

Пусть $\lg x = a, \lg y = b$, тогда

$$4ba - 2b^2 - a^2 - ab = 0$$

$$2b^2 - 3ab + 2a^2 = 0$$

$$D = 9b^2 - 4 \cdot 2b^2 = 9b^2 - 8b^2 = b^2 \neq$$

$$a_1 = \frac{3b+b}{2} = 2 \frac{4b}{2} = 2b$$

$$a_2 = \frac{3b-b}{2} = \frac{2b}{2} = b$$

Одр. значения:

$$\begin{cases} \lg(-x) = 2 \lg y \\ \lg(-x) = \lg y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x = y^2 \\ -x = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y^2 \\ x = -y \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos 7x + \cos 3x = 2 \cos x \cdot \cos 2x$$

$$\sin 7x + \sin 3x = 2 \sin x \cdot \cos 2x$$

$$\sqrt{2} \cos 5x = \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = (\cos 5x - \sin 5x) \cdot (\cos 5x + \sin 5x)$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x - 2 \sin 5x \cdot \cos 2x = \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x) = 0$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x) = 0$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) (2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 5x - \sin 5x = 0 & (1) \\ 2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \rightarrow \cos 5x = \sin 5x \Rightarrow \cos 5x - \sin 5x = \sqrt{2} \left(\cos \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos 5x - \sin \cos \frac{\pi}{4} \cdot \sin 5x \right) = 0$$

$$= \sqrt{2} \left(\sin \left(\frac{\pi}{4} - 5x \right) \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos 5x - \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin 5x \right) = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} + 5x \right) \right)$$

$$\sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} + 5x \right) = 0$$

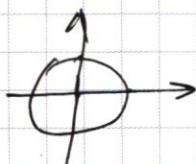
$$\cos \left(\frac{\pi}{4} + 5x \right) = 0$$

$$5x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$5x = \frac{2\pi - \pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}$$



$$(2): 2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x) = 0$$

$$\cos 5x + \sin 5x = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos 5x + \sin \frac{\pi}{4} \sin 5x \right) = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - 5x \right)$$

$$\begin{cases} x = -y^2 \\ y = 0 \\ y = 2 \\ y = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ y = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \xrightarrow{OOS} \begin{cases} x = -y^2 \\ y = 2 \\ y = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x = -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ y = 2 \\ y = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

2) $x = -y$:

$$2y^2 - (-y/y) - (-y)^2 - 4(-y) - 8 = 0$$

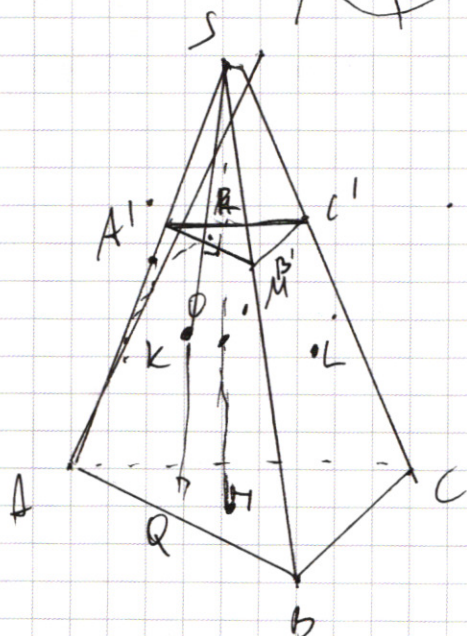
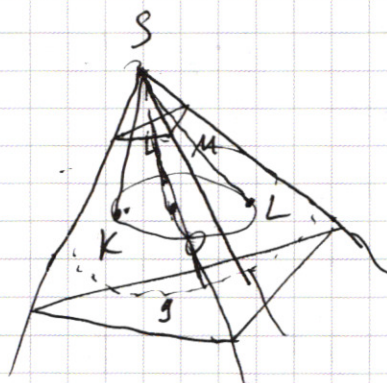
$$2y^2 + y^2 - y^2 + 4y - 8 = 0$$

$$2y^2 - 4y = 0$$

$$2y(y-2) = 0$$

$$\begin{cases} x = -y \\ y = 0 \\ y = 2 \end{cases} \xrightarrow{OOS} \begin{cases} x = 0 \\ x = -y \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Ответ: ...



Пл.к. $(A'B'C') \perp SO$ и
и $AK \perp SO$, $(A'B'C') \parallel (SO \perp ABC)$.

О лежит в центре усеченной
пирамиды $AKA'B'C'$, т.к.

OK и OQ — касаются поверхности
и равное радиусу шара.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2(-x) = x$$

$$1) -x = y^2$$

$$x = -y^2$$

$$2y^2 - (-y^2)y - (y^2)^2 - 4(-y^2) - py = 0$$

$$2y^2 + y^3 - y^4 + 4y^2 - py = 0$$

$$-y^4 + y^3 + 6y^2 - py = 0$$

$$y^4 - y^3 - 6y^2 + py = 0$$

$$y(y^3 - y^2 - 6y + p) = 0$$

$$y((y^3 + p) - (y^2 + 6y)) = y((y+2)(y^2 - 2y + 4) - y(y+6))$$

$$y^3 + p = (y+2)(y^2 - 2y + 4)$$

$$2^3 - 2^2 - 6 \cdot 2 + p = p - 4 - 12 + p = 0.$$

$$\begin{array}{r|l} y^3 - y^2 - 6y + p & y-2 \\ \hline y^3 - 2y^2 & y^2 + y - 4 \\ \hline -y^2 - 6y & \\ -y^2 - 2y & \\ \hline -4y + p & \\ -4y + 8 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$y(y-2)(y^2 + y - 4) = y(y-2)\left(y - \frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)\left(y - \frac{1+\sqrt{17}}{2}\right) = 0.$$

$$D = 1 + 4 \cdot 4 = 17$$

$$y_1 = \frac{-1+3}{2} = 1$$

$$y_2 = \frac{-1-3}{2} = -2$$

$$y_3 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$$

$$y_4 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$$

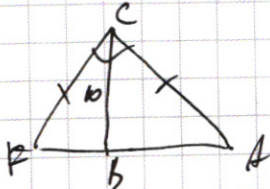
6.

Дано: $R = 15$ Пусть центры окружностей будут O_1 и O_2 .~~П.к. $\triangle CAD$~~ П.к. треугольники $\triangle AFB$ и $\triangle ADB$ опираютсяна одну и ту же дугу, то $\angle ACB = \angle ADB \Rightarrow$ $\Rightarrow \triangle ACB - \text{р/б. и к/у. (по условию)} \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle ACB = \angle ADB = 45^\circ.$

(2)

 ~~$\triangle ABD - \text{п/т, т.к. } \angle ADB = 90^\circ$ (по условию) $\Rightarrow$~~ $\Rightarrow \triangle ABC - \text{п/т} \Rightarrow AC - \text{лежит на диаметре,}$ аналогично с $\triangle ABD$, $\Rightarrow AD - \text{диаметр второй окр-ти.}$ x П.к. $AB - \text{перпендикуляр, опущенный из вершины р/б}$ $\triangle - \text{ки, то } CB = BD$, и биссектриса $\Rightarrow \angle ACB = \angle ADB$.Значит, $\angle CAB = \angle DAB = 45^\circ$, $\Rightarrow \triangle CDA \cong \triangle ADB$ (1)Из (1) и (2): $\triangle ABC - \text{р/б.} \Rightarrow AC = AB$.Из условия: $BF = BD$, а $BD = BC = AB$, $\angle CAD = \angle AFB \perp AD$
(по условию) $\Rightarrow ABFC - \text{квадрат, т.к. диагонали отсекают}$
равные отрезки и угол между диагоналями 90° .Значит, $AD = CF = 2 \cdot 15$, т.е. $AD - \text{диаметр.}$ $CF = 26$.

8/



$$S = \frac{1}{2} a \cdot h, \quad h = 10.$$

$$AF = 2 \cdot BC = 20.$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 20 = 100.$$

Отв. 100.