

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

- ⊕ 1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
- ⊕ 2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
- ⊕ 3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
- ⊕ 5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
- ⊕ 7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1. $16875 = 5^4 \cdot 3^3 \cdot 1$

Чтобы произведение цифр было равно 16875, в числе должно быть 4 пятёрки, 3 тройки и единица или 4 пятёрки, 1 девятка, 1 тройка и 2 единицы. Найдём кол-во чисел каждого вида.

1) 4 "5", 3 "3", 1 "1". Пусть имеется 8 пустых клеток — мест, куда будем ставить цифры. Сначала поставим пятёрки: их можно поставить (без учёта порядка) C_8^4 способами. В оставшиеся 4 клетки единицу можно поставить C_4^1 способами. Остается 3 клетки, куда однозначно ставится 3 тройки. Итого таких чисел $C_8^4 \cdot C_4^1$.

2) 4 "5", 1 "9", 1 "3", 2 "1". Пусть также имеется 8 пустых клеток. Пятёрки ^(одинаковые) в них можно поставить C_8^4 способами. В оставшиеся 4 клетки 2 единицы (одинаковые) можно поставить C_4^2 способами. Остается 2 клетки. Ставим тройку какими-то из C_2^1 способов. В оставшуюся клетку однозначно ставится девятка. Итого таких чисел $C_8^4 \cdot C_4^2 \cdot C_2^1$.

Всего подходящих чисел $C_8^4 \cdot C_4^1 + C_8^4 \cdot C_4^2 \cdot C_2^1 = \frac{8!}{4! \cdot 4!} + \frac{8!}{4! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot 4 + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 2} =$

$$= \frac{28 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2} (4 + 12) = 40 \cdot 16 = 1120$$

Ответ: 1120.

Задача 2. $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 4x = \sin 7x + \sin 3x$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x)$$

$$(2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)) (\cos 5x - \sin 5x) = 0$$

$$2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x) = 0 \quad (1)$$

$$\cos 5x - \sin 5x = 0 \quad (2)$$

$$(1) \cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x = \cos(5x - \frac{\pi}{4})$$

$$2x = 5x - \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$2x = \frac{\pi}{4} - 5x + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$$

$$-3x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{12} - \frac{2}{3}\pi n, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

т.к. n и положительные, и отрицательные бывают

$$x = \frac{\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi m, m \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi m}{7}, m \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z}.$

$$(2) \cos 5x = \sin 5x \quad | : \cos 5x, \cos 5x \neq 0$$

т.к. при $\cos 5x = \sin 5x = 0$, это противоречит $\cos^2 5x + \sin^2 5x = 1$

$$\tan 5x = 1$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z}$$

Задача 3.

$$\lg\left(\frac{x^2}{y^2}\right) \lg y = (-x) \lg(-xy) \quad (1)$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \quad (2)$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} y > 0 \\ -xy > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y > 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

(1) Прологарифмируем обе части ур-я по основанию 10:

$$\lg\left(\frac{x^2}{y^2}\right) \lg y = \lg(-x) \lg(-xy)$$

$$(4 \lg |x| - 2 \lg |y|) \lg y = \lg(-x) (\lg(-x) + \lg |y|)$$

$$|x| = -x, \text{ т.к. } x < 0 \text{ из ОДЗ, } |y| = y, \text{ т.к. } y > 0 \text{ из ОДЗ}$$

$$(4 \lg(-x) - 2 \lg y) \lg y = \lg(-x) (\lg(-x) + \lg y)$$

Замена: $\lg(-x) = a, \lg y = b$

$$(4a - 2b)b = a(a + b)$$

$$4ab - 2b^2 = a^2 + ab$$

$$a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$$

Решим относительно a :

$$D = 9b^2 - 4 \cdot 2b^2 = b^2$$

$$a = \frac{3b \pm 1b}{2} \Leftrightarrow a = \frac{3b \pm b}{2}$$

$$\begin{cases} a = b \\ a = 2b \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Обратная замена:

$$\begin{cases} \lg(-x) = \lg y \\ \lg(-x) = 2 \lg y = \lg y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x = y \\ -x = y^2 \end{cases}$$

Получаем систему: ←

$$\begin{cases} -x = y \\ -x = y^2 \end{cases}$$

↓

$$\begin{cases} -x = y \\ -x = 2y \end{cases} \quad a)$$

$$\begin{cases} -x = y \\ -x = 4-y \end{cases} \quad б)$$

$$\begin{cases} -x = y^2 \\ -x = 2y \end{cases} \quad в)$$

$$\begin{cases} -x = y^2 \\ -x = 4-y \end{cases} \quad г)$$

Ответ: $(-2; 2), (-4; 2),$
 $(\frac{9-\sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17}-1}{2}).$

$$\begin{aligned} (2) \quad & 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \\ & x^2 + (y+4)x + (8y - 2y^2) = 0 \end{aligned}$$

Решим относительно x :

$$\begin{aligned} D &= (y+4)^2 - 4 \cdot (8y - 2y^2) = y^2 + 8y + 16 - 32y + 8y^2 = 9y^2 - 24y + 16 = (3y-4)^2 \\ x &= \frac{-y-4 \pm (3y-4)}{2} \Rightarrow x = \frac{-y-4 \pm (3y-4)}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-y-4-3y+4}{2} = -2y \\ x &= \frac{-y-4+3y-4}{2} = y-4 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} -x = 2y \\ -x = 4-y \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} -x = y \\ y = 2y \Rightarrow y = 0 \text{ — не удовл. ОДЗ} \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} -x = y \\ y = 4-y \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = -2 \end{cases} \text{ — удовл. ОДЗ} \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} -x = y^2 \\ y^2 = 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \text{ — не удовл. ОДЗ} \\ y = 2 \\ -x = y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = -4 \end{cases} \text{ — удовл. ОДЗ}$$

$$г) \begin{cases} -x = y^2 \\ y^2 = 4-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \text{ — не удовл. ОДЗ} \\ y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \\ x = y-4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \\ x = \frac{\sqrt{17}-9}{2} \end{cases} \text{ — удовл. ОДЗ}$$

$$5. \begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 & (1) \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a & (2) \end{cases}$$

② Заметим, что это ур-е 4-х окружностей с центрами в точках $(-6; -8)$, $(-6; 8)$, $(6; -8)$, $(6; 8)$ и радиусом $\sqrt{a}$ (показано, что при $a < 0$ решений нет, значит, и окружностей нет).

① $|y - (x-6)| + |y - (6-x)| = 12$ - ур-е квадрата, вершины в точках $(12; 6)$, $(12; -6)$, $(0; 6)$, $(0; -6)$.

В точке $x=6$ y имеет 2 значения: $y = \pm 6$. Покажем, как раскрывается модуль:

Пусть $x-6 > 6-x \Rightarrow x > 6$

	$6-x$	$x-6$	
$y-(x-6)$	-	-	+
$y-(6-x)$	-	+	+
	а	б	в

а) $y < 6-x$

$$(x-6-y) + (6-x-y) = 12$$

$\begin{cases} y < 6-x \\ y = -6 \end{cases}$ - область ниже прямой $y = 6-x$

б) $6-x \leq y < x-6$

$$(x-6-y) + (y-6+x) = 12$$

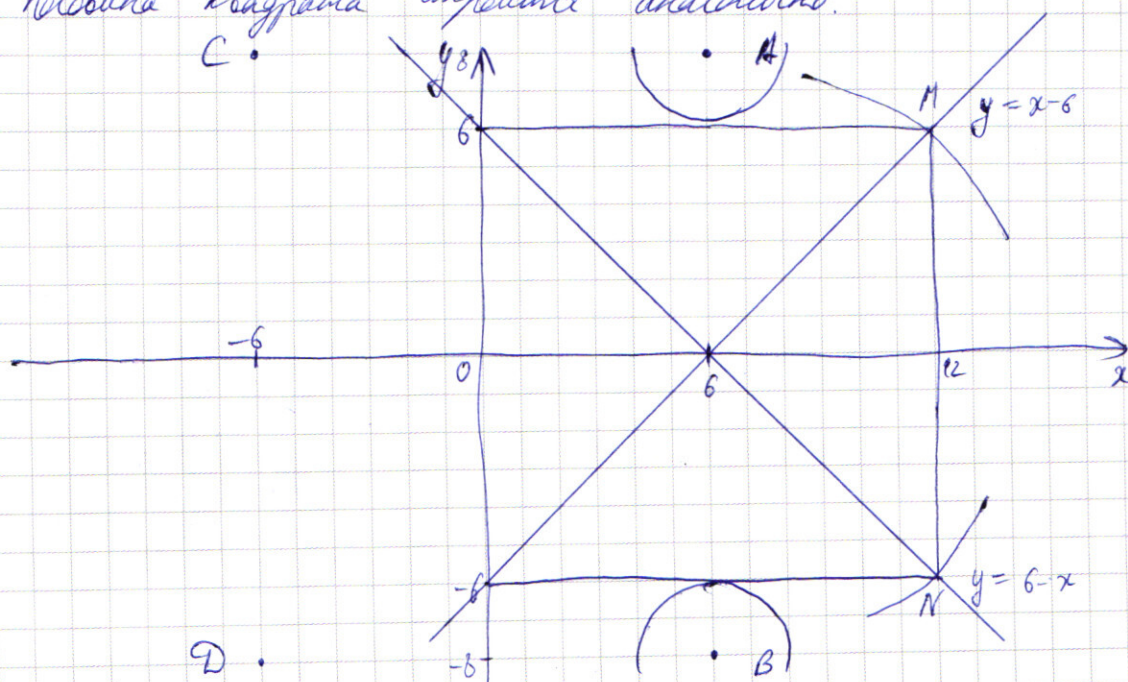
$\begin{cases} 6-x \leq y < x-6 \\ x = 12 \end{cases}$ - область между линиями $y = 6-x$ и $y = x-6$

в) $y \geq x-6$

$$(y-x+6) + (y-6+x) = 12$$

$\begin{cases} y \geq x-6 \\ y = 6 \end{cases}$ - область выше прямой $y = x-6$

Вторая половина квадрата строится аналогично.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Заметим, что окружности могут касаться квадрата только в 2 случаях (т.к. заданные симметричны относительно Ox , то точек пересечения с квадратом четное кол-во):

а) окружности с центрами в точках A и B имеют радиус $\sqrt{2}$ (касаются верхней и нижней ребер соответственно), окружности C и D не касаются и не пересекают квадрат.

б) окружности с центрами в точках C и D пересекают вершины N и M квадрата соответственно, радиус каждой из окружностей — расстояние между точками D и M :

$$R(D; M) = \sqrt{(x_M - x_D)^2 + (y_M - y_D)^2} = \sqrt{18^2 + 14^2}$$

Окружности с центрами в т. A и B не пересекают квадрат, имея радиус $\sqrt{18^2 + 14^2}$, т.к. самый большой радиус, при котором они пересекают квадрат — равен из расстояния между A и N : $R = \sqrt{14^2 + 6^2} < \sqrt{14^2 + 18^2}$ (при этом радиусе 4 реш.)

Окружности с центрами C и D не пересекают квадрат больше ни в каких точках, кроме N и M соотв. (можно проследить, как при движении точки M по квадрату уменьшается оставшаяся до y , а затем по x в расстоянии до точки D)

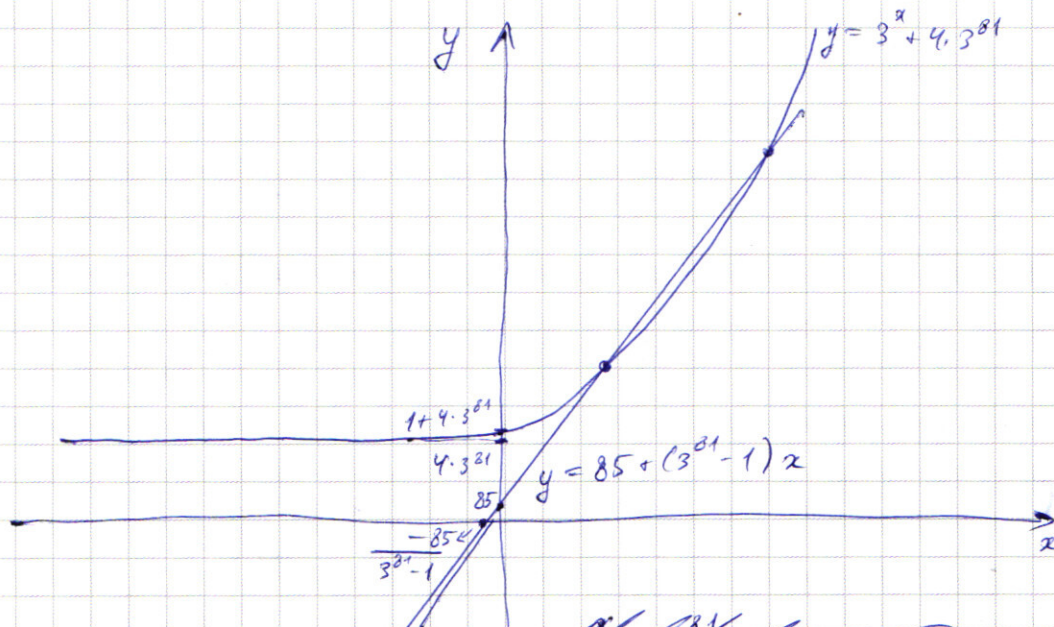
При $a > \sqrt{18^2 + 14^2}$ все 4 окружности содержат в себе квадрат, при $a \in (\sqrt{2}; \sqrt{18^2 + 14^2})$ окружности пересекают квадрат больше, чем в 2 точках, при $a \leq \sqrt{2}$ не пересекают.

Ответ: $\sqrt{2}$, $\sqrt{18^2 + 14^2}$

~~Задача 7.~~ Задача 7.

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Скелетично построи графики каждой из функций $y_1 = 3^x + 4 \cdot 3^{81}$ и $y_2 = 85 + (3^{81} - 1)x$.



~~Укажем, что т.к. функция $y = 3^x + 4 \cdot 3^{81}$ растет быстрее функции $y = 85 + (3^{81} - 1)x$ при $x > 85$ и $y_1 > y_2$ при $x < 4$ и $y_1 < y_2$ при $4 < x < 85$.~~

Попробуем подобрать точки пересечения графиков: это $x = 4$ и $x = 85$.
Докажем, что других нет, т.е. $y_1 > y_2$ при $x < 4$ и $y_1 < y_2$ при $4 < x < 85$:

$3^x + 4 \cdot 3^{81} > 85 + (3^{81} - 1)x$ при $x \geq 86$ (ли рассматриваем только значения x и y): левая часть растет хотя бы на $3^{85} \cdot 2$ относительно предыдущего значения, а правая — на $3^{81} - 1$, $2 \cdot 3^{85} > 3^{81} - 1$.

$3^x + 4 \cdot 3^{81} > 85 + (3^{81} - 1)x$ при $x \leq 3$: левая часть уменьшается не более, чем на $2 \cdot 3^3$ относительно предыдущего (большее значения), а правая — всегда на $3^{81} - 1$, $2 \cdot 3^3 < 3^{81} - 1$.

~~$3^x + 4 \cdot 3^{81} < 85 + (3^{81} - 1)x$ при $4 \leq x \leq 84$. левая часть растет не более, чем на $2 \cdot 3^3$.~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

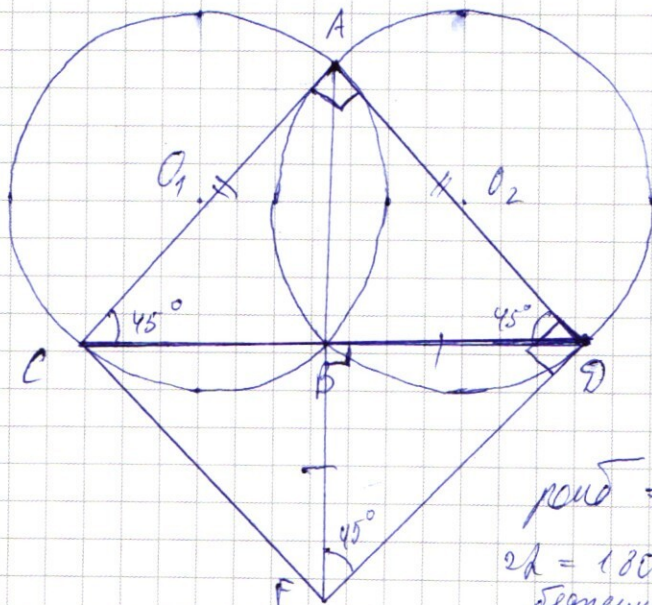
График может касаться графика без экстремумов только в одной точке $\Rightarrow$ эти 2 точки - пересечения $\Rightarrow$ ~~они~~ на отрезке $x \in [4; 85]$ график пересекается в количестве больше $y_1 \Rightarrow y_2 > y_1$. Во всех остальных точках $x > 1$ y_1 и y_2 - целые числа. Они не совпадают нигде, кроме $x=4$ и $x=85$, следовательно, для всех остальных y может принимать хотя бы 1 значение.

Посчитали кол-во пар чисел $(x; y)$, оно совпадает с таблицей кол-ва значений y на отрезке $x \in [5; 84]$:

$$S = (85 + 3^{81} \cdot 5 - 5 - 3^5 + 4 \cdot 3^{81}) + (85 + 6 \cdot 3^{81} - 6 - 3^6 - 4 \cdot 3^{81}) + \dots + (85 + 84 \cdot 3^{81} - 84 - 3^{84} - 4 \cdot 3^{81}) = 85 \cdot 80 + \frac{5+84}{2} \cdot 80 \cdot 3^{81} - \frac{5+84}{2} \cdot 80 - \frac{3^5(3^{80}-1)}{3-1} - 80 \cdot 4 \cdot 3^{81} = 6800 + 3560 \cdot 3^{81} - 3560 - \frac{81(3^{81}-3^5)}{2} - 320 \cdot 3^{81} = 3240 + 3240 \cdot 3^{81} - 40,5 \cdot 3^{81} + 3260,5 = 6520,5 + 3199,5 \cdot 3^{81}$$

Ответ: $6520,5 + 3199,5 \cdot 3^{81}$.

6.



Пусть $\angle ACB = \alpha$, тогда $\angle ADC = 90^\circ - \alpha$. Тогда по св-ву центральных и вписанных углов $\angle AO_1B = 2\alpha$, $\angle AO_2B = 180^\circ - 2\alpha$.

$$AO_1 = O_1B = BO_2 = O_2A \Rightarrow AO_1, BO_2 -$$

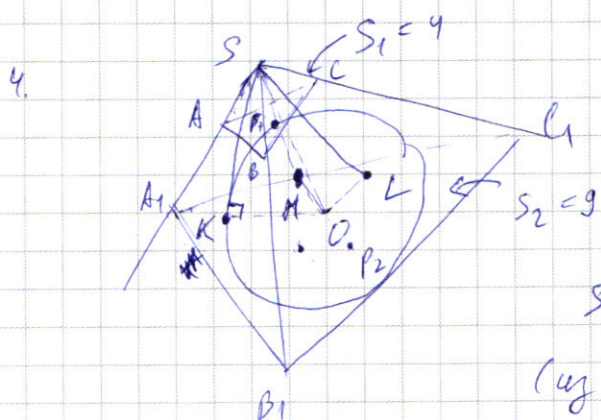
$$\text{радиусы} \Rightarrow \angle AO_1B = \angle AO_2B$$

$$2\alpha = 180^\circ - 2\alpha \Rightarrow \alpha = 45^\circ \Rightarrow \triangle CAD - \text{равнобедренный, } AD = AC$$

$$\angle AOB = \angle AOB = 90^\circ \Rightarrow AB^2 = AO^2 + OB^2 \text{ по Т. Пифагора}$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{2}R = \sqrt{2} \cdot 13$$

$\triangle FBD$ — равнобедренный по условию, $\angle FBD = 90^\circ \Rightarrow \angle BFD = \angle BDF = 45^\circ \Rightarrow \angle ADF = 90^\circ$



$OK = OM = OL = OP_1 = OP_2$, где P_1 и P_2 — точки касания плоскостей (ABC) и $(A_1B_1C_1)$ сферой.

$SABC$ и $SA_1B_1C_1$ — подобные пирамиды
(из свойств подобия) $\Rightarrow \frac{SP_1}{S(ABC)} = \frac{SP_1 + D}{S(A_1B_1C_1)}$

где D — радиус сферы. $9SP_1 = 4SP_1 + 4D = 4SP_1 + 8R$

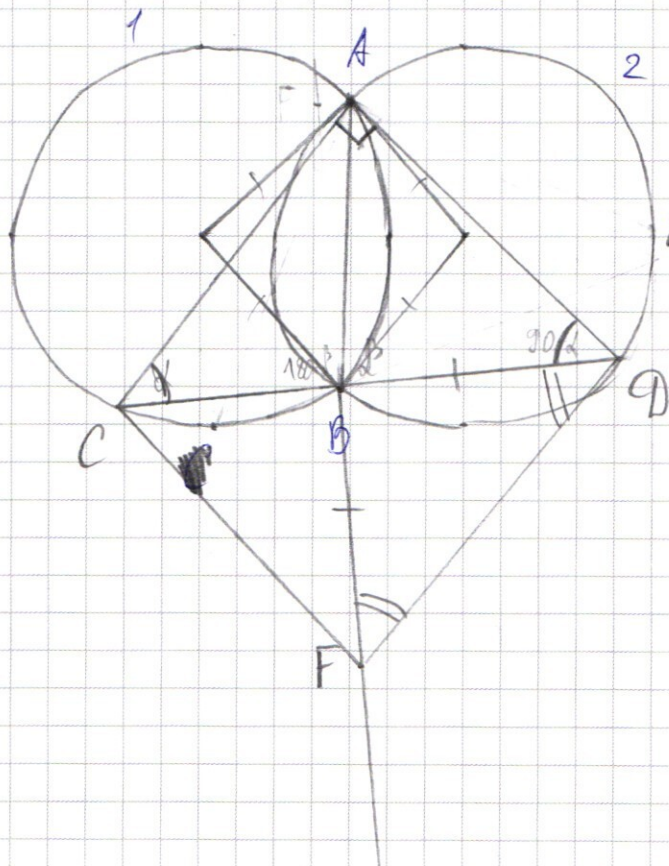
$5SP_1 = 8R \Rightarrow SP_1 = \frac{8}{5}R$. $SO = SP_1 + P_1D = \frac{13}{5}R$

$\angle KSO = \angle KSO = \frac{OK}{OS} = \frac{R}{\frac{13}{5}R} = \frac{5}{13} \Rightarrow$

$\angle KSO = \arccos \frac{5}{13}$.

Ответ: $\arccos \frac{5}{13}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$180 - 2\alpha = 2\alpha$$

$$130 = 4 \alpha$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$$180 - (180 - \beta + 45) + 180 - (\beta + 45)$$

$$= 180 - 180 + \beta - 45 + 180 - \beta - 45$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} (\cos(3x+7x)) = \cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} (\cos 3x \cos 7x - \sin 3x \sin 7x)$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 7x \cos 3x = \sin 7x + \sin 3x + \sqrt{2} \sin 3x \sin 7x$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos^2 5x = \sin 7x + \sin 3x + \sqrt{2} \sin^2 5x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos^2 5x = 2 \sin 5x \cos 2x + \sqrt{2} \sin^2 5x$$

$$\cos 5x (2 \cos 2x - \sqrt{2} \cos 5x) = \sin 5x (2 \cos 2x + \sqrt{2} \sin 5x)$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - 2 \sin 5x \cos 2x = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x) (\cos 5x - \sin 5x)$$

$$\begin{cases} \cos 5x = \sin 5x \\ 5x = \frac{\pi}{4} + \pi k \end{cases}$$

$$2 \cos 2x = \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)$$

$$\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x = \cos \frac{\pi}{4} \cos 5x + \sin \frac{\pi}{4} \sin 5x = \cos(5x - \frac{\pi}{4})$$

$$2x = 5x - \frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

$$2x = \frac{\pi}{4} - 5x + 2\pi m$$

$$\begin{array}{r} 3^4 + 4 \cdot 3^{81} \\ - 3^3 + 4 \cdot 3^{81} \\ \hline 3 \cdot 3^8 - 3^3 = 2 \cdot 3^3 \end{array}$$

$$|x-6-y| = 12 - |x-6+y|$$

$$|x-6-y| = 12 - |x-6+y|$$

$$|x-6-y| = |x-6+y| - 12$$

$$|x-6+y| = 12 - x + 6 + y = 18 - x + y$$

$$|x-6+y| = x - 6 - y + 12 = 6 + x - y$$

$$x - 6 + y = 18 - x + y$$

$$3^{85} + 4 \cdot 3^{81} = 85 \cdot (3^{21} - 1) \cdot 85$$

$$3^{85} + 4 \cdot 3^{81} = 3^4 + 4 + 3^{81} \cdot (3^4 + 4)$$

$$- 3^4 - 4$$

$$\begin{array}{r} 3^{84} + 4 \cdot 3^{81} \\ - 3^{83} + 4 \cdot 3^{81} \\ \hline 2 \cdot 3^{83} \end{array}$$

$$2 \cdot 3^{83}$$

$$\begin{array}{r} 3240 \\ + 3280,5 \\ \hline 6520,5 \end{array}$$

$$\dots \dots \dots 0$$

$$3^4 (3^{81} - 81)$$

$$\frac{3^4 (3^{81} - 81)}{2} = \frac{3560 - 320}{3240}$$

$$= 40,5 \cdot 3^{81}$$

$$\frac{3560}{3240}$$

$$\begin{array}{r} 3240 \\ - 40 \cdot 85 \\ \hline 3200 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ - 89 \\ \hline 4 \\ 356 \\ \hline 3600 \end{array}$$

$$40 \cdot 89 = 3560$$

$$\begin{array}{r} 6800 \\ - 3560 \\ \hline 3240 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ - 81 \\ \hline 81 \\ 6480 \\ \hline 6561 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6561 \overline{) 2} \\ \underline{6} \\ 05 \\ \underline{46} \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r}
 16875 \div 5 = 3375 \\
 3375 \div 5 = 675 \\
 675 \div 5 = 135 \\
 135 \div 5 = 27 \\
 27 \div 3 = 9 \\
 9 \div 3 = 3 \\
 3 \div 3 = 1
 \end{array}$$

1) $16875 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1$

$$\begin{array}{r}
 16875 \\
 - 15 \\
 \hline
 18 \\
 - 15 \\
 \hline
 37 \\
 - 35 \\
 \hline
 25 \\
 - 25 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

1) Сколько способов из 4 можно выбрать 3? $C_4^3 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3!} = 4$

Для каждого семизначного числа единицу можно вставить в 8 мест $\Rightarrow 8 \cdot 35$

2) Из 6 выбрать 2: $C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{2!} = 15$. Числа 6-значное число.

9 можно вставить в одну из 4 мест: $4 \cdot 15$. 3 можно вставить в одну из 8 мест: $8 \cdot 4 \cdot 15$

Итого: $8 \cdot 35 + 8 \cdot 4 \cdot 15 = 8 \cdot 35 + 8 \cdot 60 = (8 + 48) \cdot 35 = 56 \cdot 35 = 1960$

$$2 \cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} (1 - 2 \cos^2 5x) = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$\cos 10x = \cos(2x + 8x) = \cos 2x \cos 8x - \sin 2x \sin 8x$$

$$C_8^4 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4!} = 70 \cdot 4 = 280$$

$$C_4^1 = \frac{4!}{3! \cdot 1} = 4$$

$$\begin{array}{r}
 280 \\
 \times 4 \\
 \hline
 1120
 \end{array}$$

$$C_4^1 \cdot C_8^4 = 280 \cdot 4 = 1120$$

$$C_3^2 = \frac{3!}{2! \cdot 1} = 3$$

$$C_3^2 = 3$$

$$\begin{array}{r}
 70 \\
 \times 16 \\
 \hline
 1120
 \end{array}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right) \lg y = (-x) \lg(-xy) & (1) \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y > 0 \\ -xy > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y > 0 \\ x < 0 \\ -x > 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \lg\left(\frac{x^4}{y^2}\right) \lg y = \lg(-x) \lg(-xy)$$

$$(\lg x^4 - \lg y^2) \lg y = \lg(-x)(\lg(-x) + \lg y)$$

$$(4\lg(-x) - 2\lg y) \lg y = 4\lg(-x) \lg y - 2\lg^2 y = \lg^2(-x) + \lg(-x) \lg y$$

$$3\lg(-x) \lg y = 2\lg^2 y + \lg^2(-x)$$

$$\text{Замена: } \lg(-x) = a, \lg y = b$$

$$3ab = 2b^2 + a^2$$

$$a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$$

$$D = 9b^2 - 8b^2 = b^2$$

$$a = \frac{3b \pm b}{2} = b$$

$$a = 2b$$

$$(a-b)(a-2b) = 0$$

$$\begin{cases} a = b \\ a = 2b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = b \\ a = 2b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lg(-x) = \lg y \\ \lg(-x) = 2\lg y \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x = y & a \\ -x = y^2 & b \end{cases}$$

$$a) y = 2y$$

$$y = 0 \text{ — не удов. } \textcircled{2}, 3$$

$$a2) y = 4 - y$$

$$2y = 4$$

$$y = 2 \Rightarrow x = -2$$

$$\textcircled{2} \text{ ~~мы не можем~~ }$$

$$\text{~~мы не можем~~ }$$

$$-2y^2 + xy + x^2 + 4x + 8y = 0$$

$$x^2 + (4+y)x + 2y(4-y) = 0$$

$$D = (4+y)^2 - 8y(4-y) =$$

$$= 16 + 8y + y^2 - 32y + 8y^2 =$$

$$= 9y^2 - 24y + 16 = (3y - 4)^2$$

$$\begin{cases} x = \frac{-4-y \pm 3y+4}{2} = \frac{-4y}{2} = -2y \\ x = \frac{-4-y \pm 3y-4}{2} = \frac{2y-8}{2} = y-4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2y \\ x = y-4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2y \\ x = y-4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x = 2y & b \\ -x = 4-y & 2 \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } (-2; 2), (-4; 2), \left(\frac{9-\sqrt{17}}{2}, \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right), \left(\frac{14+\sqrt{17}-2\sqrt{17}}{2}, \frac{14+\sqrt{17}}{2}\right)$$

$$b) y^2 = 2y$$

$$\begin{cases} y = 0 \text{ — не удов. } \textcircled{2}, 3 \\ y = 2 \Rightarrow x = -4 \end{cases}$$

$$b2) y^2 = 4 - y$$

$$y^2 + y - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\begin{cases} y = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \\ x = \frac{\sqrt{17}-9}{2} \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

$$85 + (3^{81} - 1)x > 3^x + 4 \cdot 3^{81}$$

$$\cancel{85 + 3^{81}x} + \cancel{18} \quad 85 + 3^{81}x - x > 3^x + 4 \cdot 3^{81}$$

$$85 - x - 3^x > 4 \cdot 3^{81}$$

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{3^4} \\ y < 3^4 + 4 + 3^{3^4}x - x \end{cases}$$

$$3^4 + 4 + 3^{3^4}x - x > 3^x + 4 \cdot 3^{3^4}$$

$$(3^4 - 3^x) + (4 - x) > 3^{3^4}(4 - x)$$

$$3^x(3^{4-x} - 1) > (3^{3^4} - 1)(4 - x)$$

$$3^x - 3^x > (3^{3^4} - 3^0)(4 - x)$$

$$(3 - 1)(4 - x) > (3 - 1)(3^0 - 0)(4 - x)$$

$$4 - x > 3^4(4 - x)$$

$$(4 - x)(1 - 3^4) > 0$$

$$4 - x < 0$$

$$x > 4$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{81} = 3^4 + 4 + (3^{81} - 1)x$$

$$3^x - 3^4 = 4(1 - 3^{81}) - (1 - 3^{81})x$$

$$3^x - 3^4 = (x - 4)(3^{81} - 1)$$

$$3^{85} - 3^4 = 81 \cdot 3^{81} - 1 = 3^{85} - 3^4$$

$$81 + 4 \cdot 3$$

$$85 + (3^{81} - 1)x = 0$$

$$(3^{81} - 1)x = 85$$

$$x = \frac{85}{3^{81} - 1}$$

$$3^4 - 3^x > (3^{3^4} - 1)(4 - x)$$

если правая часть > 0 , то поделим на нее

$$\frac{3^4 - 3^x}{(3^{3^4} - 1)(4 - x)} > 0$$

$$\frac{x - (4 - x)}{(3^{3^4} - 1)(4 - x)} > 0 \quad \forall x$$

$$4 - x > 0$$

$$x < 4$$

$$y = 3^x + 4 \cdot 3^{81}$$

$$85 + (3^{81} - 1)x = y$$

$$y = (3^{81} - 1)x + 85$$

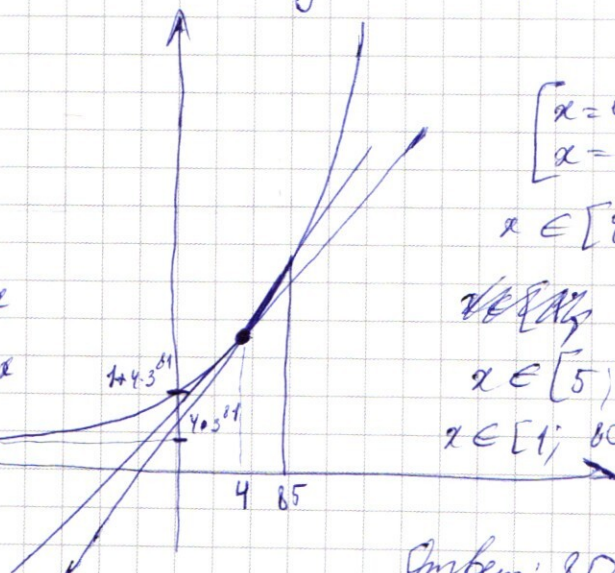
$$\begin{cases} x = 4 \\ x = 85 \end{cases}$$

$$x \in [4; 85]$$

$$x \in [4; 85]$$

$$x \in [5; 84]$$

$$x \in [1; 80]$$



Ответ: 80.



черновик



чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$5. \begin{cases} |x-6+y| + |x-6-y| = 12 & (1) \\ ((x-6)^2 + (y-8)^2 = a & (2) \end{cases}$$

$$\sqrt{12^2 + 18^2} = \sqrt{3^2 \cdot 2^2 + 3^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} = \sqrt{3^2 \cdot 2^2 \cdot (1+9)} = \sqrt{3^2 \cdot 2^2 \cdot 10} = 6\sqrt{10}$$

(2) - окружности радиуса a с центрами в $(\pm 6; \pm 8)$

$$(1) |(x-6)-y| + |(x-6)+y| = |y-(x-6)| + |y+(x-6)| = 12$$

$$y < (x-6)$$

$$y - (x-6) < 0$$

$$y + (x-6) > 2y$$

$$1) x-6 > 6-x$$

$$2x > 12$$

$$x > 6$$

	$6-x$	$x-6$	y
$y-(x-6)$	-	-	+
$y-(6-x)$	-	+	+
	(1)	(2)	(3)

$$(1) (x-6)-y + (6-x)-y = 12$$

$$y = -6$$

$$y < 6-x$$

$$(3) y > x-6$$

$$y - x + 8 + y - 6 + x = 12$$

$$y = 6$$

$$|y+12| + |y-12| = 12$$

$$x-6 < 6-x$$

$$2x < 12$$

$$x < 6$$

$$x = 6$$

$$|y| + |y| = 12$$

$$2|y| = 12$$

$$|y| = 6$$

$$(2) x-6 > y$$

$$y > 6-x$$

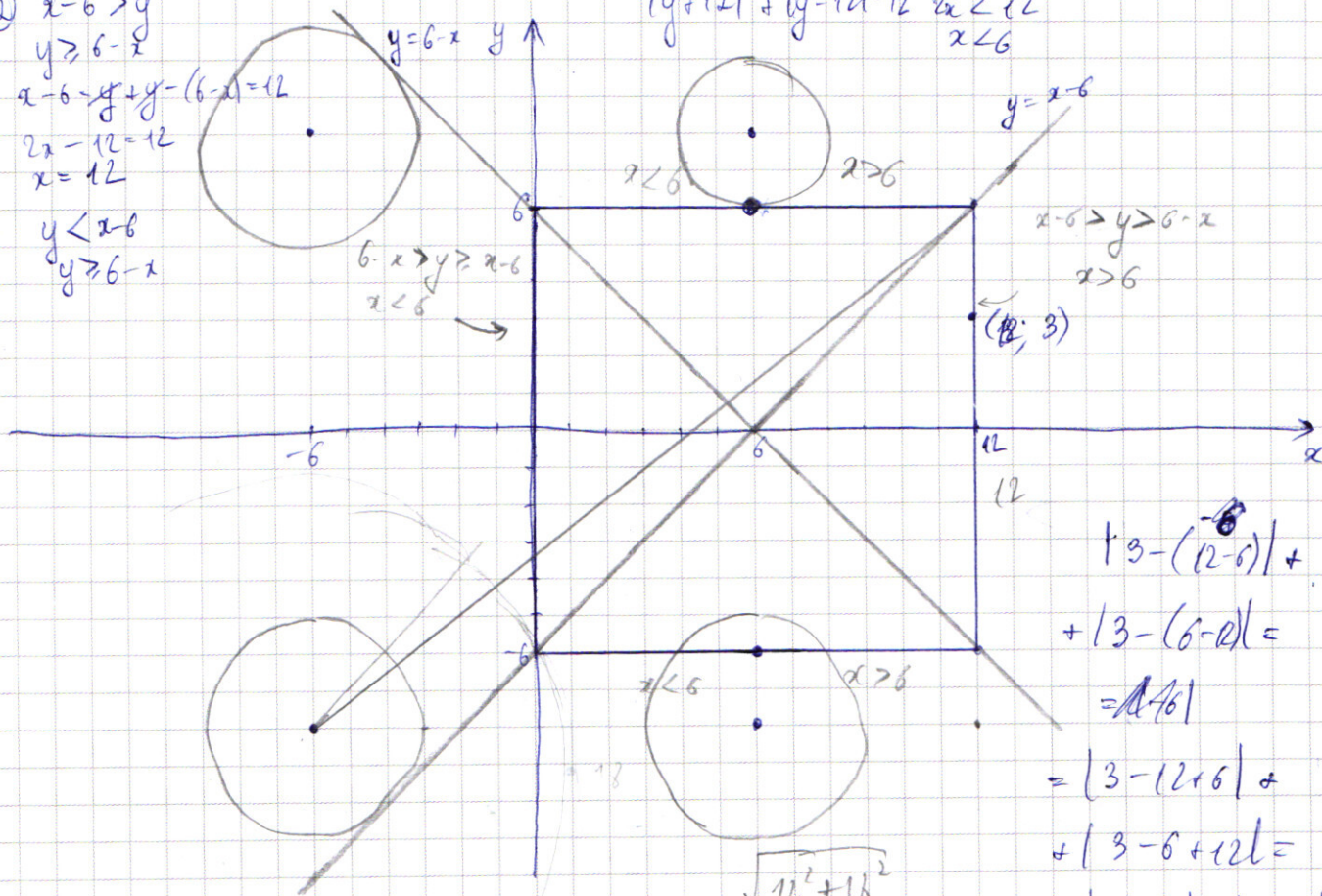
$$x-6-y + y-(6-x) = 12$$

$$2x-12=12$$

$$x=12$$

$$y < x-6$$

$$y > 6-x$$



$$a = \sqrt{2}$$

$$a = \sqrt{12^2 + 18^2}$$

$$\begin{aligned} & |3 - (12-6)| + \\ & + |3 - (6-6)| = \\ & = |3-6| \\ & = |3-12+6| + \\ & + |3-6+12| = \\ & = |9-12| + |15-6| = \\ & = 3 + 9 = 12 \end{aligned}$$