МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6 ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 4 и 9.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90°$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)\,x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

①. 8-значное число $\overline{abcdefgh}$

$a\cdot b\cdot c\cdot d\cdot e\cdot f\cdot g\cdot h = 16875$.

Разложим 16875 на прост. множители

16875	3
5625	3
1875	3
625	5
125	5
25	5
5	5
1	1

Из разложения следует 2 случая цифр в числе:

1 случай: три 3-ки, четыре 5-ки, одна 1-ца $\Rightarrow$ Кол-во способов $= C_8^4\cdot C_8^3\cdot C_8^1 =$

$= 70\cdot 56\cdot 8 = 31360$

2 случай: одна 3-ка, ~~четыре~~ 5-ки, ~~одна~~ две 1-ца, одна 9-ка $\Rightarrow$ Кол-во способов $= C_8^4\cdot C_7^1\cdot C_8^2\cdot C_3^1 =$

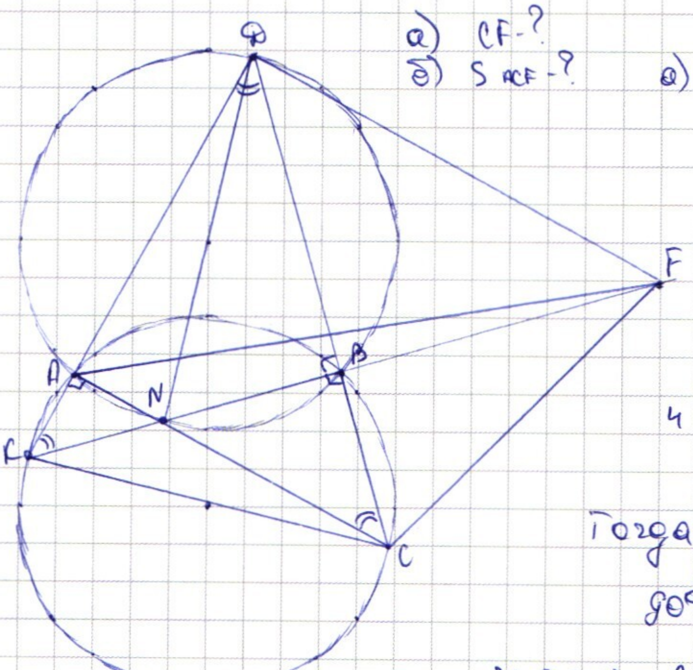
$= 70\cdot 64\cdot 28 = 125440$

Тогда суммарное кол-во восьмизначных чисел:

$31360 + 125440 = 156800$

Ответ: 156800.

⑥.



а) CF - ?

б) S_{ACF} - ?

Решение:

а) 1. $\angle ACB = \angle AKB = \alpha$ - опир на $\overset{\frown}{AB}$

$\angle ACB = \angle ADB = \alpha$ - опир на $\overset{\frown}{AB}$

2. $\angle DAC = 90^\circ \Rightarrow \angle ADC + \angle ACD = 180 - 90$

$2\alpha = 90$

$\alpha = 45^\circ$

3. $\angle CNB = 180 - \angle NBC - \angle BCN =$

$= 45^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle NBC$ - р/б $(\angle BNC = \angle BCN) \Rightarrow$

$\Rightarrow NB = BC$.

4. $\triangle DNB = \triangle BFC$: $\begin{cases} DB = BF \text{ - по усл.} \\ \angle DBN = \angle FBC = 90^\circ \\ NB = BC \end{cases}$

Тогда $DN = CF$

DN - диаметр (вписс угол равный 90° ($\angle DAN$) опир. на диам.)

Значит $CF = 2R = 26$. Ответ: $CF = 26$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

б). 1. $KB = \sqrt{KC^2 - BC^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24$ – по Т Пиф.

2. $BC = BN = 10 \Rightarrow CN = 10\sqrt{2}$ – из Т Пиф.

3. $KN = KB - BN = 24 - 10 = 14$.

4. Пусть $AK = AN = x \Rightarrow$ По Т Пиф: $x^2 + x^2 = 196 \Rightarrow x = 7\sqrt{2}$

5. $AC = AN + CN = 7\sqrt{2} + 10\sqrt{2} = 17\sqrt{2}$

6. $\sin\angle BCF = \frac{BF}{CF} = \frac{BF}{26}$

7. По св-ву сек из 1 т.: $CN \cdot CA = CB \cdot CD$
$10\sqrt{2} \cdot 17\sqrt{2} = 10 \cdot (10 + x)$. $(x - BD)$.
$34 = 10 + x \Rightarrow x = 24$

8. $\sin\angle BCF = \frac{BF}{26} = \frac{x}{26} = \frac{24}{26} = \frac{12}{13}$

9. $\cos\angle BCF = \frac{10}{26} = \frac{5}{13}$

10. $\sin\angle ACF = \sin(\angle ACB + \angle BCF) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{5}{13} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{12}{13} = \frac{17\sqrt{2}}{26}$

11. $S_{ACF} = \frac{1}{2}\sin\angle ACF \cdot AC \cdot CF = \frac{1}{2} \cdot \frac{17\sqrt{2}}{26} \cdot 26 \cdot 17\sqrt{2} = 289$

Ответ: $S_{ACF} = 289$.

2. $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$
$2\cos 5x \cos 2x - \sqrt{2}(\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 2\sin 5x \cos 2x$
$2\cos 2x(\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2}(\cos 5x - \sin 5x)(\cos 5x + \sin 5x) = 0$
$(\cos 5x - \sin 5x)(2\cos 2x - \sqrt{2}(\cos 5x + \sin 5x)) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 5x - \sin 5x = 0 \quad (а) \\ 2\cos 2x - \sqrt{2}(\cos 5x + \sin 5x) = 0 \quad (б) \end{array}\right. \Leftrightarrow$

(а): $\cos 5x = \sin 5x \quad | : \cos 5x \neq 0$
$\operatorname{tg} 5x = 1 \qquad 5x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$
$5x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z \qquad x \neq \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5}n, n \in Z$
$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5}k, k \in Z$

(б) $2\cos 2x = \sqrt{2}(\cos 5x + \sin 5x) \qquad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5}k, k \in Z \\ x = \frac{\pi}{12} + 2\pi l, l \in Z \end{array}\right.$

$\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 5x + \sin 5x)$

$\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 5x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 5x$

$\cos 2x = \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$.

$2x = 5x - \frac{\pi}{4} + 2\pi l, l \in Z$

$x = \frac{\pi}{12} + 2\pi l, l \in Z$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5}k, k \in Z \\ x = \frac{\pi}{12} + 2\pi l, l \in Z \end{array}\right.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

③ $\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} & (б) \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 & (а) \end{cases}$

По опред. лог. ф-ии: $\begin{cases} y > 0 \\ -xy > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y > 0 \\ xy < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y > 0 \\ x < 0 \end{cases}$

(а): $2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$

$x^2 + 4x + xy + 8y - 2y^2 = 0$

$x^2 + x(4+y) + 2y(4-y) = 0$

$D = 16 + 8y + y^2 - 32y + 8y^2 = 9y^2 - 24y + 16 = (3y-4)^2$

$x_1 = \frac{-4-y-3y+4}{2} = -2y$

$x_2 = \frac{-4-y+3y-4}{2} = y-4$

(б) При $x_1 = -2y$: $\left(\frac{(-2y)^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (2y)^{\lg 2y^2}$

$(16y^2)^{\lg y} = (2y)^{\lg 2y^2}$

$(4y)^{\lg y^2} = (2y)^{\lg 2y^2}$

$4^{\lg y^2} \cdot y^{\lg y^2} = 2^{\lg 2y^2} \cdot y^{\lg 2y^2}$

$\frac{4^{\lg y^2}}{2^{\lg 2y^2}} = y^{\lg 2y^2 - \lg y^2}$

$2^{\lg y^4 - \lg 2y^2} = y^{\lg 2}$

$2^{\lg \frac{y^2}{2}} = y^{\lg 2} \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = -4$
- ввиду монотонности.

При $x_2 = y - 4$

$\left(\frac{(y-4)^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (4-y)^{\lg 4y - y^2}$

$(y-4)^{4\lg y} = y^{\lg y^2} \cdot (4-y)^{\lg(4-y) + \lg y}$

$(4-y)^{\lg y^4} = y^{\lg y^2} \cdot (4-y)^{\lg(4-y)} \cdot (4-y)^{\lg y}$

$(4-y)^{\lg y^3} = y^{\lg y^2} \cdot (4-y)^{\lg(4-y)}$

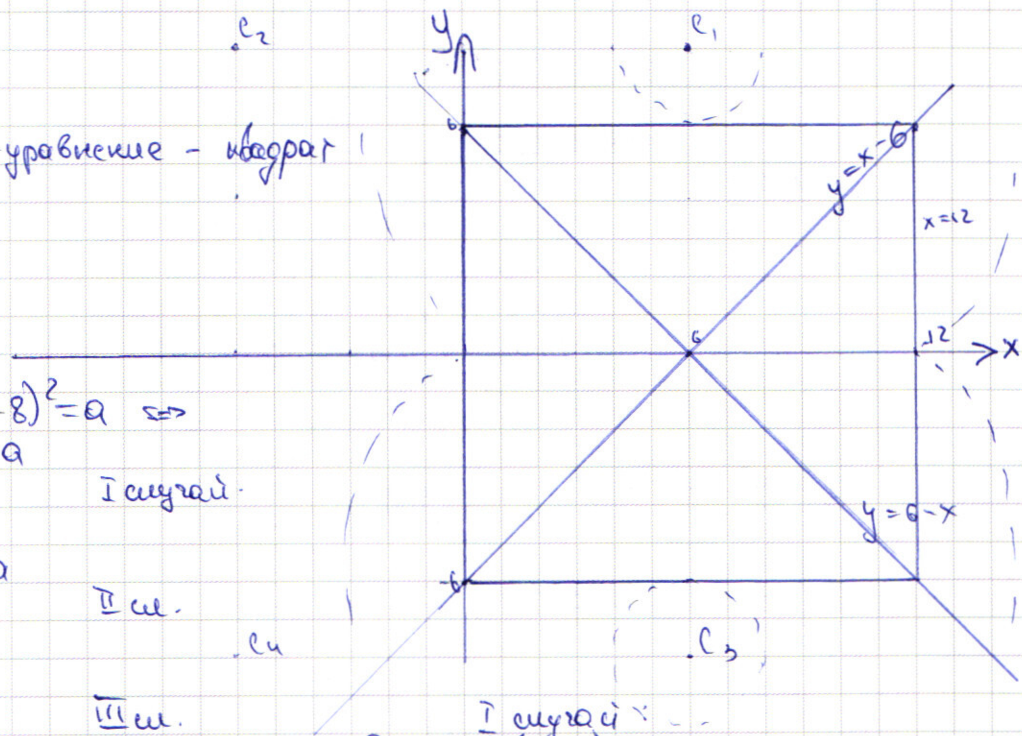
$(4-y)^{\lg \frac{y^3}{4-y}} = y^{\lg y^2} \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = -2$
- ввиду монотонности

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x=-2;\ y=2 \\ x=-4;\ y=2 \end{array}\right.$

(5). $\begin{cases} |x-6-y|+|x-6+y|=12 & (a) \\ (|x|-6)^2+(|y|-8)^2=a & (б) \end{cases}$

(a): $|x-6-y|+|x-6+y|=12 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-6-y+x-6+y=12 \\ x-6-y\geq 0 \\ x-6+y\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-6-y-x+6-y=12 \\ x-6-y\geq 0 \\ x-6+y<0 \end{cases} \\ \begin{cases} -x+6+y+x-6+y=12 \\ x-6-y<0 \\ x-6+y\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -x+6+y-x+6-y=12 \\ x-6-y<0 \\ x-6+y<0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=12 \\ y\leq x-6 \\ y\geq 6-x \end{cases} \\ \begin{cases} y=-6 \\ y\leq x-6 \\ y< \cancel{x-6}\, 6-x \end{cases} \\ \begin{cases} y=6 \\ y> \cancel{6-x}\, x-6 \\ y\geq 6-x \end{cases} \\ \begin{cases} y> x-6 \\ y< 6-x \\ x=0 \end{cases} \end{array}\right.$



Заметим, что 1-уравнение - квадрат со стороной 12.

(б): $(|x|-6)^2+(|y|-8)^2=a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} (x-6)^2+(y-8)^2=a \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases} & \text{I случай} \\ \begin{cases} (x+6)^2+(y-8)^2=a \\ x<0 \\ y\geq 0 \end{cases} & \text{II сл.} \\ \begin{cases} (x-6)^2+(y+8)^2=a \\ x\geq 0 \\ y<0 \end{cases} & \text{III сл.} \\ \begin{cases} (x+6)^2+(y+8)^2=a \\ x<0 \\ y<0 \end{cases} & \text{IV сл.} \end{array}\right.$

I случай:
Окр. с. $C_1(6;8)$.
Два реш. когда прох-ит через т. $A_1(0;6)$, $B_1(12;6)$
$R=\sqrt{6^2+2^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$
$a=R^2 \Rightarrow a=40$

Окр. кас-ся $y=6$ при $R=2 \Rightarrow a=4$. Окр-ть прох. через $(0;0)$ и $(12;0)$ при $a=R^2=100$
$\Rightarrow a\in(4;100]$

II случ: Окр-ть с центром $C_2(-6;8)$
Решений нет, т.к окр-ть лежит во II плоскости.

III случ: Окр-ть с центром $C_3(6;-8)$.
Окр. касается $y=-6$ при $R=2$. $\Rightarrow a=4$
Окр. проходит через т. $(0;0)$ и $(12;0)$. при
$R=\sqrt{6^2+8^2}=10 \Rightarrow a=100$
Тогда: $a\in(4;100]$

IV случ: Окр-ть с центром $C_4(-6;-8)$
Решений нет. т.к окр-ть лежит в III пл-ти.

Ответ: $a\in(4;100]$

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 4
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(16y^2)^{\lg y} = 2y^{\lg 2y^2} \quad : 2y \qquad a^b = c^d$

$\frac{(16y^2)^{\lg y}}{2y} = 2y^{\lg 2y^2 - 1} \qquad \frac{(16y^2)^{\lg y}}{(2y)^{\lg 2y^2}} = 1$

$2y = a \qquad 4a^{2\lg\frac{a}{2}} = a^{\lg\frac{a^2}{2}}$

$a^{\lg\frac{a}{2}} \cdot 4a^{\lg\frac{a}{2}} = a^{\lg\frac{a^2}{2}} = a^{\lg\frac{a}{2} + \lg a}$

$a^{\lg\frac{a}{2}}\left(4a^{\lg\frac{a}{2}} - a^{\lg a}\right) = 0 \qquad 8 \cdot 27$

$4a^{\lg\frac{a}{2}} = a^{\lg a} \qquad 2 \cdot 3 \quad 6^3 = 216$

$4a^{\lg a + \lg\frac{1}{2}} = a^{\lg a} \qquad 2^3 \cdot 3^3$

$4^{\lg a + \lg\frac{1}{2}} \cdot a^{\lg a + \lg\frac{1}{2}} - a^{\lg a} = 0$

$a^{\lg a}\left(a^{\lg\frac{1}{2}} \cdot 4^{\lg a + \lg\frac{1}{2}} - 1\right) = 0 \qquad \frac{8}{27}$

$(16y^2)^{\lg y} - (2y)^{\lg 2y^2} = 0 \qquad 2^{2+3} = 32 \qquad \frac{2^3}{3^3}$

$2y^{\lg y} \cdot 8y^{\lg y} - 2y^{\lg y + \lg 2y} = 0 \qquad 2^2 \cdot 2^3$

$2y^{\lg y}\left((8y)^{\lg y} - (2y)^{\lg 2y}\right) = 0$

$8y^{\lg y} = 2y^{\lg 2y} \qquad e^2 = 2y \qquad e^2 = 2y$

$2y^{\lg y} \cdot 4^{\lg y} = 2y^{\lg 2 + \lg y} \qquad 2y^2 \qquad 2$

$4^{\lg y} = (2y)^{\lg 2} \qquad e^2 = y \quad 2{,}718^2 = y$

$4^2 = x \qquad 4^2 = ?$

$\left(\frac{4}{e}\right)^2 y =$

$x = \frac{4^2 \cdot y}{e^2} =$

$e^x = 2$

$2^x = a \Rightarrow a = \left(\frac{2}{e}\right)^x 2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$y = 3^x + 4 \cdot 3^{81}$

$y' = 3 \cdot \lg_3 x = 0$

$\lg_3 x = 0 \Rightarrow x = 1$

$+ \quad f'(x)$

1

$\searrow \quad \nearrow \quad f(x)$

$\Delta y = \frac{x - x_1}{x - x_1}$

$y = 85 + (3^{81} - 1)x$

$y' = 3^{81} - 1$

☑ черновик ☐ чистовик

Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 5x + \sin 5x)$

$\cos(3x+2x) = \cos 3x \cos 2x - \sin 3x \sin 2x$

$\sin(3x+2x) = \sin 3x \cos 2x + \sin 2x \cos 3x$

$\cos 5x + \sin 5x = \cos 2x(\cos 3x + \sin 3x) - \sin 2x(\sin 3x - \cos 3x)$

$\cos 5x + \sin 5x = \cos 3x(\cos 2x + \sin 2x) - \sin 3x(\sin 2x - \cos 2x)$.

$2\cos^2 2x = 2\cos 5x \sin 5x$

$2\cos^2 2x = \cancel{\cos}\sin 10x$

$\cos 5x + \sin 5x = \cos(4x+x) + \sin(4x+x) = \cos 4x \cos x - \sin 4x \sin x +$
$+ \sin 4x \cos x + \sin x \cos 4x = (\cos^2 2x - \sin^2 2x)\cos x - 2\sin 2x \cos 2x \cdot$
$\sin x + 2\sin 2x \cos 2x \cos x + (\cos^2 2x - \sin^2 2x)\sin x =$

$= (\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x)(\cos x + \sin x) - 2\sin 2x \cos 2x(\sin x - \cos x)$
$= (\cos^2 x - \sin^2 x - 2\sin x \cos x)(\cos^2 x - \sin^2 x + 2\sin x \cos x)(\cos x + \sin x) -$
$- 4\sin x \cos x(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)(\sin x - \cos x)$

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$(2\cos^2 x - 1 - 2\sin x \cos x)(2\cos^2 x - 1 + 2\sin x \cos x)(\cos x + \sin x) -$
$+ 4\sin x \cos x(\cos x - \sin x)^2(\cos x + \sin x) =$
$= ((2\cos^2 x - 1)^2 - 4\sin^2 x \cos^2 x)(\cos x + \sin x) + (\cos x + \sin x)($
$-(4\sin x \cos x) \cdot 2\sin x \cos x =$

$= (\cos x + \sin x)(4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1 - 4\sin^2 x \cos^2 x - 8\sin^2 x \cos^2 x)$.

$(\cos x + \sin x)\left(\cos x - \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}(4\cos^2 x(\cos^2 x - \sin^2 x) - 4\cos^2 x(1 + 2\sin^2 x) + 1)\right.$

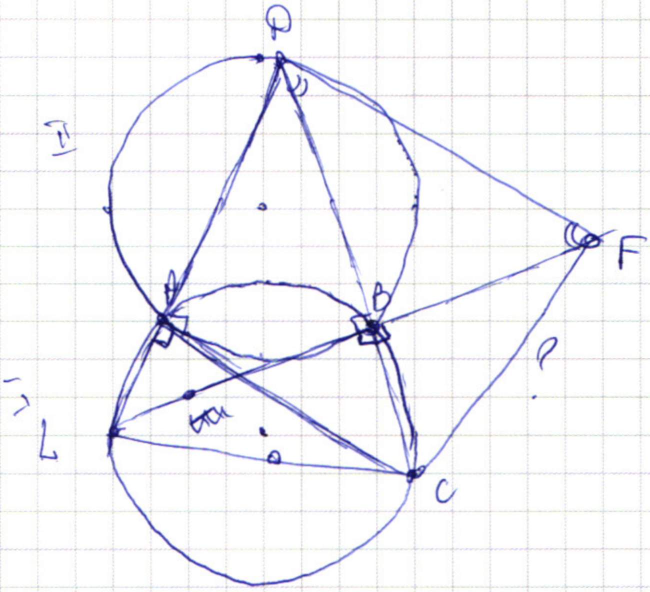
$4\cos^2 x(\cos^2 x - \sin^2 x - 1 - 2\sin^2 x) + 1$

$4\cos^2 x(\cos^2 x - 3\sin^2 x - \sin^2 x - \cos^2 x) + 1 =$

$= 1 - 16\sin^2 x \cos^2 x$

$(\cos x + \sin x)\left(\cos x - \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - 16\sin^2 x \cos^2 x)\right)$

⑥.



$3^x + 4\cdot 3^{81} = 85 + 3^{81}\cdot x - x$

$3^{81}(4-x) + 3^x + x - 85 = 0$

$3^{81}(4-x) + 3^x + x - 4 - 81 = 0$

$(4-x)(\underbrace{3^{81}-1}_{>0}) + (3^x - 81) = 0$

$3^x - 81 > 0$ при $x = 5, 6, 7$.

$4 - x > 0$ при $x = 3, 2, 1$.

$x = 5$

$3^5 + 4\cdot 3^{81}$

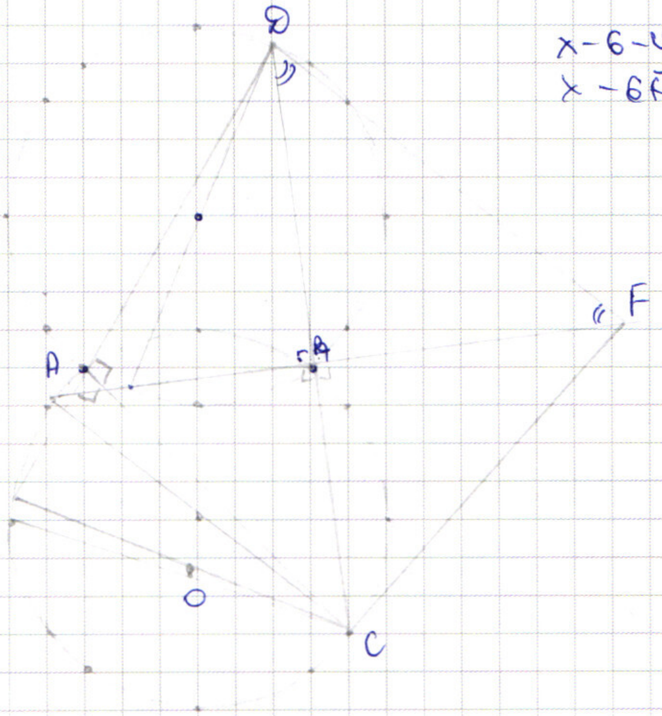
$85 + (3^{81}-1)\cdot 5 = 425 + 3^{81}\cdot 5 - 5 =$

$= 420 + 5\cdot 3^{81}$

$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = 9 \end{cases}$ 2реш

$x - 6 - y = 0 \quad x - y = 6 \quad \Rightarrow x > 6 + y$

$x - 6 + y = 0 \quad x + y = 6 \quad \Rightarrow x > 6 - y$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① 8зн. _ _ _ _ _ _ _ _

1. случай: три 3-ки, четыре 5-ки, одна 1-ца.
2 случай: одна 3-ка, одна 9-ка, четыре 5-ки, ~~одна~~ две 1-цы

$16875 = 3^3 \cdot 5^4 \cdot 1$; $27 \cdot 625 = 16875$

$C_8^2 \cdot C_8^4 \cdot C_8^1 \cdot C_8^1 =$

$= 28 \cdot 64 \cdot 70 =$ 125440

$C_8^4 \cdot C_8^3 \cdot 8 = \frac{8!}{4!4!} \cdot \frac{8!}{5!3!} \cdot 8 = \frac{5\cdot6\cdot7\cdot8}{1\cdot2\cdot3\cdot4} \cdot \frac{6\cdot7\cdot8}{6} \cdot 8 = 70 \cdot 56 \cdot 8 = 56^2 \cdot 10$

$56 \cdot 56 = 3136$; 31360

$8! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8$; $720 \cdot 56$

2 случ. вместе: $125440 + 31360 = 156800$

Ответ: 156800.

②. $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$

$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \sin y \cos x$
$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$
$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x \sin y$
$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$
$x+y = \alpha$, $x-y = \beta$
$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$2\cos 5x\cos 2x - \sqrt{2}\cos 10x = 2\sin 5x \cos 2x$

$2\cos 2x(\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2}\cos 10x$

$2\cos 2x(\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2}\cos(5x+5x) = \sqrt{2}(\cos^2 5x - \sin^2 5x)$

$2\cos 2x(\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2}(\cos 5x - \sin 5x)(\cos 5x + \sin 5x) = 0$

$(\cos 5x - \sin 5x)(2\cos 2x - \sqrt{2}(\cos 5x + \sin 5x)) = 0$

$\left[\begin{array}{l}\cos 5x = \sin 5x \\ 2\cos 2x = \sqrt{2}(\cos 5x + \sin 5x) \quad (a)\end{array}\right.$

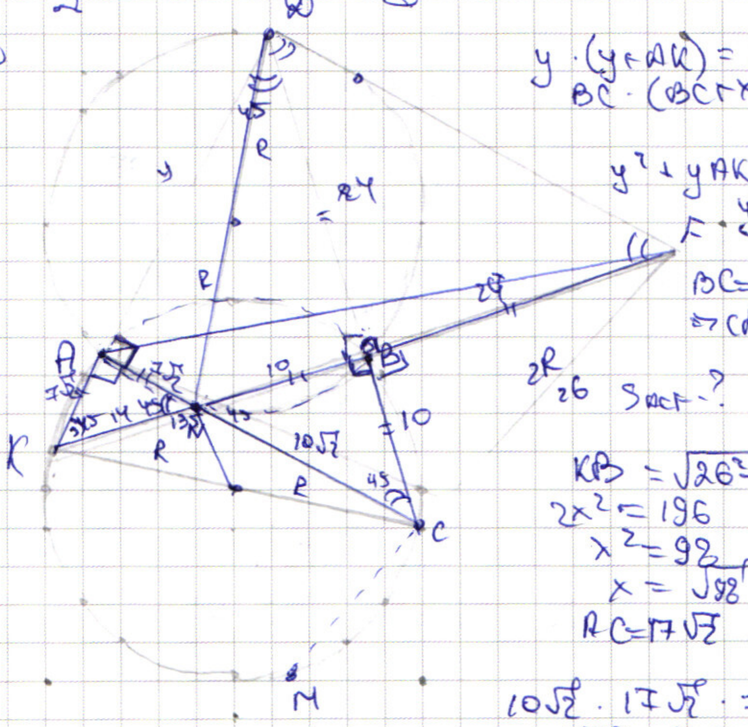
a) $\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 5x + \sin 5x) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 4x \cos x - \sin 4x \sin x + \sin 4x\cos x + \sin x \cos 4x)$

$\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 4x(\cos x + \sin x) - \sin 4x(\sin x - \cos x))$

$(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) = \frac{\sqrt{2}}{2}((\cos^2 2x - \sin^2 2x)(\cos x + \sin x) - \cancel{\sin 4x}\ 2\sin 2x\cos 2x(\sin x - \cos x))$

$(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) = \frac{\sqrt{2}}{2}((\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x)(\cos x + \sin x) - 4\sin x\cos x\cos 2x(\sin x - \cos x)).$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)



$DB \cdot DC = DA \cdot DK$

$CB \cdot CD = \cancel{CN \cdot AA}\ CN \cdot CA$

$KA \cdot KD = KN \cdot KB$

$AD = AC - (\angle ACB = \angle ADB$ — опир на од. дуги)

$y \cdot (y + AK) = x \cdot (x + BC)$.

$BC \cdot (BC + x) = CN \cdot (CN + AK)$.

$y^2 + yAK = x^2 + xBC$.

$y^2 + AKy = BC^2 + xBC$

$BC = BN \Rightarrow \triangle DNB = \triangle CBF$

$\Rightarrow CF = 2R = 26$.

S_{ACF} — ?

$KB = \sqrt{26^2 - 100} = 24$

$2x^2 = 196$

$x^2 = 98$

$x = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$

$AC = 17\sqrt{2}$

$10\sqrt{2} \cdot 17\sqrt{2} = 10 \cdot (10 + x)$

$170 \cdot 2 = \cancel{100 + 10x}\ 10 + x$

$34 = 10 + x$

$x = 24$

$14 \cdot 10 = 7\sqrt{2} \cdot (7\sqrt{2} + y)$

$20 = 14 + \sqrt{2} y$

$6 = \sqrt{2} y \Rightarrow y = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$

$\sin \angle BCF = \frac{24}{26} = \frac{12}{13}$, $\cos \angle BCF = \frac{10}{26} = \frac{5}{13}$

$\sin(45 + \angle BCF) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{5}{13} + \frac{12}{13} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{17\sqrt{2}}{26}$

$S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{17\sqrt{2}}{26} \cdot 17\sqrt{2} \cdot 26 = 289$

Ответ: 289