МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра(
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 4 и 9.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12, \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 3^x + 4\cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81}-1)\,x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1

1) число 16875 можно разложить, как $5\cdot3\cdot5\cdot5\cdot5\cdot9\cdot1\cdot1$ посчитаем кол-во чисел, образованных этими цифрами: в наборе цифр одна „3", четыре „5", одна „9" и две „1" → способов выбрать I цифру числа 8, II цифру − 7, III цифру − 6 и т.д. → всего 8! способов расставить цифры в числе, но т.к. в наборе цифр четыре „5" и две „1", то всего чисел будет $\frac{8!}{4!\cdot2!}=$
$=\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{2}=7\cdot6\cdot5\cdot4=840$

2) число 16875 можно разложить, как $5\cdot3\cdot5\cdot5\cdot5\cdot3\cdot$ $\cdot3\cdot1$; посчитаем кол-во чисел, образованных этими цифрами: в наборе три „3", четыре „5" и одна „1" → способов выбрать I цифру числа 8, II цифру − 7 и т.д → всего 8! способов выбрать расположение цифры в числе, но т.к. в наборе цифр три „3" и четыре „5" то всего чисел будет $\frac{8!}{3!\cdot4!}=$ ~~8 7 6 8~~ $\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{6}=$
$=8\cdot7\cdot5=280$

3) всего подходящих чисел $840+280=1120$
Ответ: 1120.

N2

$\cos7x+\cos3x-\sqrt{2}\cos10x=\sin7x+\sin3x$

$$2\cos 5x \cos 2x - \sqrt{2}\cos 10x = 2\sin 5x \cos 2x$$

$$\cos 5x \cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos^2 5x - \sin^2 5x) = \sin 5x \cos 2x$$

$$\cos 5x \cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 5x - \sin 5x)(\cos 5x + \sin 5x) = \sin 5x \cos 2x$$

$$\cos 2x(\cos 5x - \sin 5x) - \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 5x - \sin 5x)(\cos 5x + \sin 5x) = 0$$

$$(\cos 5x - \sin 5x)\left(\cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 5x + \sin 5x)\right) = 0$$

$$(\cos 5x - \sin 5x)\left(\cos 2x - \cos\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right)\right) = 0$$

$$-2\sin\left(\frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{8} - \frac{7x}{2}\right)(\cos 5x - \sin 5x) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin\left(\frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2}\right) = 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{8} - \frac{7x}{2}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{\pi}{4} + 5x\right) = 0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2} = \pi k,\ k\in Z \longrightarrow \frac{3x}{2} = \frac{\pi}{8} - \pi k,\ k \in Z \\ \frac{\pi}{8} - \frac{7x}{2} = \pi n,\ n\in Z \longrightarrow \frac{7x}{2} = \frac{\pi}{8} - \pi n,\ n\in Z \\ \frac{\pi}{4} + 5x = \frac{\pi}{2} + \pi m,\ m\in Z \longrightarrow 5x = \frac{\pi}{4} + \pi m,\ m\in Z \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi k}{3},\ k\in Z \\ x = \frac{\pi}{28} - \frac{2\pi n}{7},\ n\in Z \\ x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi m}{5},\ m\in Z \end{array}\right.$$

Ответ:

$$x = \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi k}{3},\ k\in Z \\ \frac{\pi}{28} - \frac{2\pi n}{7},\ n\in Z \\ \frac{\pi}{20} + \frac{\pi m}{5},\ m\in Z \end{array}\right.$$

N5

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

1) построим график первого уравнения

$$1) \begin{cases} x-6-y \geq 0 \longrightarrow x-6 \geq y \\ x-6+y \geq 0 \longrightarrow y \geq 6-x \\ 2x-12 = 12 \longrightarrow x-6=6 \longrightarrow x=12 \end{cases}$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 2
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

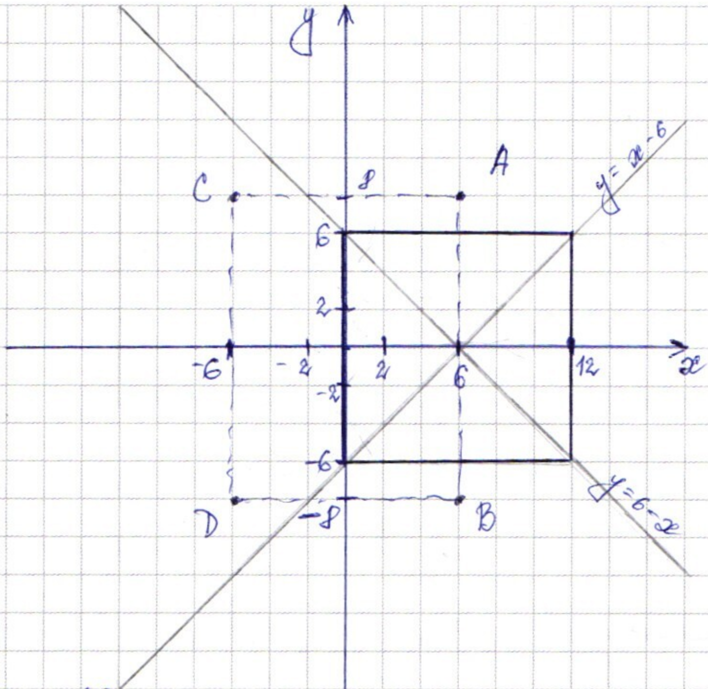
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) $\begin{cases} x-6-y<0 \longrightarrow x-6<y \\ x-6+y \geq 0 \longrightarrow y \geq 6-x \\ y=6 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x-6-y \geq 0 \longrightarrow y \leq x-6 \\ x-6+y<0 \longrightarrow y<6-x \\ -y=6 \longrightarrow y=-6 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x-6-y<0 \longrightarrow y>x-6 \\ x-6+y<0 \longrightarrow y<6-x \\ -2x+12=12 \longrightarrow x=0 \end{cases}$



2) разберём второе уравнение

1) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ (x-6)^2+(y-8)^2=a \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y<0 \\ (x-6)^2+(-y-8)^2=a \end{cases}$

3) $\begin{cases} x<0 \\ y \geq 0 \\ (-x-6)^2+(y-8)^2=a \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x<0 \\ y<0 \\ (-x-6)^2+(-y-8)^2=a \end{cases}$

второе уравнение задаёт четыре окружности с центрами в точках $A(6;8)$, $B(6;-8)$, $C(-6;8)$, $D(-6;-8)$ и равными радиусами $\sqrt{a} \longrightarrow a \geq 0$

3) ровно 2 решения система будет иметь ~~[illegible]~~ при касании окружностей с центрами в точках A и B, ~~т.к.~~ при уменьшении радиуса окружностей до значения меньше радиуса ка-

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

сания окружностей с центрами A и B сторон квадрата, заданного первым уравнением, решений не будет, при увеличении радиуса до значения, при котором окружности с центрами A и B проходят через вершины квадрата, будет 4 решения, при радиусе больше радиуса касания, но меньше радиуса пересечения вершин квадрата будет также 4 решения, при радиусе большем радиуса, при котором окружности проходят через вершины квадрата, но меньшем значения 8 будет 4 решения, при радиусе равном 8 будет ~~одно~~ 3 решения, при радиусе большем 8, но меньшем ~~и равном~~ 10 будет 4 решения, при радиусе больше 10 решений не будет

$\sqrt{a_1} = 2 \rightarrow a = 4$ - явл. реш. - касание сторон квадрата

~~при $\sqrt{a} \in [8; 10]$ - 2 решения~~

$\sqrt{a_2} = 10 \rightarrow a = 100$ явл. реш. - пересечение с точками $(0; 0)$, $(12; 0)$

Ответ: 4; 100.

№6

Дано:

а) 2 окружности радиусов 13 $(R = 13)$ пересекаются в точках A и B, $\angle CAD = 90°$, $B \in CD$, $BF \perp CD$, $BF = BD$

б) $BC = 10$

Найти: а) CF; б) $S_{\triangle ACF}$

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 4

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Решение:

а) т.к. окружности равны и $\angle ACB$ и $\angle ADB$ опираются на одну и ту же дугу $\smile AB$, то $\angle ACB = \angle ADB = \frac{180° - \angle CAD}{2} (\triangle ACD) = 45° \longrightarrow AC = AD$

т.к. $BF = BD$, то $\angle BFD = \angle BDF = \frac{180° - \angle FBD}{2} (\triangle BDF) = 45°$

$\longrightarrow \angle ADF = \angle ADB + \angle FDB = 90° \longrightarrow AC \parallel FD$ (т.к. AD - секущая и $\angle CAD + \angle FDA = 180°$)

пусть O_1 - центр первой окружности, а O_2 - центр второй окружности (кот. $\in$ точка D)

т.к. $\angle ADB = 45°$, то $\angle AO_2B = 90°$ (т.к. центральный угол, опирающийся на ту же дугу, что и вписанный $\angle ADB$) $\longrightarrow AB = \sqrt{O_2A^2 + O_2B^2} = \sqrt{2R^2} = 13\sqrt{2}$

$\triangle BDF \sim \triangle ACD$, т.к. $\angle BFD = \angle BDF = \angle ACD = \angle ADC = 45°$ и $\angle DBF = \angle CAD = 90° \longrightarrow \frac{BF}{AC} = \frac{BD}{AD} = \frac{FD}{CD}$

N3

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases}$$

1) $\begin{cases} y > 0 \\ -xy > 0 \end{cases} \longrightarrow x < 0$

2) $2y^2 - y(x+8) - (x^2+4x) = 0$

$D = (x+8)^2 + 8(x^2+4x) = x^2 + 16x + 64 + 8x^2 + 32x = 9x^2 + 48x + 64 = (3x+8)^2$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$y_{1,2} = \frac{x+8 \pm \sqrt{(3x+8)^2}}{4}$

1) $x \in \left(-\frac{8}{3}; 0\right)$

$y_1 = \frac{4x+16}{4} = x+4$

$y_2 = \frac{-2x}{4} = -\frac{x}{2}$

3) $x \in \left(-8; -\frac{8}{3}\right)$

$y_1 = \frac{-2x}{4} = -\frac{x}{2}$

$y_2 = x+4$

2) $x = -\frac{8}{3}$

$y = \frac{4}{3}$

$\cancel{\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg\frac{4}{3}}} = \cancel{16^{\lg\frac{4}{3}}}$

3) при $x = -\frac{8}{3}$, $y = \frac{4}{3}$

$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg\frac{4}{3}} = \left(\frac{256}{9}\right)^{\lg\frac{4}{3}} = \left(\frac{16}{9}\right)^{\lg\frac{4}{3}} \cdot 16^{\lg\frac{4}{3}} =$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$16875 = 5\cdot 3375 = 5\cdot 3\cdot 1125 = 5\cdot 3\cdot 5\cdot 225 = 5\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 45 = 5\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 9 = 5\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 3\cdot 3$

1) $5\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 9\cdot 1\cdot 1$

2) $5\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 3\cdot 3\cdot 1$

$35\cdot 4 = 140$, $140\cdot 6 = 840$, $35\cdot 8 = 280$, $64\cdot 4 = 256$

$\frac{64\cdot 4}{9}$

N2

$\cancel{2\cos 5x\cos 2x - \sqrt2\cos 10x = 2\sin 5x\cos 2x}$

$\cancel{\cos 5x\cos 2x - \frac{\sqrt2}{2}\cos 10x = \sin 5x\cos 2x}$

$\cancel{\cos 2x(\cos 5x - \sin 5x) = \frac{\sqrt2}{2}\cos 10x}$

$\cancel{\cos 2x\left(\frac{\sqrt2}{2}\cos 5x - \frac{\sqrt2}{2}\sin 5x\right) = \frac12\cos 10x}$

$\cancel{\cos 2x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}+5x\right) = \frac12\cos 10x}$

$\cancel{\cos 2x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}+5x\right) = \frac12(\cos 2x\cos 8x - \sin 2x\sin 8x)}$

$\cancel{\cos 7x + \cos 3x - \sqrt2(\cos 7x\cos 3x - \sin 7x\sin 3x) = \sin 7x + \sin 3x}$

$\cancel{\cos 7x(1-\sqrt2\cos 3x) + \cos 3x = \sin 7x(1-\sqrt2\sin 3x) + \sin 3x}$

$7x = y,\quad 3x = t$

$\cancel{\cos y + \cos t - \sqrt2(\cos y\cos t - \sin y\sin t) = \sin y + \sin t}$

$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt2\cdot\frac12(\cos 4x - \cos 10x) = \sin 7x + \sin 3x - \sqrt2\cdot\frac12(\sin 10x + \cos 4x)$

$\cos 3x\cos 4x - \sin 3x\sin 4x + \cos 3x - \frac{\sqrt2}{2}\cos 4x + \frac{\sqrt2}{2}\cos 4x =$

$= \sin 7x + \sin 3x - \frac{\sqrt2}{2}\sin 10x + \frac{\sqrt2}{2}\cos 10x$

$\cos 3x(\cos 4x + 1)$ $\quad 2\sin 5x\cos 2x$

$10^y = (-x)$

N3

$\cancel{\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-x)+\lg y} = (-x)^{\lg(-x)}\cdot(-x)^{\lg y}}$

$2y^2 - y(x+8) - (x^2+4x) = 0$

$D = (x+8)^2 + 8(x^2+4x) = x^2 + 16x + 64 + 8x^2 + 32x = 9x^2 + 48x + 64 = (3x+8)^2$

$y_{1,2} = \frac{(x+8) \pm \sqrt{(3x+8)^2}}{4} > 0$

$y = \frac{(x+8) \pm |3x+8|}{4}$

$x+8 \text{ vs } 3x+8$, $x \text{ vs } 3x$

1) $3x+8 \geq 0$

$\frac{4x+16}{4} = x+4$

$\frac{-2x}{4} = -\frac{x}{2}$

$\cancel{1)\ \left(\frac{x^4\cdot 16}{(x+8)^2 + 2(x+8)\sqrt{(3x+8)^2} + 3x+8}\right)^{\lg}}$

$\cancel{(x+8)+\sqrt{(3x+8)^2} > 0}$

$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = \left(\frac{10^{\lg x^4}}{y^4}\right)^{\lg y}$

$\frac{x^{4\lg y}}{y^{2\lg y}} = \left(\frac{x^2}{y}\right)^{2\lg y}$

$\cancel{\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-x)}\cdot(-x)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-x)}\cdot y^{\lg(-x)}}$

N2

$2\cos 5x\cos 2x - \sqrt2\cos 10x = 2\sin 5x\cos 2x$

$\cos 5x\cos 2x - \frac{\sqrt2}{2}(\cos^2 5x - \sin^2 5x) = \sin 5x\cos 2x$

$\cancel{\cos 5x\left(\cos 2x - \frac{\sqrt2}{2}\cos 5x\right) = \sin 5x\left(\cos 2x - \frac{\sqrt2}{2}\sin 5x\right)}$

$2\cos^2 5x - 1$

$\cancel{\cos 5x(\cos 2x - \sqrt2\cos 5x) = \sin 5x\cos 2x - \frac{\sqrt2}{2}}$

$\cos 5x\cos 2x - \sin 5x\cos 2x = \frac{\sqrt2}{2}\cos^2 5x - \frac{\sqrt2}{2}\sin^2 5x$

$\cancel{\cos 2x(\cos 5x - \sin 5x) = \frac{\sqrt2}{2}\cos^2 5x - \frac{\sqrt2}{2}\sin^2 5x}$

$\cos 2x\cos\left(\frac{\pi}{4}+5x\right) = \frac12(2\cos^2 5x - 1)$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$\cos 5x\left(\cos 2x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 5x\right)=\sin 5x\left(\cos 2x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 5x\right)$

$\cos 5x\cos 2x-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos^2 5x-\sin^2 5x\right)=\sin 5x\cos 2x$

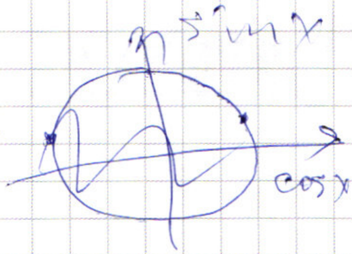
$\cos 5x\cos 2x-\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 5x-\sin 5x)(\cos 5x+\sin 5x)=\sin 5x\cos 2x$

$\cos 2x(\cos 5x-\sin 5x)-\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 5x-\sin 5x)(\cos 5x+\sin 5x)=0$

$(\cos 5x-\sin 5x)\left(\cos 2x-\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 5x+\sin 5x)\right)=0$

$(\cos 5x-\sin 5x)\left(\cos 2x-\cos\left(\frac{\pi}{4}-5x\right)\right)=0$

$(\cos 5x-\sin 5x)\cdot(-2)\sin\left(\frac{\pi}{8}-\frac{3x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{8}-\frac{7x}{2}\right)=0$



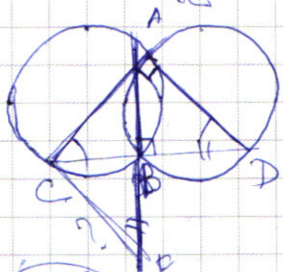
$\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2\pi k}{1}\right)\cdot 3$

$\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2\pi n}{1}\right)\cdot 7$

$(-x)^{4\lg y}\cdot y^{-2\lg y}=(-x)^{\lg(-xy)}$

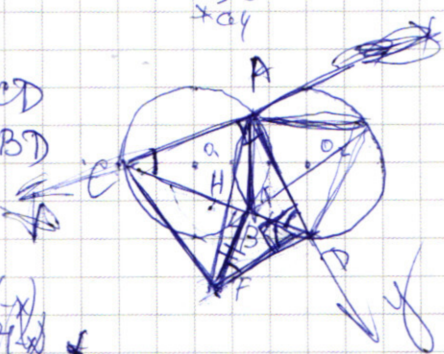
$\lg y$

36
×64



$AD^2=BD\cdot CD$

$AC^2=CB\cdot BD$



$CF=\sqrt{CB^2+BF^2}$

$\sqrt{(CD-BF)^2+BF^2}$

$x^2+x(y+4)+8y-2y^2=0$

$D=(y+4)^2-4(8y-2y^2)=y^2+8y+16-32y+8y^2=9y^2-24y+16=(3y-4)^2$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)