

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

Заметим, что $\triangle KSO = \triangle LSO = \triangle MSO$, т.к. $KS = LS = MS$ как касательные, SO - общая, $OK = OL = OM$ как радиусы, значит высоты из K, M и L на SO попадают в одну точку, значит плоскость $(KLM) \perp SO$, линия (KLM) пересекает SO в т. X , тогда $SX = KS \cdot \cos \angle KSO$, т.к. $KX \perp SO$.

$$SO = L + R = 5R, KO = R \Rightarrow \sin \angle KSO = \frac{KO}{OS} = \frac{1}{5} \Rightarrow \angle KSO = \arcsin \frac{1}{5},$$

$$\cos \angle KSO = \sqrt{1 - \sin^2 \angle KSO} = \sqrt{1 - \frac{1}{25}} = \sqrt{\frac{24}{25}}. KS \text{ по т. Пифагора равняется}$$

$$\sqrt{SO^2 - KO^2} = \sqrt{25R^2 - R^2} = \sqrt{24} R \Rightarrow SX = \sqrt{24} R \cdot \sqrt{\frac{24}{25}} = \frac{24}{5} R, \text{ тогда если площадь}$$

сечения плоскостью (KLM) это S , $\frac{L}{SX} = \sqrt{\frac{4}{5}}$ из очередной геометрии, которая

существует т.к. обе плоскости перпендикулярны SO . Тогда $\frac{4R}{\frac{24}{5}R} = \sqrt{\frac{4}{5}} \Rightarrow$

$$S = \left(\frac{12}{5}\right)^2 = 5,76$$

Ответ: $\arcsin \frac{1}{5}$, 5,76.

№5. Рассмотрим 4 случая: 1) $x-6-y \geq 0, x-6+y \geq 0: |x-6-y| + |x-6+y| =$

$$= x-6-y + x-6+y = 2x-12 = 12 \Rightarrow x=12, \text{ тогда } 12-6-y \geq 0 \Rightarrow y \leq 6, 12-6+y \geq 0 \Rightarrow$$

$$y \geq -6. (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = 36 + (|y|-8)^2 = a \Rightarrow |y|-8 = \pm \sqrt{a-36} \Rightarrow |y| = \pm \sqrt{a-36} + 8.$$

как мы выяснили, $-6 \leq y \leq 6 \Rightarrow 0 \leq |y| = \pm \sqrt{a-36} + 8 \leq 6 \Rightarrow$ если $-8 \leq \pm \sqrt{a-36} \leq -2$, то

у системы есть корни, значит $2 \leq \sqrt{a-36} \leq 8 \Rightarrow 4 \leq a-36 \leq 64 \Rightarrow 40 \leq a \leq 100$. В этом

случае $y = \pm(\sqrt{a-36} + 8)$, при $a < 100$ 2 решения и одно при $a = 100$.

2) $x-6-y \leq 0, x-6+y \geq 0: |x-6-y| + |x-6+y| = -x+6+y + x-6+y = 2y = 12 \Rightarrow y=6,$

тогда $x-6-6 \leq 0 \Rightarrow x \leq 12$ и $x-6+6 \geq 0 \Rightarrow x \geq 0. (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = (x-6)^2 + 4 = a,$

т.к. $x \geq 0$ и $y=6$, значит $x-6 = \pm \sqrt{a-4} \Rightarrow 0 \leq x = \pm \sqrt{a-4} + 6 \leq 12 \Rightarrow -6 \leq \pm \sqrt{a-4} \leq 6 \Rightarrow$

$0 \leq a-4 \leq 36 \Rightarrow 4 \leq a \leq 40$. Если $a=4$, то $x=6$, система имеет 1 решение, если

$4 < a \leq 40$, - система имеет 2 решения

3) $x-6-y \leq 0, x-6+y \leq 0: |x-6-y| + |x-6+y| = -x+6+y - x+6-y = -2x+12 = 12 \Rightarrow$

$$x=0, \text{ тогда } 0-6-y \leq 0 \Rightarrow -6 \leq y; 0-6+y \leq 0 \Rightarrow y \leq 6. (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 =$$

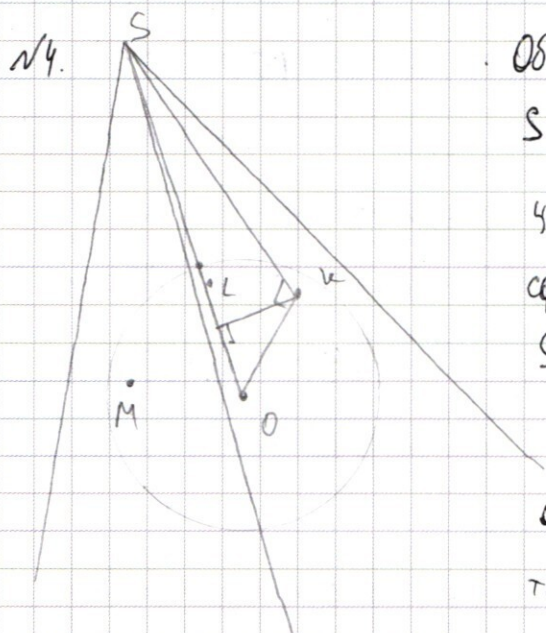
$$= 36 + (|y|-8)^2 = a, \text{ заметим, что это то же самое что и в 1 случае, значит}$$

прибыло $a < 100$ система имеет 24 решения: 2 из 1 случая и 2 из 3 случая.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 $16875 = 3^3 \cdot 5^4 \Rightarrow$ все цифры числа либо единицы, либо кратны 5 или 3, так же они нечетные, т.к. $16875 \nmid 2$, значит это 1 или 3 или 5 или 9, тогда это либо 4 цифры 5, 3 цифры 3 и одна единица, либо 4 цифры 5, 3, 9 и две единицы. В первом случае количество восьмизначных чисел с первым набором цифр $C_8^4 \cdot C_4^3$, т.к. есть C_8^4 способов расставить цифры 5, из оставшихся C_4^3 способа расставить тройки. Количество восьмизначных чисел со вторым набором цифр $C_8^4 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1$, т.к. есть C_8^4 способов расставить цифры 5, C_4^1 поставить 9 на оставшиеся места и C_3^1 поставить 3 на оставшиеся места, тогда всего восьмизначных чисел с суммой цифр 16875 $C_8^4 \cdot C_4^3 + C_8^4 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1 = 70 \cdot 4 + 70 \cdot 4 \cdot 3 = 700$

Ответ: 700



Обозначим радиус сферы за R , расстояние от S до сферы за L . Рассмотрим плоскость с центром в S , переводящую одну плоскость, касательную сферы и перпендикулярную SO , в другую, такая есть, т.к. S не лежит ни в одной из них, и эти плоскости параллельны, т.к. обе перпендикулярны SO .

Обрезки, лежащие ~~внутри~~ трехгранного угла останутся тем же, точки на ребрах останутся на ребрах,

значит сечение трехгранного угла перейдет в сечение, значит $\frac{L}{L+2R} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3L = 2L + 4R \Rightarrow L = 4R$, т.к. $L + 2R$ - расстояние до второй плоскости, а L - расстояние до первой, а коэффициент подобия равен корню от отношения площадей.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

остается $a = 100$ и решения $(12; 0); (0; 0)$

$$4) \begin{cases} x - 6 - y \geq 0 \\ x - 6 + y \leq 0 \end{cases} \Rightarrow |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = x - 6 - y - x + 6 - y = -2y = 12 \Rightarrow y = -6,$$

$$x - 6 - (-6) \geq 0 \Rightarrow x \geq 0; \quad x - 6 + (-6) \leq 0 \Rightarrow x \leq 12, \text{ тогда } (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 =$$

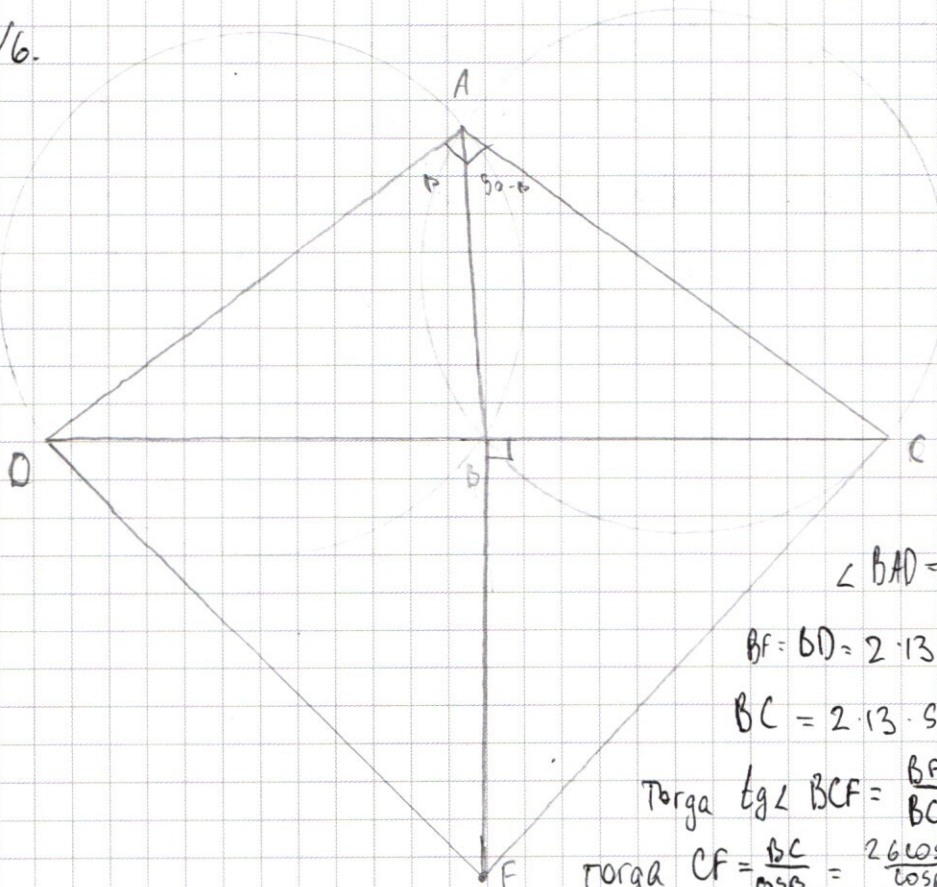
$$= (x - 6)^2 + 4 = a, \text{ то случай 2, значит при } 4 \leq a \leq 40 \text{ система}$$

имет 2 решения по случай 2) и 2 решения по случай 4) они

различны, т.к. y различны, остается только $a = 4$ и решения $(6; 6)$ и $(6; -6)$

Ответ: 4; 100.

№6.



по Т. Синусов

$$AB = 2 \cdot 13 \sin \angle ADB =$$

$$= 2 \cdot 13 \sin \angle ACB \Rightarrow$$

$$\text{либо } \angle ADB = \angle ACB,$$

$$\text{либо } \angle ADB + \angle ACB = 180^\circ,$$

$$\text{но } \angle ADB + \angle ACB = 90^\circ \Rightarrow$$

они равны. Обозначим

$$\angle BAD = \beta, \text{ тогда } \angle BAC = 90 - \beta,$$

$$BF = BD = 2 \cdot 13 \cdot \sin \beta \text{ по Т. Синусов,}$$

$$BC = 2 \cdot 13 \cdot \sin 90 - \beta = 26 \cos \beta.$$

$$\text{Тогда } \tan \angle BCF = \frac{BF}{BC} = \frac{26 \sin \beta}{26 \cos \beta} = \tan \beta \Rightarrow \angle BCF = \beta,$$

$$\text{тогда } CF = \frac{BC}{\cos \beta} = \frac{26 \cos \beta}{\cos \beta} = 26$$

Ответ: 26.

$\sqrt{7} \quad y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81}$; $85 + (3^{81} - 1)x > y \Rightarrow 3^x + 4 \cdot 3^{81} < 85 + (3^{81} - 1)x$. ~~Априори $x \geq 85 + 1$, тогда $3^x + 4 \cdot 3^{81} = 3^{85} \cdot 3^x + 4 \cdot 3^{81} \geq 85 + (3^{81} - 1)(3^x + 4 + 1) = 3^{85} + 4 \cdot 3^{81} + 2 \cdot 3^{81} - 2 \Leftrightarrow 3^{85}(3^x - 1) \geq 2 \cdot 3^{81} - 2 \Leftrightarrow 3^x - 1 \geq \frac{2}{81} - \frac{2}{3^{85}}$ при $x = 0$ это неравенство верно, при увеличении x на 1 левая часть увеличивается хотя бы на 1, а правая не больше чем на 1, т.е. при натуральных $x \geq 85$ система не имеет решений. если $x \leq 0$, то $3^x > 0$, $4 \cdot 3^{81} > 85$, $(3^{81} - 1)x \leq 0 \Rightarrow 3^x + 4 \cdot 3^{81} \geq 85 + (3^{81} - 1)x$, значит система не имеет решений.~~

Решим уравнение $3^x - (3^{81} - 1)x + 4 \cdot 3^{81} - 85 = 0$. Функцию $f(x) = 3^x - (3^{81} - 1)x + 4 \cdot 3^{81} - 85$ выукла вниз как сумма выуклых вниз экспоненты и линейной функции от x , значит она имеет ≤ 2 решений. Если $x = 4$, то $f(x) = 81 - 4 \cdot 3^{81} + 4 + 4 \cdot 3^{81} - 85 = 0$ — первое решение. Если $x = 85$, то $f(x) = 3^{85} - (3^{81} - 1)(3^4 + 4) + 4 \cdot 3^{81} - 85 = 3^{85} - 3^{85} - 4 \cdot 3^{81} + 81 + 4 + 4 \cdot 3^{81} - 85 = 0$, это второе решение, значит $3^x - (3^{81} - 1)x + 4 \cdot 3^{81} - 81 < 0$ при $x \in (4; 85)$, ~~т.е. верно~~ $3^x + 4 \cdot 3^{81} < 85 + (3^{81} - 1)x$ верно при $x \in (4; 85)$, т.к. нас интересуют только $x \in \mathbb{Z}$, $5 \leq x \leq 84$. Для каждого x будет ровно $f(x)$ целых значений y , удовлетворяющих системе, тогда всего решений $\sum f(x)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$1) X-6-y + X-6+y=12$$

$$X=12$$

$$y \leq 6$$

$$X-6-y - X+6-y=12$$

$$y=-6$$

$$12 \leq X \leq 0$$

$$2) -X+6+y + X-6+y=12$$

$$y=6$$

$$0 \leq X \leq 12$$

$$3) -X+6+y - X+6-y=12$$

$$X=0$$

$$-6 \leq y \leq 6$$

$$1) 36 + (|y|-8)^2 = a$$

$$(|y|-8)^2 = a-36$$

$$a < 36 \quad |y| = \pm \sqrt{a-36} + 8$$

$$\text{против} \quad a \geq 36$$

$$|y| = \sqrt{a-36} + 8 \quad y = \pm \sqrt{a-36} + 8$$

$$|y| = \sqrt{a-36} + 8 \quad |y| = -\sqrt{a-36} + 8$$

$$y = \sqrt{a-36} - 8 \quad 0 = y = -\sqrt{a-36} + 8$$

$$a-36 = 64$$

$$a = 100$$

$$2) (X-6)^2 + 4 = a$$

$$X-6 = \pm \sqrt{a-4}$$

$$0 \leq X = \pm \sqrt{a-4} + 6 \leq 12$$

$$-6 \leq \pm \sqrt{a-4} \leq 6$$

$$4 \leq a \leq 40$$

$$3) 36 + (|y|-8)^2 = a$$

$$|y|-8 = \pm \sqrt{a-36}$$

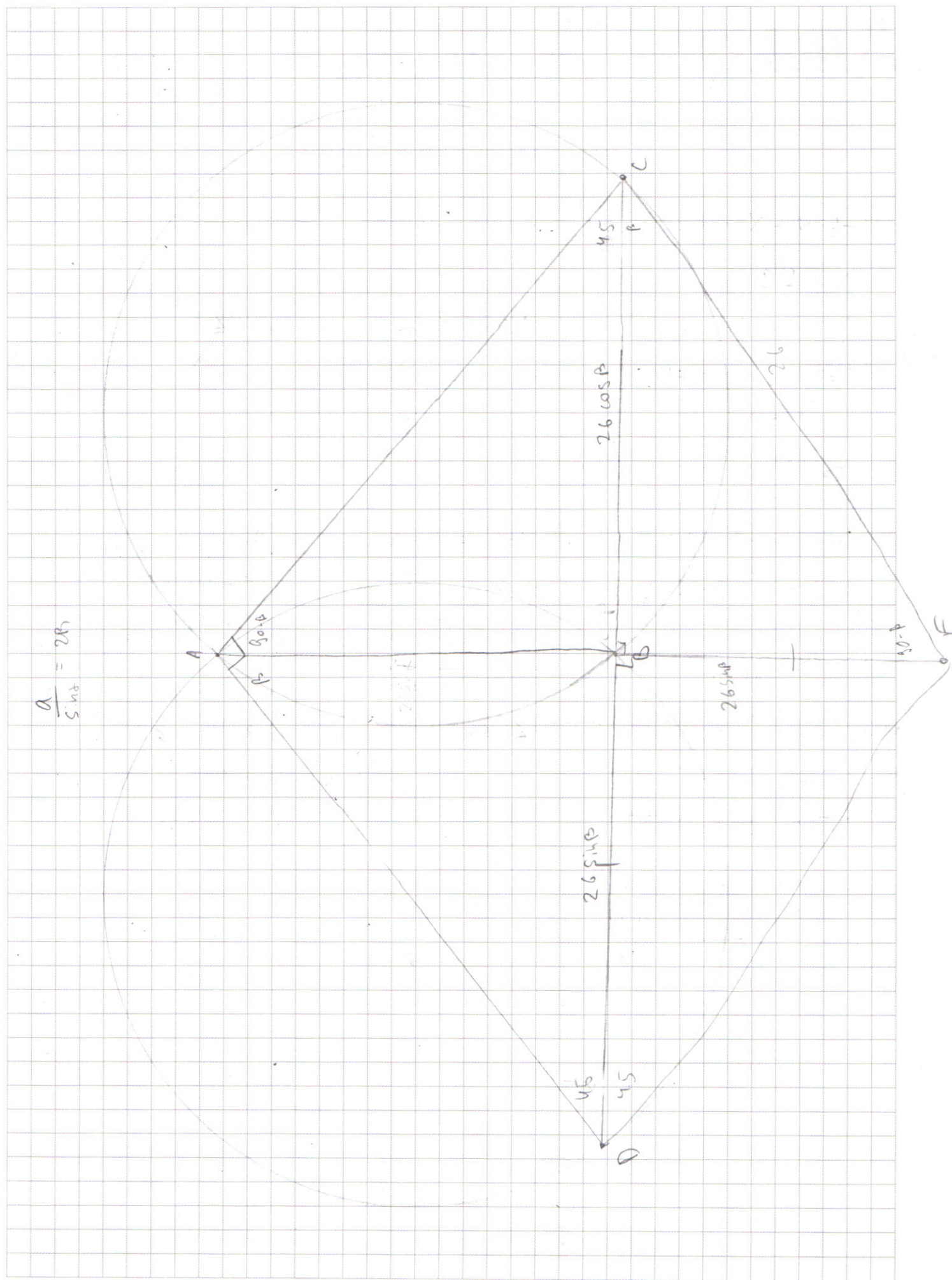
$$0 \leq |y| = \pm \sqrt{a-36} + 8 \leq 6$$

$$-8 \leq \pm \sqrt{a-36} \leq -2$$

$$8 \neq \sqrt{a-36} \geq 2$$

$$64 \geq a-36 \geq 4$$

$$100 \geq a \geq 40$$



$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{81} < 85 + 3^{81} - x$$

$$3^x + 3^{81}(4-x) + x < 85$$

$$3^x - (3^{81}-1)x + 4 \cdot 3^{81} < 85$$

$$3^{84} - (3^{81}-1)(3^4+3) + 4 \cdot 3^{81} = 3^{84} - 3^{85} - 3^{84} + 3^5 + 3 + 4 \cdot 3^{81} = 3^{81}(-3^4+4) + 84 < 85$$

$$3^{85} - (3^{81}-1)(3^4+4) + 4 \cdot 3^{81} = 3^{85} - 3^{85} - 4 \cdot 3^{81} + 3^4 + 9 + 4 \cdot 3^{81} = 85$$

$$x \geq 85$$

$$3^{85} - (3^{81}-1)(3^4+4+2) + 4 \cdot 3^{81} = 3^{85} - 3^{85} - 4 \cdot 3^{81} - 2 \cdot 3^{81} + 85 + 2 - 4 \cdot 3^{81} + 3^{81} \geq 85$$

$$3^{85}(3^{81}-1) \geq 2(3^{81}-1)$$

$$x \in [5, 84]$$

$$3^{85} \cdot 3^2 - 3^{85} \geq 2 \cdot 3^{81} - 2$$

$$3^{81} \cdot 81 \cdot 3^2 - 3^{81} \cdot 2 \geq 3^{85} - 2$$

$$81 \cdot 3^2 - 2 \geq 81 - \frac{2}{3^{81}}$$

$$3^2 - 1 \geq \frac{2}{81} - \frac{2}{3^{85}}$$

$$3^4 - 4 \cdot 3^{81} + 4 \cdot 3^{81} < 85$$

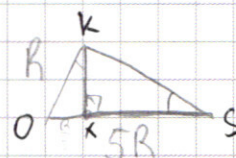
$$85 + (3^{81}-1)x - 3^4 - 4 \cdot 3^{81}$$

$$\frac{L}{L+2R} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

$$3L = 2L + 4R$$

$$\cos 7x + \cos 3x = \sqrt{2} \cos 3x \cos 7x = \sin 7x + \sin 3x = \sqrt{2} \sin 3x \sin 7x$$

$$\cos 7x \left(1 - \frac{\cos 3x}{\sqrt{2}}\right) + \cos 3x \left(1 - \frac{\cos 7x}{\sqrt{2}}\right)$$



$$\sin \angle KSO = \frac{1}{5}$$

$$\frac{4R}{5R} = \sqrt{\frac{4}{5}}$$

$$\frac{5}{6} = \frac{2}{3}$$

$$S = \left(\frac{12}{5}\right)^2$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 144 \\ \hline 96 \\ \times 48 \\ \hline 576 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 16875 \mid 3 \\ 5625 \mid 3 \\ 1875 \mid 3 \\ 625 \mid 5 \\ 125 \mid 5 \\ 25 \mid 5 \\ 5 \end{array}$$

$$3^3 \cdot 5^4$$

$$3 \cdot 3 \cdot 45 + 1$$

$$3 + 4 \cdot 5 + 9 + 2 \cdot 1$$

$$C_8^4 \cdot C_4^3$$

$$C_8^4 \cdot C_4^2 \cdot C_2^1$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 70$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = 2 \cos \alpha \cos \beta$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta + \sin \alpha \cos \beta + \sin \alpha \cos \beta = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x - 2 \sqrt{2} \cos^2 5x + \sqrt{2} = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$\sqrt{2} = 2 \sin 5x \cos 2x - 2 \cos 5x \cos 2x + 2 \sqrt{2} \cos^2 5x \quad \sqrt{2} \cos 5x (\sqrt{2} \cos 2x - \cos 5x) = \sqrt{2} \sin 5x (\sqrt{2} \cos 2x - \cos 5x)$$

$$1 = \sqrt{2} \sin 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 5x \cos 2x + 2 \cos^2 5x \quad \lg 5x = \frac{\sqrt{2} \cos 2x - \cos 5x}{\sqrt{2} \cos 2x - \sin 5x}$$

$$\begin{aligned} \frac{x^y}{e^2} &= \left(\frac{x^y}{y^x} \right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} = (-x)^{\lg(-x) + \lg y} = e \cdot (-x)^{\lg y} \\ (-x)^{\lg y} &= e^3 (-x)^{\lg y} \\ (-x)^{3 \lg y} &= e^3 \\ (-x)^{\lg y} &= e \end{aligned}$$

$$2y^2 - 8y + 8 - x^2 - 4x - 4 - xy - 4 = 0$$

$$2(y-2)^2 - (x-2)^2 = 4 + xy$$

$$2(y-2)^2 - (a+2)^2 = 4 - ay$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 7x \cos 3x + \sin 7x \sin 3x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\cos 7x - \sqrt{2} \cos 7x \cos 3x + \cos 3x = \sin 7x - \sqrt{2} \sin 7x \sin 3x + \sin 3x$$

$$\frac{a^{4 \lg y}}{y^{2 \lg y}} = a^{\lg a} \cdot a^{\lg y}$$

$$y^{2 \lg y} = a^{\lg a - 3 \lg y}$$

$$y^{2 \lg y} = a^{\lg a - 3 \lg y}$$

$$y = a^{\frac{\lg a}{2 \lg y}} = a^{\log_{\sqrt{y}} \frac{a}{\sqrt{y}}} = a^{\frac{\log_{\sqrt{y}} a - 1}{2}}$$

$$\frac{\lg \frac{a}{\sqrt{y}}}{2 \lg y} = \frac{\lg \frac{a}{\sqrt{y}}}{\lg y} \quad \log_a \cdot \log_a c = \log_b c$$

$$\frac{\log_b c}{\log_b a} = \log_a c$$

$$b^{xy} = ((b^x)^y) = a^y = c$$



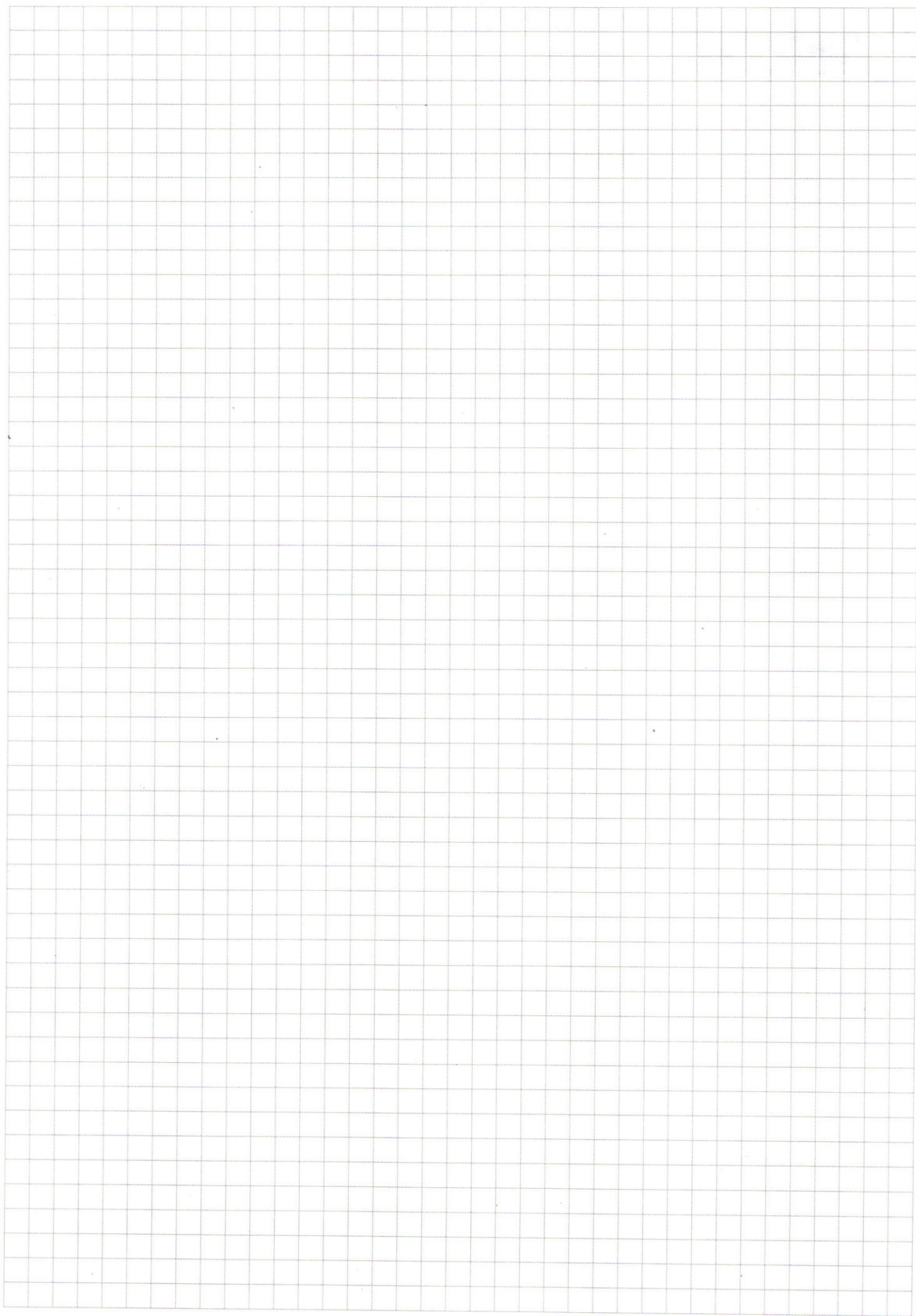
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № _____
(Нумеровать только чистовики)