МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 4 и 9.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12, \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90°$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)\,x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$16875 = 5^4 \cdot 3^3 \Rightarrow$ Восьмизначное число состоит из 4 5-ок, 3 3-ек, и одной 1

15555333

$$\frac{8!}{4!\cdot 3!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{6} = 56\cdot 5 = 280$$

Ответ: 280

№2

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2\cos 5x \cos 2x - \sqrt{2}\cos 10x = 2\sin 5x \cos 2x$$

$$2\cos 2x(\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2}\cos 10x$$

$$2\cos 2x(\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2}(\cos^2 5x - \sin^2 5x)$$

1) $\cos 5x = \sin 5x$

$\operatorname{tg} 5x = 1$

$5x = \frac{\pi}{4} + \pi n$

$\boxed{x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}}$

2) $2\cos 2x = \sqrt{2}(\cos 5x + \sin 5x)$

$\cos 5x + \sin 5x = \sqrt{2}\left(\underset{=\cos\frac{\pi}{4}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\cos 5x + \overset{=\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\sin 5x\right) = \sqrt{2}\cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$

$\cancel{2}\cos 2x = \cancel{2}\cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$

$\cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) - \cos 2x = 0$

$-2\sin\left(\frac{7x}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\sin\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0$

$\frac{7x}{2} - \frac{\pi}{8} = \pi n \qquad \frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8} = \pi n$

$\frac{7x}{2}=\frac{\pi}{8}+\pi n$ $\qquad\qquad$ $\frac{3x}{2}=\frac{\pi}{8}+\pi n$

$x=\frac{\pi}{28}+\frac{2\pi n}{7}$ $\qquad\qquad$ $x=\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi n}{3}$

Отв: $x=\frac{\pi}{20}+\frac{\pi n}{5}$, $x=\frac{\pi}{28}+\frac{2\pi n}{7}$, $x=\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi n}{3}$

№3

$$\begin{cases}\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y}=(-x)^{\lg(-xy)} & (1)\\ 2y^2-xy-x^2-4x-8y=0 & (2)\end{cases}$$ $y>0$, $x<0$

(2) $x^2+xy+4x+8y-2y^2=0$

$x^2+x(y+4)+8y-2y^2=0$

$D=y^2+8y+16-32y+8y^2=9y^2-24y+16=(3y-4)^2$

$$x=\frac{-4-y\pm(3y-4)}{2}=\left[\begin{array}{l}y-4\\-2y\end{array}\right.$$

(1) $\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y}=(-x)^{\lg(-xy)}$

$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y}>0$ $\quad (-x)^{\lg(-xy)}>0$

$\lg\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y}=\lg(-x)^{\lg(-xy)}$

$\lg y\cdot\frac{4\lg(-x)-2\lg y}{\cancel{2\lg y}}=\lg(-xy)\cdot\lg(-x)$

$4\lg y\lg(-x)-2\lg^2 y=\lg^2(-x)+\lg(-x)\cdot\lg(y)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2\lg^2 y - 3\lg y \lg(-x) + \lg^2(-x) = 0$

$2(\lg y - \lg(-x))(\lg y - \frac{\lg(-x)}{2}) = 0$

$\lg y = \lg(-x)$

$y = -x$

$x = y - 4$

$y = 4 - y$

$y = 2$

$\cancel{x = 2}$

$x = -2y$

$y = 2y$

$\cancel{y = 0}$

$\lg y = \frac{\lg(-x)}{2}$

$y^2 = -x$

$x = y - 4$

$y^2 = 4 - y$

$y^2 + y - 4 = 0$

$D = 1 + 16 = 17$

$y = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$

$x = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} - 4 = \frac{-9+\sqrt{17}}{2}$

$x = -2y$

$y^2 = 2y$

$y(y-2) = 0$

$y = 2 \quad x = -4$

Отв: $(-4;2)$, $\left(\frac{-9+\sqrt{17}}{2}; \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)$

№5

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \ (1) \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a \ (2) \end{cases}$$

1) $|x-6-y|+|x-6+y|=12$

$\underset{f(x)}{x-6-y}$, $\underset{g(x)}{x-6+y}$

1) $f(x)\geq 0,\ g(x)\geq 0$ 2) $f(x)\geq 0,\ g(x)<0$ 3) $f(x)<0,\ g(x)\geq 0$ 4) $f(x)<0,\ g(x)<0$

$x-6-y+x-6+y=12$ $\quad$ $x-6-y-x+6-y=12$ $\quad$ $-x+6+y+x-6+y=12$ $\quad$ $-x+6+y-x+6-y=12$

$x=12$ $\quad$ $y=-6$ $\quad$ $y=6$ $\quad$ $x=0$

2) $(|x|-6)^2+(|y|-8)^2=a$

$x \Leftrightarrow -x$

$y \Leftrightarrow -y$

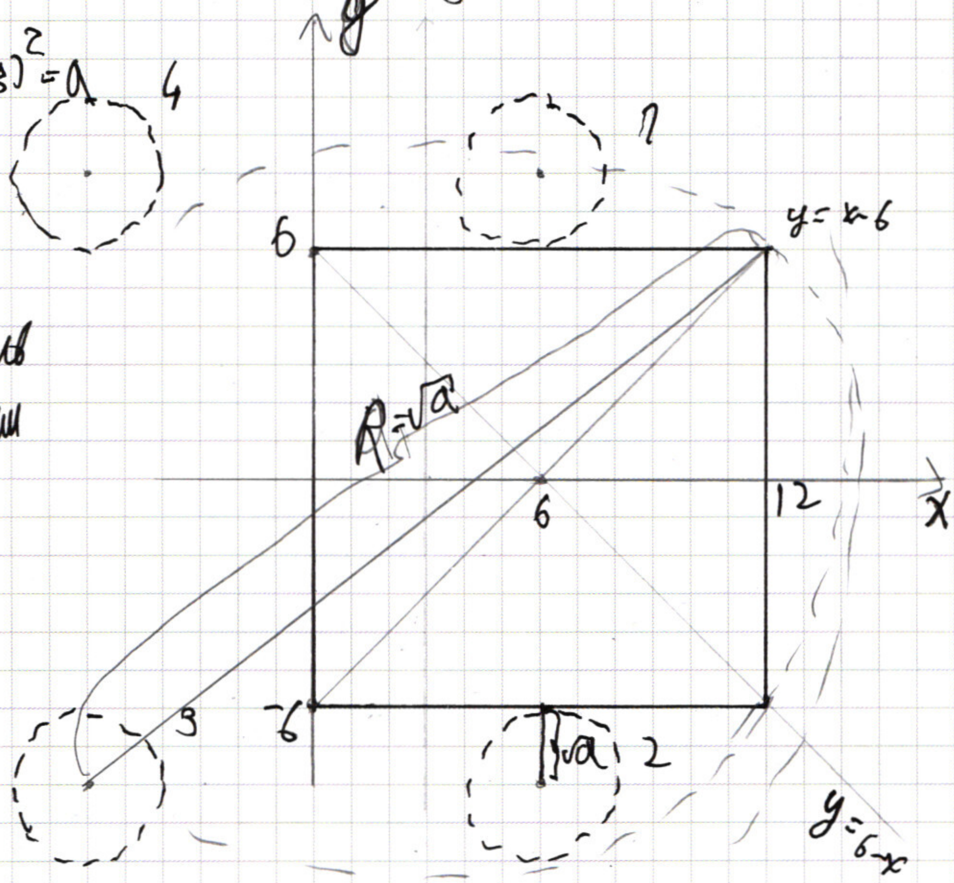
Построим в I ой четв

и симметрично отразим

$(x-6)^2+(y-8)^2=a$

Окр. $w(6;8)$ $R=\sqrt{a}$

или точка $(6;8)$



2 решения:

1 случай Окружности 1 и 2 касаются внешне квадрата

$\sqrt{a}=2 \Rightarrow a=4$

2 случай окружность 3 проходит через точку $(12;6)$

Окружность 4 проходит через точку $(12;-6)$

$\sqrt{a}=\sqrt{18^2+14^2}=\sqrt{324+196}=\sqrt{520} \hookrightarrow a=520$

Отв: $a=4$, $a=520$

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 4

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

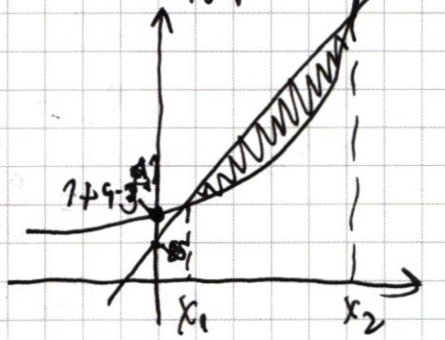
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7

$y \geq 3^x + 9\cdot 3^{81}$

$y < 85 + (3^{81}-1)x$



Первое пересечение будет при $x_1 = 4$

$81 \cancel{+ 9\cdot 3^{81}} = 85 + (3^{81}-1)\cdot 4 = \cancel{85 - 4 + 9\cdot 3^{81}}$

Второе при $x_2 = \cancel{88} = 85$

$3^{85} + 9\cdot 3^{81} = 85 + (3^{81}-1)85$

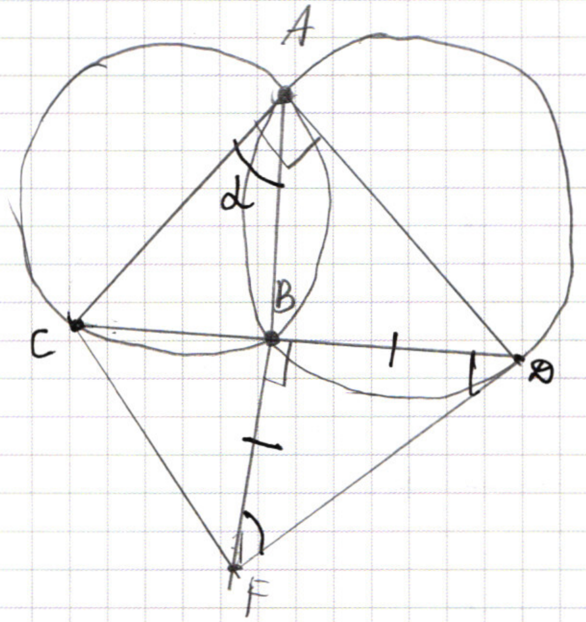
$81\cdot 3^{81} \cancel{+ 9\cdot 3^{81}} = \cancel{85 - 85} + 3^{81}\cdot 85$

Выбрать целый $x \to$ 80 вариантов

при каждом $x = k \in [5;84]$

$85 + (3^{81}-1)k - 3^k - 9\cdot 3^{81} = 85 - k + 3^{81}(k-9) - 3^k$ - целых y

№6



$R_1 = R_2 = 13$

$CF = ?$

1) $\angle BFD = \angle BDF = 45^0$

$\angle CAB = \alpha \Rightarrow \angle DAB = 90 - \alpha$

$\triangle CAB$

$2R = \frac{BC}{\sin\alpha}$

$\triangle ADB$

$2R = \frac{BD}{\sin(90-\alpha)} = \frac{BD}{\cos\alpha}$

$BC = BD\, tg\,\alpha$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

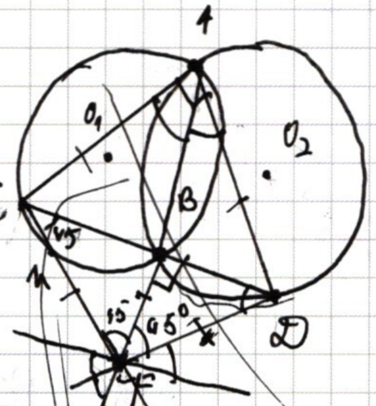
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1 2 3 5

№6

$CF = ?$



$BC =$

$CF = BF = DF$ $BD = BF$

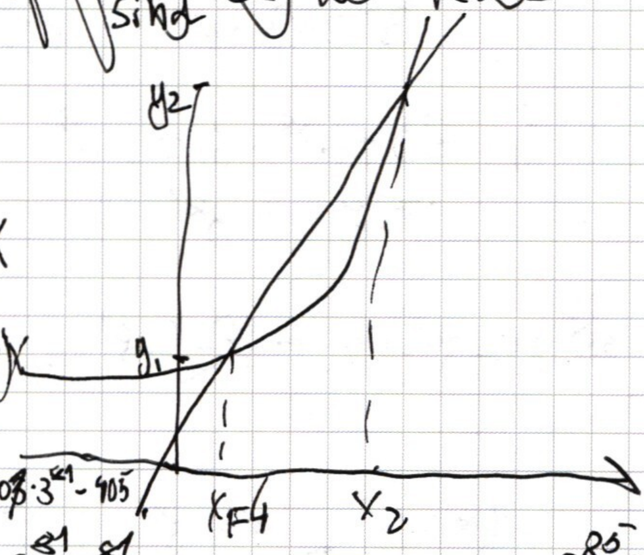
$CF = BF\sqrt{2} = BD\sqrt{2}$

$2R = \frac{BD}{\sin\alpha}$

$\frac{81}{5}$ $\frac{}{405}$

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

$3^x + 4 \cdot 3^{81} > 85 + (3^{81} - 1)x$



$3^{405} + 4 \cdot 3^{81}$ $85 + 405 \cdot 3^{81} - 405$

$3^{81} \cdot 3$ $3^{162} = 3^{81} \cdot 3^{81}$

$3^{100} = 3^{19} \cdot 3^{81} + 4 \cdot 3^{81} \vee 85 + 100 \cdot 3^{81} - 100$

$3^{90} = 3^{9} \cdot 3^{81} + 4 \cdot 3^{81} \vee 85 + 90 \cdot 3^{81} - 90$

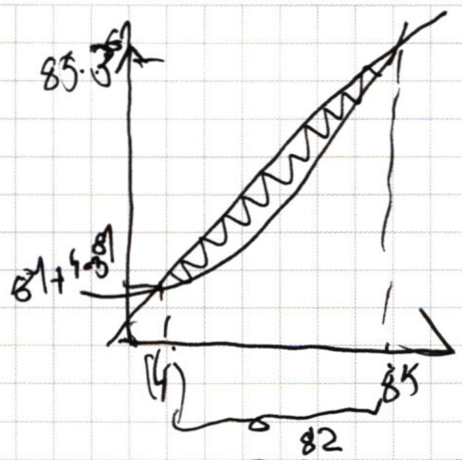
$3^{85} = 3^4 \cdot 3^{81} + 4 \cdot 3^{81} \vee$

$\vee 85 + 85 \cdot 3^{81} - 85$

$85 \cdot 3^{81} \vee 85 + 85 \cdot 3^{81}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)



$85-4+1=82$

$3^{85}+4\cdot3^{81}$

$3^4\cdot3^{81}+4\cdot3^{81}=85\cdot3^{81}$

$3^4+4\cdot3^{81}=81+4\cdot3^{81}$

$85+(3^{81}-1)85=85\cdot3^{81}$

$81+3\,4\cdot3^{81}$

$5^{(3^{81}-1)}$

$\cancel{82}\,5$

$\cancel{8(3^{81}-1)}$

$81+4\cdot3^{81}-4$

$243-5$

$729-6$

3^6-3^5

3^7

$243+4\cdot3^{81}$

$tg\alpha=\frac{BC}{AC}$

$BC=\frac{BD\,tg\,DC}{AC}$

$BD=AC$

$5:\quad 85+5\cdot3^{81}-5=5\cdot3^{81}+80$

$243+4\cdot3^{81}\qquad 1\cdot3^{81}+80-243$

$6:\ 85+6\cdot3^{81}-6=6\cdot3^{81}+79$

$729+4\cdot3^{81}$

$2\cdot3^{81}+79-729$

$\int_5^{84}\cancel{85+(3^{81}-1)x-3^x-4\cdot3^{81}}=$

$85-84+80\cdot3^{81}-3^{81}$

$=\cancel{85x}+\frac{(3^{81}-1)x^2}{2}-\ln3\cdot3^x-4\,3^{81}\qquad 85-83+79\cdot3^{81}-3^{83}$

$BC=BD\,tg\alpha$

$\frac{BC}{\sin\alpha}=\frac{BD}{\cos\alpha}$

$BC=2R=\frac{BC}{\sin\alpha}$

$2R=\frac{BD}{\sin(90-\alpha)}=\frac{BD}{\cos\alpha}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\lg\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = \lg(-x)^{\lg(-xy)}$

$\lg y \cdot \frac{4\lg(-x)}{2\lg y} = \lg(-xy)\cdot\lg(-x)$

$y=1$

$\lg(\cancel{x^4})$ $(x^4)^0 = (-x)^{\lg(-x)}$

$(-x)^{\lg(-x)} = 1$

$2+1=1+4-8+2$ $x=1$ $\cancel{-x=0}$

$\cancel{x=0}$

$\boxed{x=-1}$

$\boxed{-1;1}$

$(-4\sqrt{5};2\sqrt{5})$

$2\lg(-x) = \lg(-x)\cdot\lg(-xy)$

$2 = \lg(-xy)$

$-xy = 100$ $x = y-4$

$x=-2y$

$(4-y)y=100$ $2y^2=100$

$4y-y^2=100$

$y^2-4y+100=0$ $y^2=50$

$\frac{D}{4}<0$ $y=2\sqrt{5}$

$x=-4\sqrt{5}$

$\begin{cases} |x-6-y|+|x-6+y|=12|y| \\ (|x|-6)^2+(|y|-8)^2=a \end{cases}$

1) $1\geq 0$ $2\geq 0$

$x-6-y+x-6+y=12$

$x=12$

2) $1\geq 0$ $2<0$

$x-6-y-x+6-y=12$

$y=-6$

(1) $x-y-6\geq 0$ $x-6+y\geq 0$

$y\leq x-6$ $y\geq 6-x$

3) $1<0$ $2\geq 0$

$-x+6+y+x-6+y=12$

$y=6$

4) $1<0$ $2<0$

$-x+6+y-x+6-y=12$

$\cancel{2x=-12}$ $x=0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

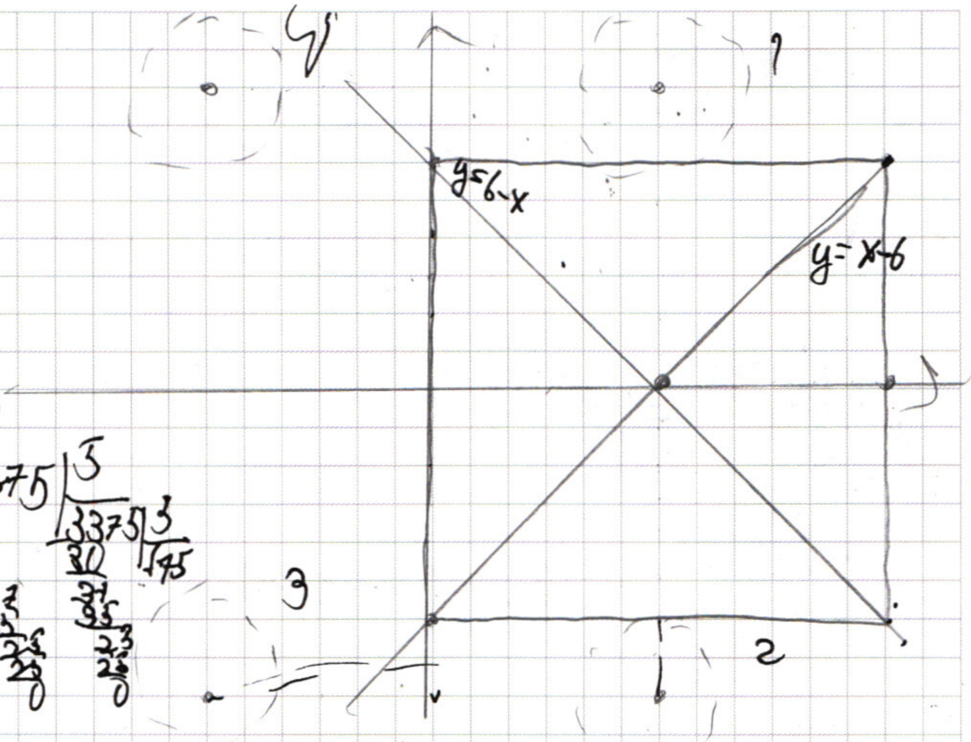
г) $(|x|-6)^2+(|y|-8)^2=a$

$x \to -x$

$y \to -y$

Построим в I-ой четв и отразим

Окр. (6;8) $R=\sqrt{a}$, или точка (6;8)



8 раз 2 реш 1 и 2 окр. кас. квадрата

$R=2=\sqrt{a} \Rightarrow \boxed{a=4}$

$a=\sqrt{520}$

$a=\boxed{520}$

$6^2+14^2=36+196=232$

$324+4=328$

$324+196=\sqrt{520}$

$R=\sqrt{196+324}=\sqrt{520}$

$16875=5^3\cdot3^3$

8-значное число состоит из 2 единиц, 3 пятерок и 3 троек

$$\frac{8!}{2!\cdot3!\cdot3!}=\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4^2}{12}=7\cdot8\cdot10=\boxed{560}$$

$$\begin{cases} y\geq 3^x+4\cdot3^{81} \\ y<85+(3^{81}-1)x \end{cases}$$

$y\geq 4\cdot3^{81}$

$y<\cancel{85}+(3$ $\cancel{3}^4$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1, 3, 5, 7

$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$

$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}(\cos 7x \cos 3x - \sin 7x \sin 3x) - (\sin 7x + \sin 3x) = 0$

~~$2\cos 5x \cos 2x - \sqrt{2}(2\cos^2 5x - 1)$~~

~~$2\cos 5x(\cos 2x - \sqrt{2}\cos 5x) + \sqrt{2} = \sin$~~

~~$2\cos 5x \cos 2x - \sqrt{2}\cos 10x = 2\sin 5x \cos 2x$~~

~~$\cos 10x = \cos(6x + 4x) = \cos 6x \cos 4x - \sin 6x \sin 4x$~~

$\cos(7x + \frac{\pi}{4}) - \cos 10x + \cos(3x + \frac{\pi}{4}) = 0$

$2\cos(5x + \frac{\pi}{4})\cos(2x) - \cos 10x = 0$

~~$\sqrt{2}\cos 10x = 2(\cos\frac{\pi}{4}\cos 10x) = \cos(10x + \frac{\pi}{4}) + \cos(10x - \frac{\pi}{4})$~~

~~$\cos 7x(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 3x) + \cos 3x(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 7x)$~~

$2\cos 2x(\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2}\cos 10x = 0$

~~$2(\cos 2x \sqrt{2}\cos(5x + \frac{\pi}{4}) - \sqrt{2}\cos 10x = 0$~~

~~$2\cos 2x \cos(5x + \frac{\pi}{4}) - \cos 10x = 0$~~

$2\cos 2x(\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2}(\cos^2 5x - \sin^2 5x)$

$\cos 5x - \sin 5x = 0 \quad \operatorname{tg} 5x = 1 \quad \dots$

$2\cos 2x = \sqrt{2}(\cos 5x + \sin 5x)$

$\cancel{2}\cos 2x = \cancel{2}\cos(5x - \frac{\pi}{4})$

$\cos(5x - \frac{\pi}{4}) - \cos 2x = 0 \quad -2\sin(\frac{7x}{2} - \frac{\pi}{8})\sin(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8}) = 0$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$\cos\frac{7\pi}{20} + \cos\frac{3\pi}{20} - \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{2} = \sin\frac{7\pi}{20} + \sin\frac{3\pi}{20}$ $R_1 = R_2 = 13$

CF?

$\sin\frac{3\pi}{20}$ $\sin\frac{7\pi}{20}$

$\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{3\pi}{28}$

$-\sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{14} =$

$= \sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{28}$

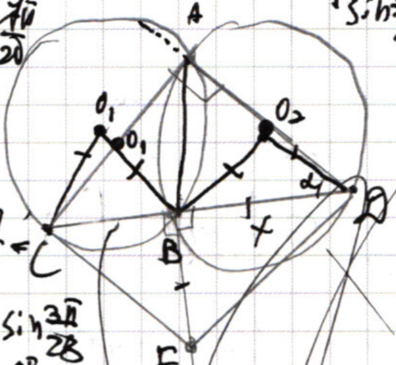
$\cos\frac{3\pi}{28} - \sqrt{2}\cos\frac{8\pi}{14} = \cos\frac{3\pi}{28}$

$+2\sin\frac{7\pi}{28}\sin\frac{8\pi}{28} - \sqrt{2}\cos$

$\sin\frac{9\pi}{14} - \cos\frac{5\pi}{14} = 0$

$\sin\frac{9\pi}{14} - \sin\left(\frac{2\pi}{14}\right)$

$2\cos\frac{23\pi}{28}\sin\frac{5\pi}{14}$



$CA = AD = 2R$

$CD = \sqrt{AC^2 + AD^2} = \sqrt{4R^2 + 4R^2} = R\sqrt{8} = 13\sqrt{8} =$

$= 26\sqrt{2}$

$\cos\alpha = \frac{2R}{R\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$(O_2B)^2 = O_2D^2 + x^2 - 2O_2D\,x\cos\frac{\pi}{4}$

$0 = x + 2R \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ $x\left(1 - \frac{2R}{\sqrt{2}}\right) = 0$

$x = \frac{2R}{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{26}{\sqrt{2}}}$

$\times\begin{array}{r}243\\6\\\hline 1358\end{array}$ $\times\begin{array}{r}243\\3\\\hline 700\end{array}$

$\left(3^{81}\right)^5 + 4\cdot3^{81}$

243

$81\cdot5\cdot3^{81} - 81\cdot5+85$

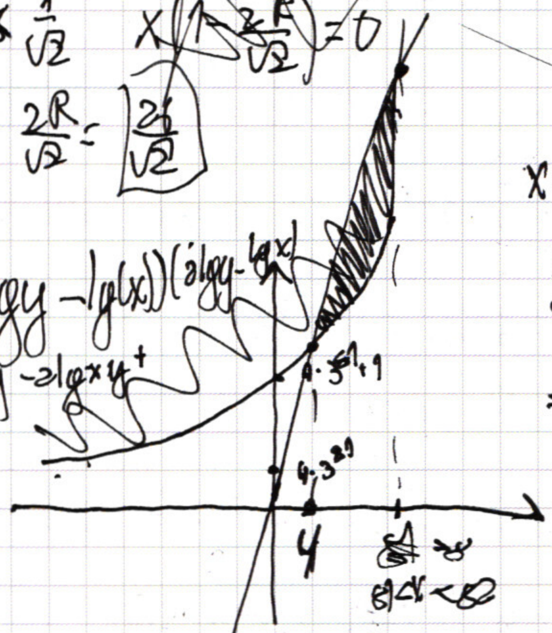
$600\ (3^{81})^6$

$81\cdot6\cdot3^{81}$

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4\cdot3^{81} \\ y < 85 + (3^{81}-1)\cdot x \end{cases}$$

$2(\lg y - \lg(x))(2\lg y - \lg x)$

$2\lg^2 y - 2\lg x\, y +$



$x = 81\cdot20$

$3^{81\cdot20}$

$= \left(3^{81}\right)^{20} + 4\cdot3^{81}$

$3^{81}\cdot20 + 85$

-20

$\left(3^{81}\right)^{10} + 4\cdot3^{81}$

$810\cdot3^{81}$

$3^x + 4\cdot3^{81} = 85 + (3^{81}-1)x$

$(3^{81}-1)x - 3^x = 4\cdot3^{81} - 85$

$\frac{3^x}{\ln3} = (3^{81}-1)$

$3^x = \ln3(3^{81}-1)$

$\times\begin{array}{r}81\\5\\\hline 405\end{array}$

$3^{81} - 1 <$

$x \leq 81$

$x \in [4;$

$\boxed{x=4}$

$y \geq 81 + 4\cdot3^{81}$

$y < 85 + 4\cdot3^{81} - 4 < 81 + 4\cdot3^{81}$

$85 + 81\cdot3^{81} - 81 = 81\cdot3^{81} + 4$

$5\cdot3^{81}$

$3^{10} + 4\cdot3^{81}$

$85 + (3^{81}-1)\cdot10 = 10\cdot3^{81}$

$3^6 + 4\cdot3^{81}$

$85 + 6\cdot3^{81} - 6 = 6\cdot3^{81} - 79$

$3^5 + 4\cdot3^{81} = 4\cdot3^{81} + 243$

$3^{81} - 80 \vee 243$ $85 + 5\cdot3^{81} - 5 = 5\cdot3^{81} - 80$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2)

$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$

$2\cos 5x \cos 2x - \sqrt{2}\cos 10x = 2\sin 5x \cos 2x$

$2\cos 2x(\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2}\cos 10x = 0$

$\cos 5x - \sin 5x = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 5x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 5x\right) = \sqrt{2}\cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right)$

$2\cos 2x \cdot \sqrt{2}\cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}\cos 10x = 0$

$2\cos 2x \cdot \cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos 10x = 0$

$\cos\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos 10x = 0$

$\cos 10x = \cos(7x + 3x) = \cos 7x \cos 3x - \sin 7x \sin 3x$

$\cancel{\cos 7x(1 - \sqrt{2}\cos 3x) + \sin 7x(1 - \sqrt{2}\sin 3x) = -\cos 3x + \sin 3x}$

$\cos 10x = 2\cos^2 5x - 1 = 1 - 2\sin^2 5x$

$\cos 7x + \cos 3x - \frac{\sqrt{2}}{2}(2\cos^2 5x - 1) - \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - 2\sin^2 5x) = \sin 7x + \sin 3x$

$2\cos 5x \cos 2x - \sqrt{2}\cos^2 5x + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sin 5x \cos 2x - \sqrt{2}\sin^2 5x + \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 5x(2\cos 2x - \sqrt{2}\cos 5x) = \sin 5x(2\cos 2x - \sqrt{2}\sin 5x) = 0$

$\cos 7x - \sin 7x - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 3x - \cos 3x$

$\cos 7x - \sin 7x = \sqrt{2}\cos\left(7x + \frac{\pi}{4}\right)$ $\quad \sin 3x - \cos 3x = \sqrt{2}\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$

$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 3x - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 3x = -\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$

$\cos\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos 10x = \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$

$\cancel{-2\sin\left(\frac{17x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)\sin\left(\frac{-3x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = \sin 5x - \frac{\pi}{4}}$

$2\cos(5x + \frac{\pi}{4})\cos(2x) - \cos 10x = 0$

$2\cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right)\cos 2x - \cos 10x = 0$

$2\cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right)\cos 2x - (2\cos^2 5x - 1) = 0$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases}$$

(1) $\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$

$y > 0$

$-x > 0$

(2) $2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$

$\cancel{x^2 + 4x = 2y^2}$

$x^2 + 4x + xy + 8y - 2y^2 = 0$

$x^2 + x(4+y) + 8y - 2y^2 = 0$

$D = 16 + 8y + y^2 - 32y + 8y^2 = 9y^2 - 24y + 16 = (3y-4)^2$

$x = \frac{-4-y \pm (3y-4)}{2} = \left[\begin{array}{l} y-4 \ (a) \\ -2y \ (б) \end{array}\right.$

(1) $\lg\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = \lg(-x)^{\lg(-xy)}$

$\lg y \cdot \frac{\lg x^2}{2 \lg y} = \lg(-xy) \cdot \lg(-x)$

$4 \lg(-x) = \lg(-xy) \cdot \lg(-x)$

$\lg(-x) = 0$

$x = -1$

$\lg(-xy) = 4$

$-xy = 10^4$

$2^{\log_2 8}$

$2^{\lg 2}$

(a) → (1)

$\left(\frac{(y-4)^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (\cancel{4x})^{\lg y(4-y)} = (4-y)^{\lg y(4-y)} = (4-y)^{\lg y + \lg(4-y)}$

$\left(\frac{(y-4)^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (4-y)^{\lg y} \cdot (4-y)^{\lg(4-y)}$

$\frac{(4-y)^{4 \lg y}}{y^{2 \lg y}} = (4-y)^{\lg y} \cdot (4-y)^{\lg(4-y)}$

$\cancel{(4-y)^{\lg y}}\left(\frac{(4-y)^{3 \lg y}}{y^{2 \lg y}} - (4-y)^{\lg(4-y)}\right) = 0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)