

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р.
Работы без вложенного задания не проверяются.

- ✓ 1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
- ✓ 2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
- ✓ 3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

- ✶ 4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.

- ✓ 5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

- ✓ 6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

✶

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 1. $16825 = 5^4 \cdot 3^3$

$$\begin{array}{r} 625 \\ \times 27 \\ \hline 4375 \\ 1250 \\ \hline 16825 \end{array}$$

~~используем числа, 1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5~~
~~т.е. $3 \cdot 5 = 15$ и 2 члена, 50~~

~~количество перестановок равно $\frac{8!}{3! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{6} = 40 \cdot 2 = 280$~~

~~ответ: 280~~

N 2. $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 2x + \sin 3x$

$$\cos 5x \cdot \cos 2x - \sin 5x \cdot \sin 2x + \cos 5x \cdot \cos 2x + \sin 5x \cdot \sin 2x -$$

$$- \sqrt{2} \cos^2 5x + \sqrt{2} \sin^2 5x = \sin 5x \cdot \cos 2x + \cos 5x \cdot \sin 2x +$$

$$+ \cos 5x \cdot \sin 2x - \sin 2x \cdot \cos 5x$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x - \sqrt{2} \cos^2 5x + \sqrt{2} \sin^2 5x = 2 \sin 5x \cdot \cos 2x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 5x = \sin 5x & \cos 5x \neq 0, \text{ не решение} \\ 2 \cos 2x = \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 5x = 1 \\ \cos 2x = \cos 5x \cdot \cos 45^\circ + \sin 5x \cdot \sin 45^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 5x = 1 \\ \cos 2x = \cos 5x \cdot \cos 45^\circ + \sin 5x \cdot \sin 45^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 5x = 1 \\ \cos 2x = \cos 5x \cdot \cos 45^\circ + \sin 5x \cdot \sin 45^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 5x = 1 \\ \cos 2x = \cos 5x \cdot \cos 45^\circ + \sin 5x \cdot \sin 45^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq \frac{\pi}{5} \text{ так как } 5x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 2x = 5x - \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 2x = -5x + \frac{\pi}{4} + 2\pi p, p \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq \frac{\pi}{5} \text{ так как } 5x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 2x = 5x - \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 2x = -5x + \frac{\pi}{4} + 2\pi p, p \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq \frac{\pi}{5} \text{ так как } 5x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 2x = 5x - \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 2x = -5x + \frac{\pi}{4} + 2\pi p, p \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5} k \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3} \pi n \\ x = \frac{\pi}{28} + \frac{2}{7} \pi p \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5} k \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3} \pi n \\ x = \frac{\pi}{28} + \frac{2}{7} \pi p \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5} k \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3} \pi n \\ x = \frac{\pi}{28} + \frac{2}{7} \pi p \end{cases}$$

$$N3 \quad \begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases}$$

$$OДЗ: y > 0 \Rightarrow y > 0 \\ -xy > 0 \quad x < 0$$

Введем $z = -x$

$$\begin{cases} z^{4\lg y} = z^{\lg z} \cdot z^{\lg y} \cdot y^{2\lg y} & (1) \\ 2y^2 + zy - z^2 + 4z - 8y = 0 & (2) \end{cases}$$

$$1) \quad \begin{aligned} z^{4\lg y} &= 10 \cdot z^{\lg y} \cdot 10^2 \\ z^{3\lg y} &= 10^3 \quad z^{\lg y} = 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3\lg y &= \lg 10^3 \Rightarrow z = y \\ \lg y &= \lg z \end{aligned}$$

$$2) \quad \begin{cases} z = y \\ 2y^2 + y^2 - y^2 + 4y - 8y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -x \\ 2y^2 - 4y = 0 \end{cases}$$

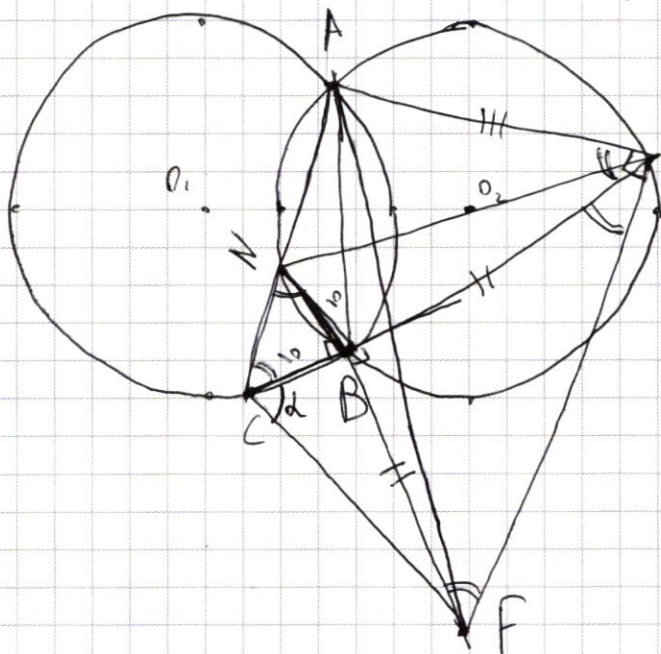
$$\begin{cases} y(y-2) = 0 \\ y = -x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ x = -2 \\ y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ не ую. ОДЗ}$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.



т.к. радиусы окр. равны,
то хорды равных углов
равны, как и отрезки
их соединяющие и
взаимно перпендикулярны.

1) $\angle ACB = \angle ADB$ т.к.
опираются на AB , а т.к.
 $\angle DAC = 90^\circ$, то $AC = AD$;

$\angle ADB = 90^\circ$
2) $BD = BF$; $\angle DBF = 90^\circ \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle BDF = 45^\circ \Rightarrow \angle ADF = 90^\circ$

3) $DO_2 \perp \omega_2 = N \Rightarrow DN$ - диаметр
 $\angle DAN = 90^\circ \Rightarrow N \in AC$

4) т.к. DN - диаметр, то $\angle DBN = 90^\circ \Rightarrow N \in FB$ (прямой)

5) $\angle NAB = \angle CAB \Rightarrow NB = CB$ как стягивающиеся равные
хорды в равных окружностях.

6) $NB = CB$
 $\angle CBF = \angle NBF = 90^\circ$
 $BD = BF$
 $\Rightarrow \triangle NBD = \triangle CBF \Rightarrow CF = ND = 2R_2 = 26$
Ответ: $CF = 26$

7) $BC = 10$
 $\angle NCB = \frac{\pi}{4}$, т.к. $\triangle CNB$ - прямоугольный.

$$S_{ACF} = \frac{1}{2} AC \cdot CF \cdot \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$AC = AD = \sin 45^\circ \cdot CD =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (CB + BD)$$

$$S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (CB + BD) \cdot 26 \cdot \left(\sin \alpha \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos \alpha \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{13}{2} (CB + BD) (\sin \alpha + \cos \alpha)$$

$$BF = BD = \sqrt{CF^2 - CB^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24$$

$$S_{\triangle ACF} = \frac{13}{2} (10 + 24) \left(\frac{10}{26} + \frac{24}{26}\right) = \frac{13}{2} \cdot 34 \cdot \left(\frac{34}{26}\right) = \frac{34^2}{4} = 12^2 + 289$$

Ответ: а) $CF = 26$ б) $S_{\triangle ACF} = 289$

$$N5 \begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 & ① \\ (|x|-6)^2 + (|y|-3)^2 = 9 & ② \end{cases}$$

2) это 4 окружности с радиусами 3 и центрами в $(6; 8); (-6; 8); (6; -8); (-6; -8)$

1) линейный пер. перекосящий биссектрисы $|x-y| + |x+y| = 12$
на бисс. отр. вдоль Ox

Исследуем уравнение $|x-y| + |x+y| = 12$

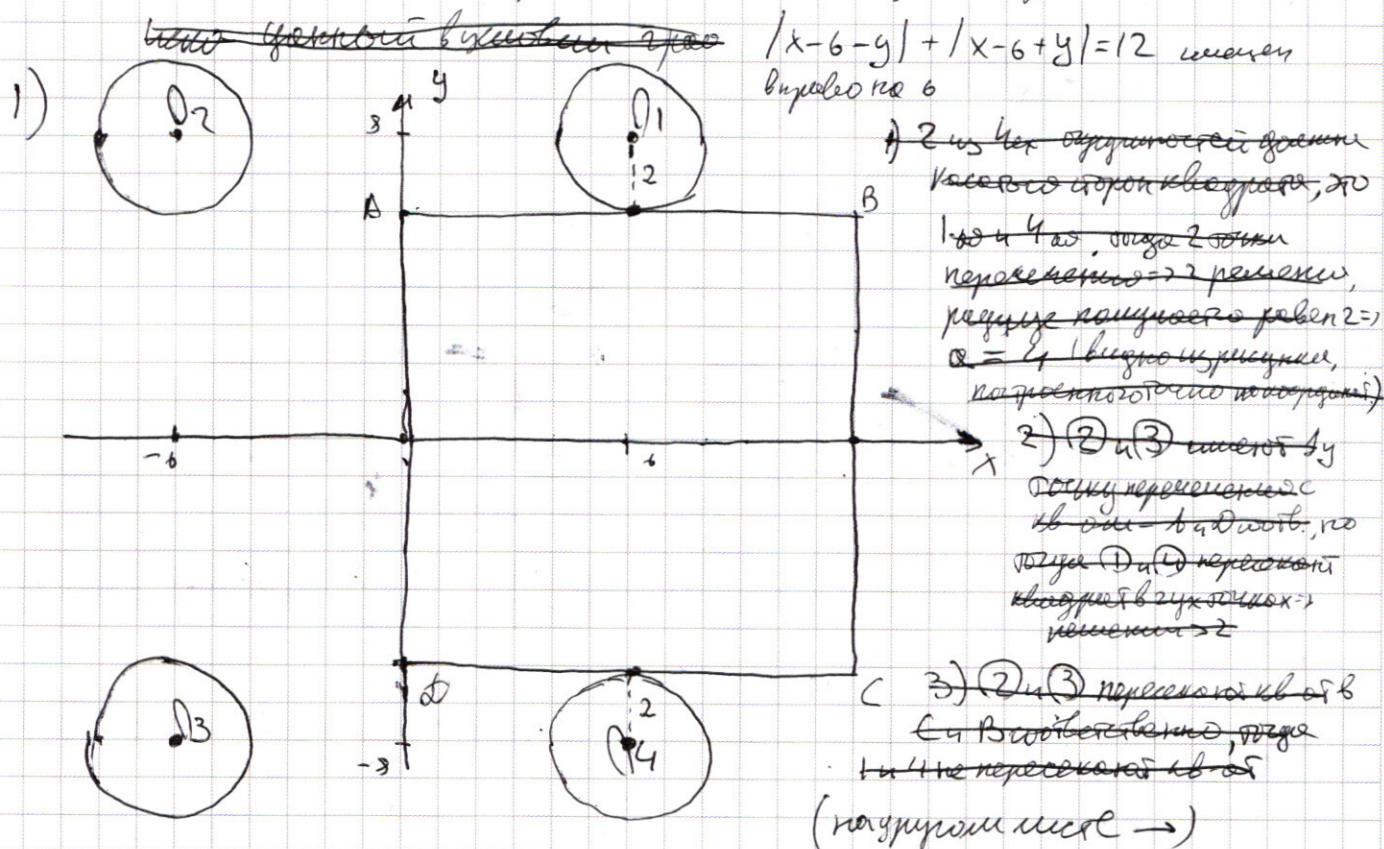
при $\begin{cases} x \geq y \\ x \geq -y \end{cases} \quad x-y+x+y=12 \Rightarrow 2x=12 \Rightarrow x=6 \Rightarrow y \in [6; 6]$

при $\begin{cases} x \leq y \\ x \geq -y \end{cases} \quad y-x+x+y=12 \Rightarrow y=6 \Rightarrow \begin{cases} x \leq 6 \\ x \geq -6 \end{cases}$

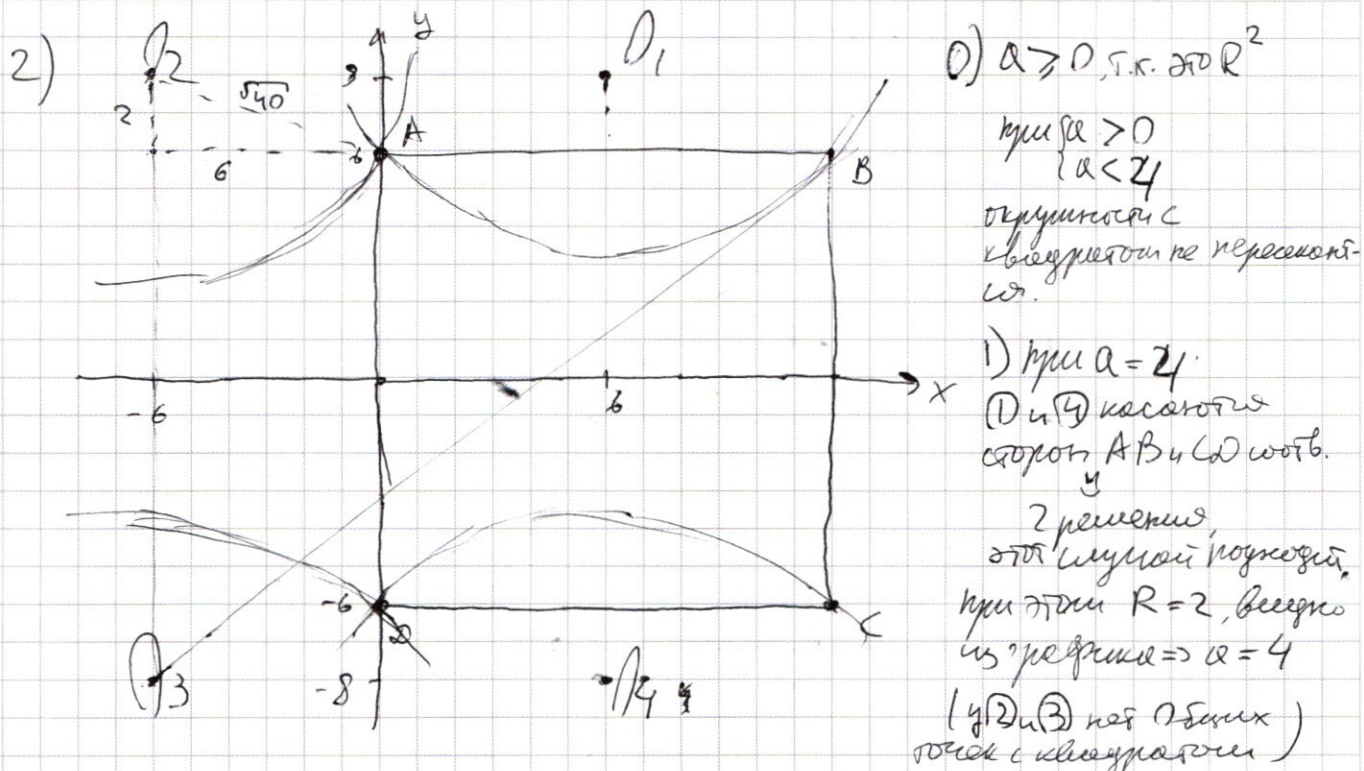
при $\begin{cases} x \leq y \\ x \leq -y \end{cases} \quad y-x+y-x=12 \Rightarrow x=-6 \Rightarrow y \in [-6; 6]$

при $\begin{cases} x \geq y \\ x \leq -y \end{cases} \quad x-y-x-y=12 \Rightarrow y=-6 \Rightarrow x \in [-6; 6]$

это квадрат с центром в $(0; 0)$, стороной в 12
параллельные / перпендикулярные Ox и Oy



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



- 2) При $a > 4$
 $a < 40$ D1 и D2 имеют по 2 точки с квадратом, в случае
4 -го не подходит
- При $a = 40$ появляется первая точка касания D2 и D3 с
квадратом, но D1 и D2 уже имеют их по 2 касания,
всего 6 точек, - не подходит

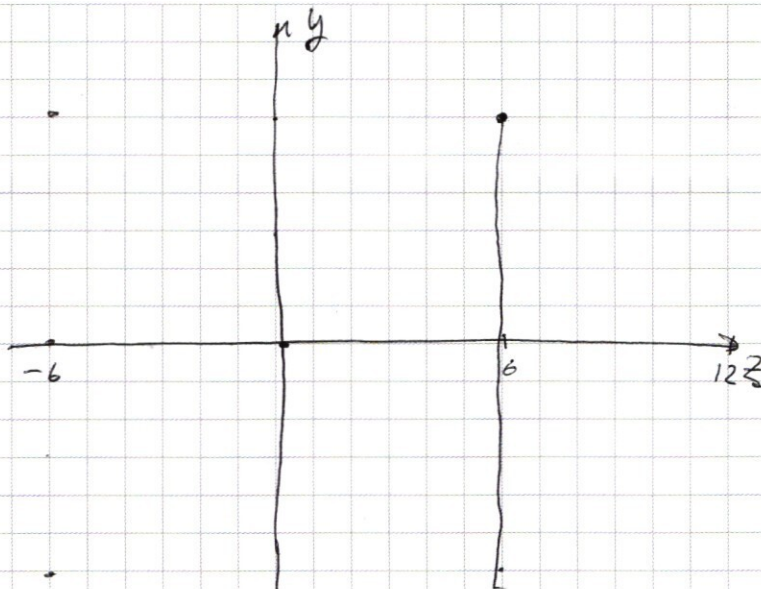
- 3) Продолжим увеличивать a , пока D2 и D3 не пересекут C и B
соответственно, в этот момент 2 общие точки у них, а
D1 и D2 уже будут содержать квадрат внутри себя и не будут
иметь своих общих точек, до этого как минимум
D2 и D3 будут иметь по 2 общие точки, но в случае 4 и больше 2-х.
Возьмем $C \in \omega_3$, $C \in \omega_2$ - подходит (при этом не боимся
сторонки)

- 4) при дальнейшем увеличении радиусов окружностей
квадрат будет лежать внутри этих окружностей и
общих точек будет 0

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$|z-y| + |z+y| = 12$$

при $z < -6$



$$2x = 5x - \frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

$$3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi k$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \pi k$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{8} - \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) =$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\sin(5x - 2x) =$$

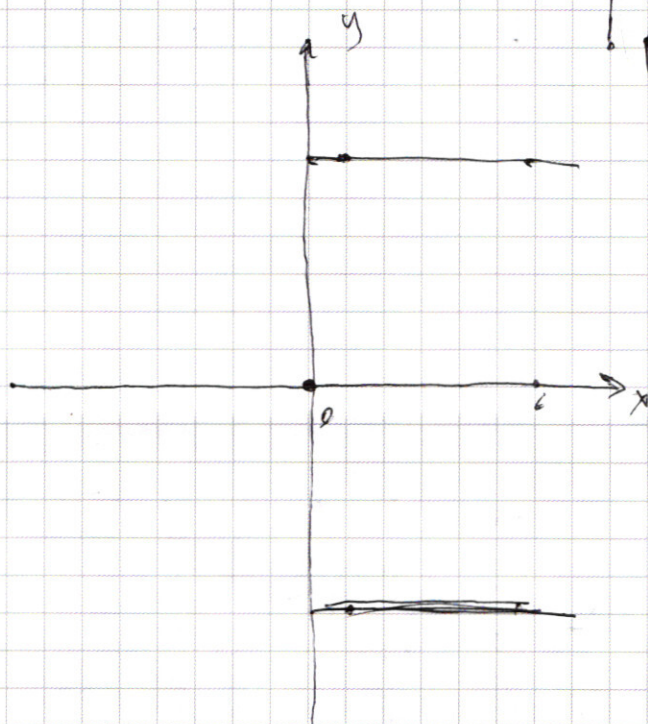
$$\sin 5x \cdot \cos 2x - \cos 5x \cdot \sin 2x$$

$$\begin{cases} |(x-6)-y| + |(x-6)+y| = 12 \\ ((x-6)^2 + (y-8)^2 = a \end{cases}$$

$$z = x-6 \quad \text{и} \quad (x-6)^2 + y^2 + 2|(x-6)^2 - y^2| = 144$$

$$|x-y| + |x+y| = 12$$

$$\begin{cases} |-3-6| + |y-6| = 12 \\ |-5-6| + |-5+y| = 12 \end{cases}$$



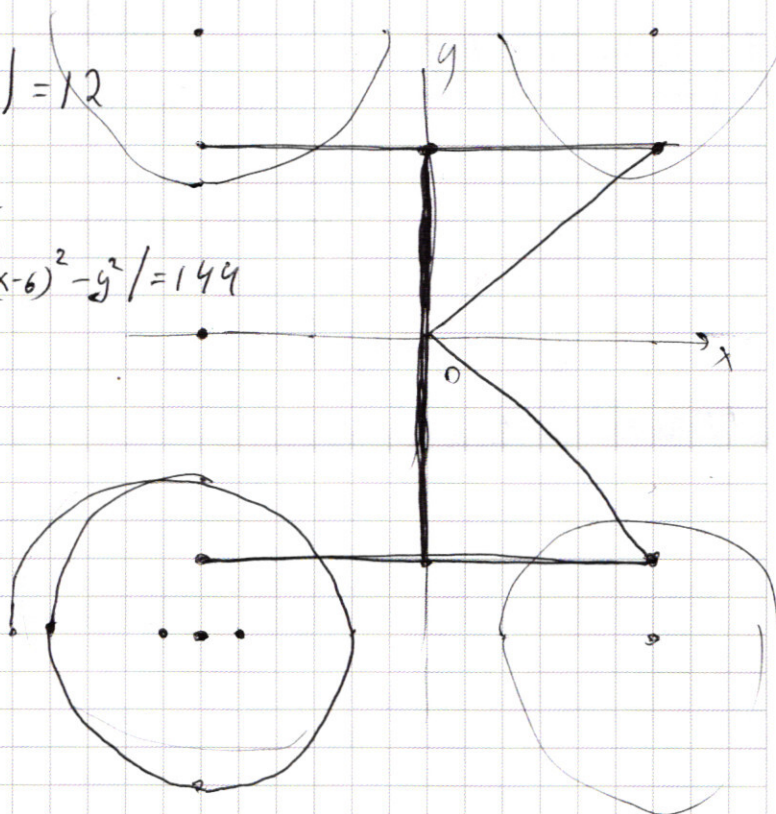
$$x-y \rightarrow |x-y| + |x+y| = 12$$

$$(x-y)^2 + (x+y)^2 + 2|x^2 - y^2| = 144$$

$$2x^2 + 2y^2 + 2|x^2 - y^2| = 144$$

$$x^2 + y^2 + |x^2 - y^2| = 72$$

$$x^2 + y^2 - 2z =$$



$$|y-(x-6)| + |y+(x-6)| = 12$$

$$x=1: |y+5| + |y-5| = 12$$

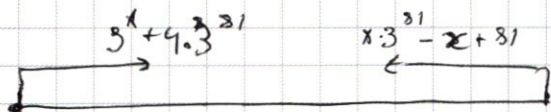
$$x=2: |y+4| + |y-4| = 12$$

$$x=0: |y+6| + |y-6| = 12$$

$$|y-1| + |y+1| = 12$$

$$(y-1)^2 + (y+1)^2 + |y^2 - 1| = 144$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



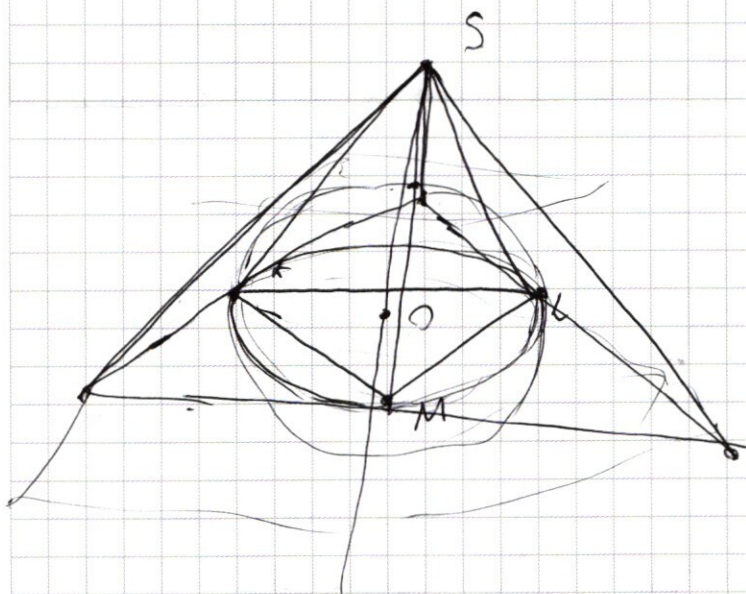
$$3^x + 4 \cdot 3^{81} < 85 + 3^{81} \cdot x - x$$

$$3^{x+1} / (x-4) - x + 35 - 3^x > 0$$

$$3^{31}(x-4) - (x-\frac{4}{3}) + 81 - 3^x > 0$$

$$(3^{21}-1)(x-4) + 81-3^x > 0$$

$$(3^{81} - 1)(x - 4) > 3^x - 81$$



$$\begin{array}{r} 822 \\ \times 15 \\ \hline 4110 \\ 8220 \\ \hline 12330 \end{array}$$

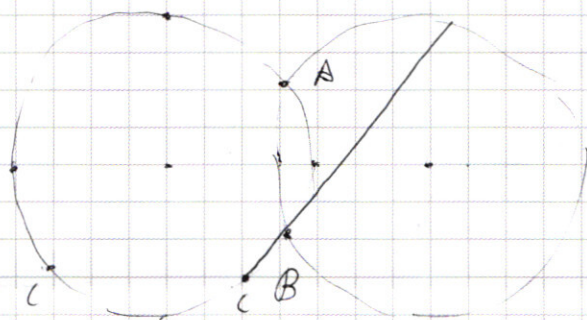
$$\begin{array}{r} 95 \\ \underline{84} \\ 11 \\ 95 \\ \underline{42} \\ 53 \\ 95 \\ \underline{25} \\ 70 \\ 95 \\ \underline{28} \\ 67 \end{array}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \cos \theta + \frac{2}{3} \frac{h}{m} \sin \theta = \left(\frac{h}{m} + p \right) \sin \theta$$

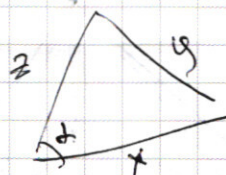
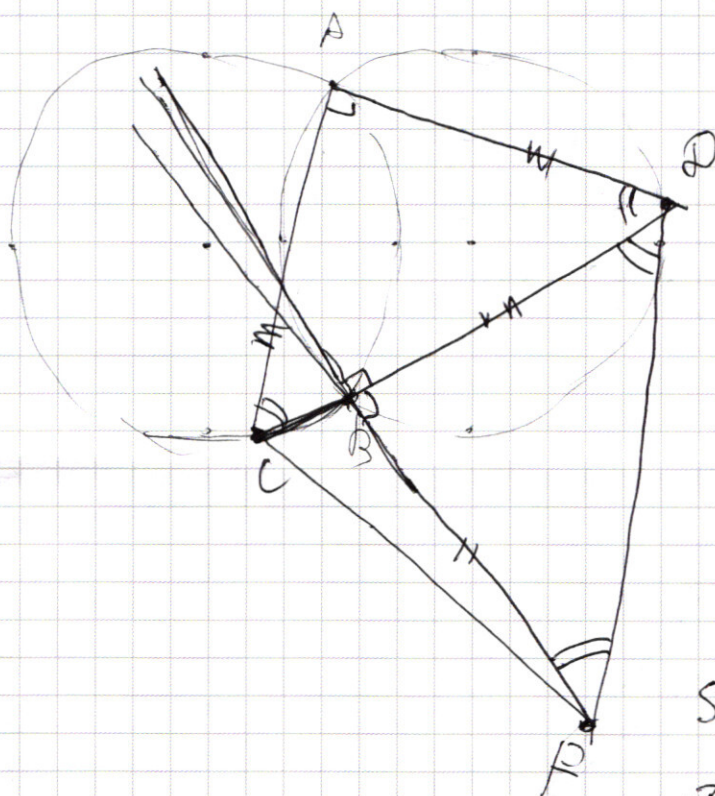
$$= \frac{13\sqrt{2}}{2} (13c + 13d) \cdot \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$S = AC \cdot CF \cdot \frac{1}{2} \sin B = \frac{5}{2} (BC + BD) \cdot 26 \cdot \sin B =$$

$$A \cdot C = A \cdot D = \frac{2}{2} = 1 \quad (C \cdot B + B \cdot D)$$



$$AB = \sqrt{2} \cdot 13$$

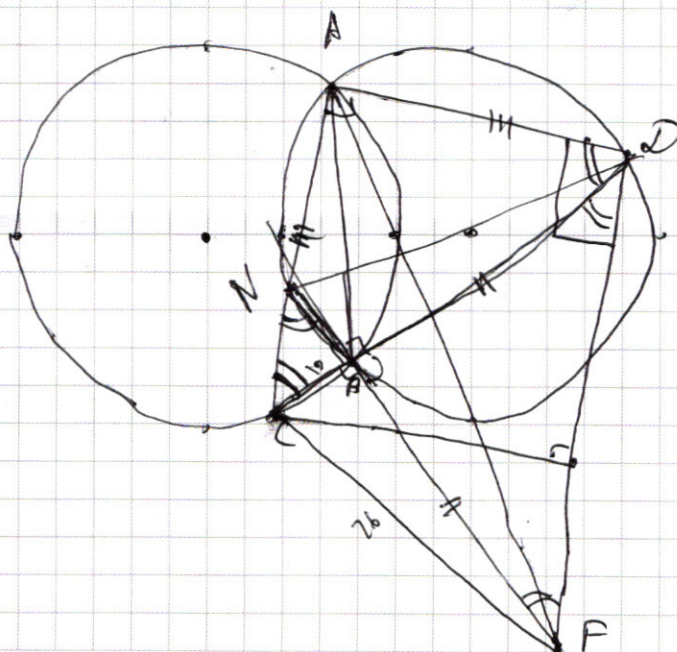


$$S = \frac{1}{2} x z \sin \alpha$$

$$x^2 = y^2 + z^2 - 2 y z \cos \alpha$$

$$\begin{cases} y^2 = x^2 + z^2 - 2 x z \cos \alpha \\ S = \frac{1}{2} x z \sin \alpha \end{cases}$$

$$S^2 = \frac{1}{4} \sin^2 \alpha x^2 z^2$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 16825 \overline{) 25} \\ 150 \\ \hline 182 \\ 125 \\ \hline 125 \\ 125 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$16825 = 5^4 \cdot 3^7$$

4. пятерки
3. тройки
1. единицы

$$13335555$$

$$\frac{8!}{3! \cdot 2! \cdot 4!} = \frac{8!}{3! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{6} = 5 \cdot 7 \cdot 2 = 70$$

W?

$$\cos 2x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 2x + \sin 3x$$

$$\cos(5x+2x) + \cos(5x-2x) - \sqrt{2} \cos 2 \cdot 5x = \sin(2x+5x) + \sin(5x-2x)$$

$$\begin{aligned} & \cos 5x \cdot \cos 2x - \sin 5x \cdot \sin 2x + \cos 5x \cdot \cos 2x + \sin 5x \cdot \sin 2x \\ & - \sqrt{2} \cos^2 5x + \sqrt{2} \sin^2 5x = \sin 2x \cdot \cos 5x + \cos 2x \cdot \sin 5x + \\ & + \sin 5x \cdot \cos 2x - \sin 2x \cdot \cos 5x \end{aligned}$$

$$ac - bd + a$$

$$2 \cos 2x \cdot \cos 5x - \sqrt{2} \cos^2 5x + \sqrt{2} \sin^2 5x = 2 \cos 2x \cdot \sin 5x$$

$$2a \cdot c - \sqrt{2} c^2 + \sqrt{2} b^2 = 2ab$$

$$2ac - 2ab = \sqrt{2} (c^2 - b^2)$$

$$2a(c-b) = \sqrt{2} (c-b)(c+b)$$

$$2a = \sqrt{2} (c+b)$$

$$2 \cos 2x = \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)$$

$$c = b$$

$$2 \cos 2x = \sin 10x + 1$$

$$\cos 2x = \cos 5x \cdot \cos 45^\circ + \sin 5x \cdot \sin 45^\circ$$

$$\cos 2x = \cos(5x - 45^\circ)$$

$$\begin{cases} 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \\ \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\log y} = (-x)^{\log(-xy)} \end{cases}$$

$$x: z = -x$$

$$\begin{cases} 2y^2 + zy - z^2 + 4z - 8y = 0 \\ \left(\frac{z^4}{y^2}\right)^{\log y} = z^{\log(zy)} = z^{\log z} \cdot z^{\log y} = 10z^{\log y} \end{cases}$$

$$z^4 \log y = y^2 \log y \cdot 10z^{\log y}$$

$$z^{3 \log y} = 1000$$

$$z^{3 \lg y} = 10^3$$

$$a^b = c$$

$$2^2 = 4 \quad 2 = \log_2 4$$

$$b = \log_a c$$

$$3 \lg y = \lg_{10^3} z$$

$$\lg y = \lg z \quad y = z \quad y = -x$$

$$z^{3 \lg y} = 10^3$$

$$3 \lg y = \lg_{10^3} z$$

$$3 \lg y = \frac{1}{3} \lg z$$

$$9 \lg y = \lg z$$

$$z^{\lg y} = 0$$

$$z = y$$

$$3^2 = 9$$

$$\log_3 9 = 2$$

$$3 \log$$

$$a^b = c$$

$$\log_a c = b$$

$$3 \log y = \log_2 10^3$$

$$\lg y = \log_2 10$$