

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФ]

Бланк задания должен быть вложен в рз
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$16875 = 5 \cdot 3375 = 5^2 \cdot 675 = 5^3 \cdot 135 = 5^4 \cdot 27 = 5^4 \cdot 3^3$$

~~Вариант, числа состоят из~~

~~4 "пятерки", 3 "тройки" и 1 "единица"~~

$$\begin{array}{r} 625 \\ 27 \\ \hline 19375 \\ 1250 \\ \hline 16875 \end{array}$$

~~Выбираю места для "единицы":~~

$$\begin{array}{c} 8 \\ \circlearrowleft \end{array} \cdot \begin{array}{c} 3 \\ \circlearrowright \end{array} = 8 \cdot \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{8 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{3 \cdot 2} = 280$$

~~Выбираю места для "тройки"~~

~~Вариант 280~~

Варианты состава чисел:

- 3 "тройки" и 1 "единица" ①
- 4 "пятерки" 1 "девятка", 1 "тройка" и 2 "единицы" ②

① Места для "единицы"

$$\begin{array}{c} 8 \\ \circlearrowleft \end{array} \cdot \begin{array}{c} 3 \\ \circlearrowright \end{array} = 8 \cdot \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{8 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{3 \cdot 2} = 280$$

Места для "тройки"

② Методом "ребратки"

$$\textcircled{8} \cdot \textcircled{7} \cdot \textcircled{6^2} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{2! \cdot 4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2} = 40 \cdot 21 = 840$$

метод "ребратки" метод "ребратки"

② ①

$$840 + 280 = \underline{1120}$$

Ответ: 1120.

N2

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\begin{aligned} \cos x + \cos 3x &= 2 \cos \frac{x+3x}{2} \cdot \sin \frac{x-3x}{2} \\ \sin x + \sin 3x &= 2 \sin \frac{x+3x}{2} \cdot \cos \frac{x-3x}{2} \end{aligned}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x - \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x) = 0$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) (2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 5x = \sin 5x & ① \\ \cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 5x + \sin 5x) & ② \end{cases}$$

① $\cos 5x = \sin 5x$ / : $\cos 5x$, т.к. $\cos 5x \neq 0$, т.к.

т.к. $\cos 5x = 0$, то по определению $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$$\sin 5x = 1 \Rightarrow \sin 5x \neq 0 \neq \cos 5x$$

$$\tan 5x = 1$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\underline{x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5} k, k \in \mathbb{Z}.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 (Продолжение)

$$\textcircled{2} \quad \cos 2\varphi = \frac{\delta z}{z} \cos \varphi + \frac{z}{z_0} \sin \varphi$$

$$\cos 2\varphi = \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\cos 2\varphi = \cos \left(\frac{\pi}{4} - \varphi \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\varphi = \frac{\pi}{4} - \varphi + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \\ 2\varphi = \varphi - \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi m, m \in \mathbb{Z} \\ \varphi = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi m, m \in \mathbb{Z} \\ \varphi = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi m, m \in \mathbb{Z} \\ \varphi = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

Ответ:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{3}\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \varphi = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi m, m \in \mathbb{Z} \\ \varphi = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

$$10^3 \left(\frac{b^4}{y^2} \right)^{\lg y} = (-b)^{\lg(-by)} \quad (1)$$

$$2y^2 - by - b^2 - 4b - 8y = 0 \quad (2)$$

$$I. \begin{cases} y > 0 \\ (-by) > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y > 0 \\ b < 0 \end{cases}$$

II.

$$(1) \left(\frac{b^4}{y^2} \right)^{\lg y} = (-b)^{\lg(-by)}$$

$$\frac{b^{4 \cdot \lg y}}{y^{2 \lg y}} = (-b)^{\lg(-by)} \quad \leftarrow \text{т.к. } b < 0$$

$$\frac{10^{4 \lg y \cdot \lg(-b)}}{10^{2 \lg y}} = 10^{\lg(-b) (\lg(-b) + \lg y)}$$

$$10^{4 \lg y \cdot \lg(-b) - 2 \lg^2 y} = 10^{\lg^2(-b) + \lg(-b) \lg y}$$

$$2 \lg^2 y + \lg^2(-b) - 3 \lg y \cdot \lg(-b) = 0$$

$$(\lg y - \lg(-b))^2 + \lg^2 y - 2 \lg y \cdot \lg(-b) = 0$$

$$\lg^2 \frac{y}{-b} + \lg y \cdot \lg \frac{y}{-b} = 0$$

$$\begin{cases} \lg \frac{y}{-b} = 0 \\ \lg \frac{y}{-b} + \lg y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{y}{-b} = 1 \\ \frac{y^2}{-b} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -b \\ y^2 = -b \end{cases}$$

↑
согласно условию $\begin{cases} b < 0 \\ y > 0 \end{cases}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 (Продолжение)

②

$$\begin{cases} y = -x \\ 2x^2 + y^2 - x^2 - 4x + 8y = 0 \\ -y^2 = x \\ 2y^2 + y^3 - y^4 + 4y^2 - 8y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \leftarrow \text{противоречие} \\ y < 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$y^4 - y^3 - 6y^2 + 8y = 0$$

$$y^3 - y^2 - 6y + 8 = 0$$

Заметим, что $y = 2$ - корень

$$\left(\frac{y}{2}\right)^3 - \left(\frac{y}{2}\right)^2 - \frac{6 \cdot y}{2} + 8 = 0$$

Заметим, что $y = 2$ - корень

$$\begin{array}{r} y^3 - y^2 - 6y + 8 \\ \underline{y^3 - 2y^2} \\ -y^2 - 6y + 8 \\ \underline{-y^2 - 2y} \\ -4y + 8 \\ \underline{-4y + 8} \\ 0 \end{array}$$

$$y^2 + y - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$\begin{cases} y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \\ y > 0 \end{cases}$$

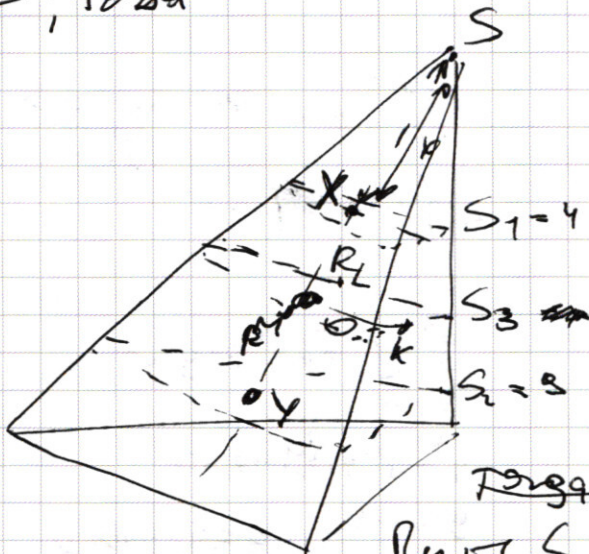
$$\begin{cases} y = \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \\ x = -\left(\frac{17 - 2\sqrt{17}}{4}\right) = \frac{\sqrt{17} - 9}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \\ x = \frac{\sqrt{17} - 9}{2} \\ y = \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \end{cases}$$

Ответ: $(-2; 2); \left(\frac{\sqrt{17} - 9}{2}; \frac{\sqrt{17} - 1}{2}\right)$

№ 8 и

Заметим, что главный сечение и боковое сечение являются проекцией друг друга из точки S , тогда



т.к. сечение отрезается перпендикулярно SO , то расстояние от S до этих сечес. плоскостей будут точки пересечения этих плоскостей с SO . Пусть эти точки будут X и Y , тогда $SO = OY = R$,

тогда из

по теореме $SY = b$, тогда из

получим:

$$\frac{S_1}{S_2} = \sqrt{\frac{S_1}{S_2}} \quad \& \quad \frac{b}{R} = \sqrt{\frac{4}{9}}$$

$$\begin{cases} b = 2R + 4R \\ b = 4R \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \sqrt{\frac{S_1}{S_2}} \Rightarrow S_3 = \frac{4R^2}{4R} \cdot 4 = \frac{25}{4} = 6,25$$

$$\angle KSO = \arctg \frac{R}{SR} = \arctg \frac{1}{5}$$

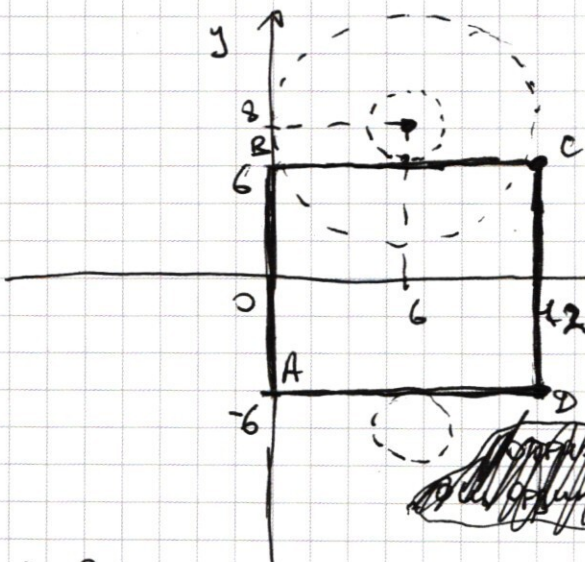
$$\text{Ответ: } S_{\text{сеч}} = 6,25; \quad \angle KSO = \arctg \frac{1}{5}.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 & (1) \\ (|x|-6)^2 + (|y|-3)^2 = a & (2) \end{cases}$$

$$(1) \begin{cases} x \geq 6+y \\ x \geq 6-y \\ \begin{cases} x \geq 6+y \\ x \geq 6-y \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq 6+y \\ x \leq 6-y \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq 6+y \\ x \leq 6-y \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \in [-6; 6] \\ x = 12 \\ \begin{cases} x \in [0; 12] \\ y = -6 \end{cases} \\ \begin{cases} x \in [0; 12] \\ y = 6 \end{cases} \\ \begin{cases} y \in [-6; 6] \\ x = 0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \in [-6; 6] \\ \begin{cases} b = 12 \\ b = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \in [0; 12] \\ y = -6 \\ y = 6 \end{cases} \end{cases}$$



$$(2) (|x|-6)^2 + (|y|-3)^2 = a$$

↑
ур-ие окружности, ограниченной
от оси абсцисс сверху и
от оси ординат справа
сверху
где $\sqrt{a}$ - радиус

↓
(т.к. при $a=0$
 $a>0$ решений ~~нет~~
нет)

1) Рассмотрим случаи, когда окружность касается BC:

$k: 2 \Rightarrow a \rightarrow \sqrt{2}$ нет
при $a < \sqrt{2}$ решений ~~нет~~
при $a = \sqrt{2}$ 2 решения (окружность касается BC
и ограничена от $y=0$ ось
касается A, D)

N5 (Продолжение)

Отражение от $b=0$ мне не интересно, т.к. фигура

(1) в ~~левой~~ ~~части~~ отрицательной полуплоскости нет

Т.к. фигура (1) симметрична относительно $y=0$, то мне нужно задать, того, чтобы в области $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ было ровно одно касание фигур (1) и (2):

Т.к. центр окружности расположен равноудаленно от прямых AB и CD , то если окружность пересечет AB , то она обязательно пересечет также и $CD \Rightarrow$

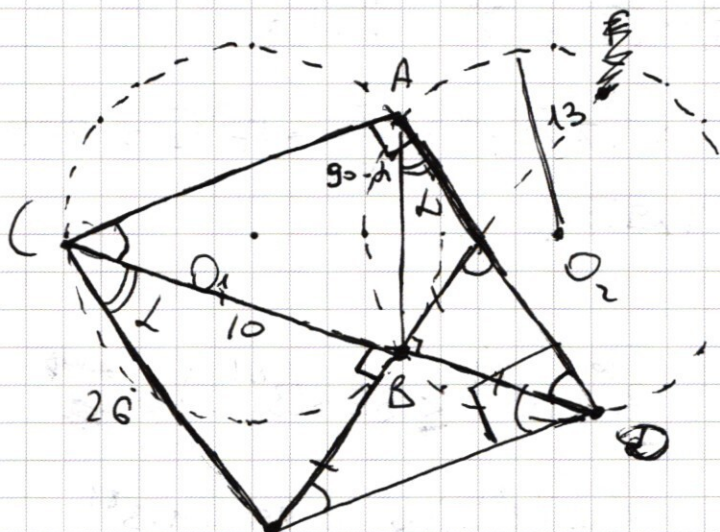
$\Rightarrow$ 2 решения в области $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ + ещё 2 решения в области $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$ так как $b \neq 0 \Rightarrow$ система имеет ровно 2 решения только при $a = \sqrt{2}$.

Ответ: при $a = \sqrt{2}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6
а)

CF - ?



$\angle ACD = \angle ADC = 45^\circ$
(т.к. Опираются на равн-
осну и ту же дугу AB,
двух точек,
которые лежат на
двух равных окружностях)
 $\angle BFD = \angle BDF = 45^\circ$
(т.к. BF = DF $\Rightarrow \triangle FBD$ - равно-
бедренный)

Пусть $\angle BAD = \alpha$, тогда $\angle CAB = 50^\circ - \alpha$, тогда :

$$BF = 2R \sin \alpha \quad (\text{По Теореме синусов})$$

$$BC = 2R \cdot \sin(50^\circ - \alpha) = 2R \cdot \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad \text{По Теореме косинусов в } \triangle CBF:$$

$$CF^2 = CB^2 + BF^2 = (2R)^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = (2R)^2$$

$$CF = 2R = 26$$

б) $BC = 2R \cos \alpha$

$$\cos \alpha = \frac{BC}{2R} = \frac{26}{52} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{16 \cdot 36} = \frac{24}{52} = \frac{12}{26} = \frac{6}{13}$$

$$BF = BF = 2R \sin \alpha = 26 \cdot \frac{12}{26} = 12$$

~~В треугольнике~~

$$\sin \angle BCF = \frac{12}{26} = \frac{6}{13} = \sin \alpha \Rightarrow \angle BCF = \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle ACF = 45^\circ + \alpha$$

$$\angle CBA = 130^\circ - 45^\circ - (50^\circ - \alpha) = 45^\circ + \alpha \Rightarrow \angle ACF = \angle CBA = 45^\circ + \alpha$$

По Теореме синусов

N6 (Прогендер)

$$S_{ACF} = \frac{1}{2} AC \cdot CF \cdot \sin \angle ACF = \frac{1}{2} AC \cdot CF \cdot \sin(45^\circ + \alpha)$$

$$AC = \frac{\sqrt{2}}{2} (KB + BP) = \frac{\sqrt{2}}{2} 34 = 17\sqrt{2}$$

$$S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot 17\sqrt{2} \cdot 26 \cdot (\sin 45^\circ \cos \alpha + \sin \alpha \cos 45^\circ) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 17\sqrt{2} \cdot 26 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{10}{26} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{12}{13} \right) =$$

$$= 17\sqrt{2} \cdot 26 \left(\frac{5}{26} + \frac{12}{26} \right) = 17\sqrt{2} \cdot 26 \cdot \frac{17}{26} = 17^2 \sqrt{2} = 289\sqrt{2}$$

Ответ: а) $26\sqrt{2}$; б) $289\sqrt{2}$.

N7

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{81} \leq 85 + (3^{81} - 1)x$$

$$3^x - (3^{81} - 1)x < 85 - 4 \cdot 3^{81}$$

$$f(x) = 3^x - (3^{81} - 1)x$$

$$f'(x) = 3^x - 3^{81} + 1 = 0$$

$$3^x = 3^{81} - 1$$

$$x = \log_3(3^{81} - 1)$$

$$80 < \log_3(3^{81} - 1) < 81$$

$$f(\log_3(3^{81} - 1)) = (3^{81} - 1)(1 - \log_3(3^{81} - 1)) = (3^{81} - 1) \cdot \log_3\left(\frac{1}{3^{81} - 1}\right)$$

$$= (3^{81} - 1) \log_3\left(\frac{1}{3^{81} - 1}\right)$$

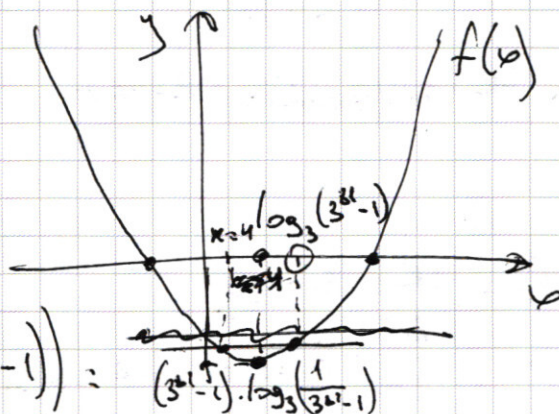
$f(0) = 1 \Rightarrow$ при x - удовлетворяет условиям задачи $f(x) \in \mathbb{Z}$.

$$f(x) = 85 - 4 \cdot 3^{81} < 1$$

~~не подходит~~

$$3^x - (3^{81} - 1)x = 85 - 4 \cdot 3^{81} \approx 81 - 4(3^{81} - 1)$$

небольшая поправка $x = 4$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

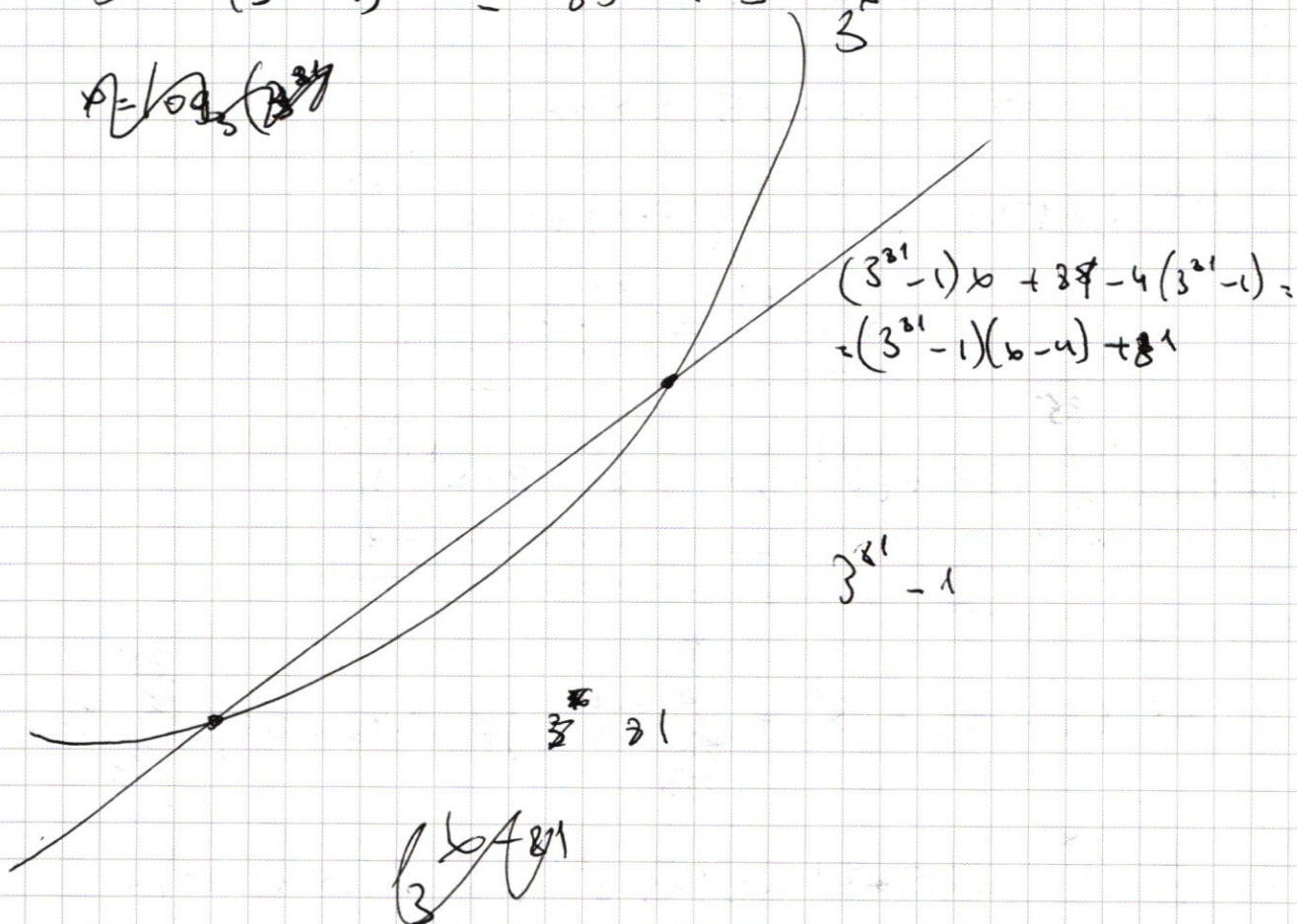
$$3^x + (4-x)3^{x1} - 85 \cdot x \leq 0$$

$$3^x \cdot 4 - 3^{x1}$$

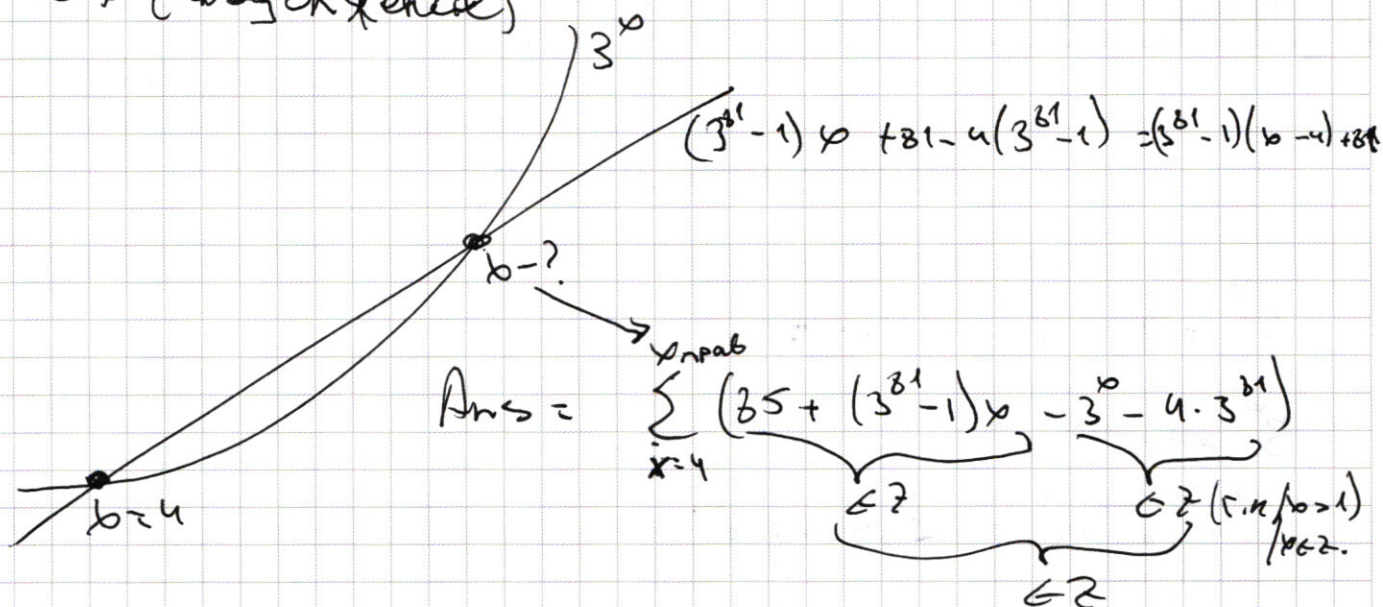
$$3^x - (3^{x1} - 4) \cdot x \leq 85 - 4 \cdot 3^{x1}$$

$$3^x - (3^{x1} - 4) \cdot x = 85 - 4 \cdot 3^{x1}$$

$$x = 109 \cdot 3^{x1}$$



N7 (Рассуждение)



$$(3^{81} - 1)(x - 4) + 81 = 3^x$$

~~при $x = 85$~~ $x = 85 = x_{\text{кас}}$

~~3^{81}~~ $81 = (3^{81} - 1)(85 - 4) + 81 = 3^{85}$

$$81 \cdot 3^{81} = 3^{81} \cdot 81$$

~~Ответ~~ $\sum_{x=4}^{85} (85 + (3^{81} - 1)x - 3^x - 4 \cdot 3^{81}) =$

~~$= 85 \cdot 81 - 81 \cdot 4 \cdot 3^{81} + \sum_{x=4}^{85} (3^{81} - 1)(85 - 4) - \sum_{x=4}^{85} 3^x$~~

~~$= \sum_{x=4}^{85} 3^x = 85 \cdot 81 - 81 \cdot 4 \cdot 3^{81} + (3^{81} - 1)(85 - 4) -$~~

~~$(3^{86} - 3^4 - 3^3 - 3^2 - 3^1 - 3^0)$~~

~~Ответ: $\sum_{x=4}^{85} (85 + (3^{81} - 1)x - 3^x - 4 \cdot 3^{81})$~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin 30^\circ + \sin 30^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\sin \frac{2+\sqrt{3}}{2} \cdot \cos \frac{2-\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos^2 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

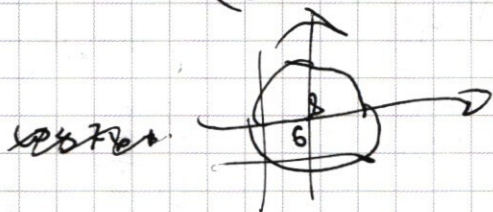
$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$2\cos 5\alpha \cdot \cos 2\alpha - \sqrt{2} \cos 10\alpha = 2\sin 5\alpha \cos 2\alpha$$

$$2\cos 5\alpha \cos 2\alpha - \sqrt{2} \cos^2 5\alpha + \sqrt{2} \sin^2 5\alpha = 2\sin 5\alpha \cos 2\alpha$$

$$\cos 5\alpha (2\cos 2\alpha - \sqrt{2} \cos 5\alpha) = \sin 5\alpha (2\cos 2\alpha - \sqrt{2} \sin 5\alpha)$$

$$\sqrt{2} \cos 2\alpha (\cos 5\alpha - \sin 5\alpha) = \sqrt{2} \cos 10\alpha =$$



$$= 2\cos^2 5\alpha - 1$$

$$2\cos 5\alpha \cos 2\alpha - \sqrt{2} \cos^2 5\alpha = 2\sin 5\alpha \cos 2\alpha - \sqrt{2} \sin^2 5\alpha$$

$$\cos 5\alpha (2\cos 2\alpha - \sqrt{2} \cos 5\alpha) = \sin 5\alpha (2\cos 2\alpha - \sqrt{2} \sin 5\alpha)$$

$$\frac{\sqrt{2} \cos 2\alpha - \cos 5\alpha}{\sqrt{2} \cos 2\alpha - \sin 5\alpha} = 1$$

$$\sqrt{2} \cos 2\alpha (\cos 5\alpha - \sin 5\alpha) + (\sin^2 5\alpha - \cos^2 5\alpha) = 0$$

$$(\cos 5\alpha - \sin 5\alpha) (\sqrt{2} \cos 2\alpha - \cos 5\alpha - \sin 5\alpha) = 0$$

$$4(b+2r)k = 9 \quad \text{или} \quad V$$

$$4bk + 2kr = 9$$

$$kr = 9 - 4bk$$

$$4bk + 2(9 - 4bk) = 9 \quad \text{или} \quad \cos 50^\circ = \arcsin \frac{1}{5}$$

