

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИД

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5)

1) $\angle ACO = \angle AFO$, т.к. в ω_1 и ω_2 AB дуги, а дуги $\angle$ опираются на него

2) По условию знаем, что $\angle CAF = 90^\circ$
 $\angle ACO = \angle AFO = 45^\circ$

3) Уже знаем, что $CF = 26$

а) $BF = \sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{576} = 24$

$AC = CO \cdot \sin 45 = (CB + BO) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 17\sqrt{2} = 17\sqrt{2}$

$\cos \alpha = \frac{CA}{CF} = \frac{10}{26} = \frac{5}{13}$ $\sin \alpha = \frac{BF}{CF} = \frac{24}{26} = \frac{12}{13}$

$S_{ACF} = \frac{1}{2} AC \cdot CF \sin(45 + \alpha) = \frac{1}{2} AC \cdot CF (\sin 45 \cos \alpha + \cos 45 \sin \alpha)$
 $= \frac{1}{2} AC \cdot CF (\sin 45 \cos \alpha + \cos 45 \sin \alpha)$
 $= 13 \cdot \frac{34}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{12}{13} + \frac{5}{13} \right) = 13 \cdot 17 \cdot \frac{17}{13} = 17^2 = 289$

б) $AC = 17\sqrt{2}$
 $2x^2 = 34^2$
 $x = \frac{34}{\sqrt{2}}$
 $AC = \frac{34}{\sqrt{2}}$

$16875 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1$

Существует два набора чисел:

1) $3; 3; 3; 5; 5; 5; 5; 1$

2) $9; 3; 5; 5; 5; 5; 1; 1$

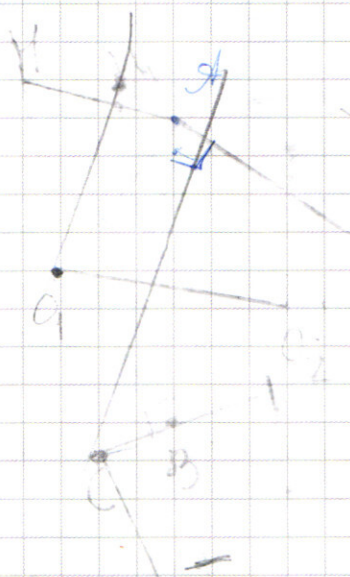
$C_8^3 \cdot C_5^4 \cdot C_1^1 + C_8^1 \cdot C_7^4 \cdot C_6^1 \cdot C_2^2 =$

Ответ: а) 26
 б) 289

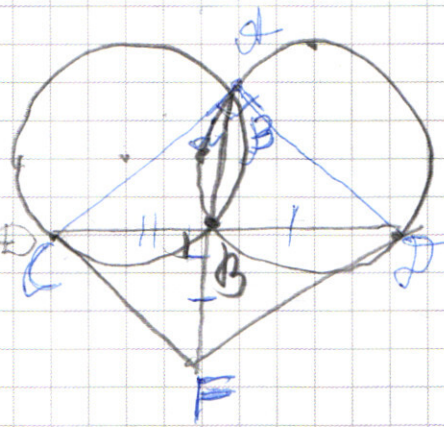
№ 6

Дано:
 $\angle CAD = 90^\circ$
 $R_1 = R_2 = 13$
 $B \in CD$
 $BF = BD$
 $CF = ?$

1) $\angle CBF = 90^\circ$



a)



1) $\angle CAB = \alpha$ $R_1 = R_2 = 13$
 $\angle ADB = \beta$

$$CF^2 = CB^2 + FB^2 = CB^2 + BD^2$$

$$5) CF = \sqrt{CB^2 + BD^2} = \sqrt{676(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)} = 26$$

Ответ 26.

$$2) \frac{CB}{\sin \alpha} = 2R$$

$$CB = 26 \sin \alpha$$

$$3) \frac{BD}{\sin \beta} = 2R \quad \angle ABD = 26 \sin \beta = 26 \sin(90 - \alpha) = 26 \cos \alpha$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\Sigma = 8 \cdot 7 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2!} + 8 \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 15 \cdot 8 \cdot 7 + 8 \cdot 7 \cdot 5 =$$

$$= 840 + 280 = 1120$$

Ответ: 1120.

15

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

I $|x-6-y| + |x-6+y| = 12$

1) $\begin{cases} x-6-y \geq 0 \\ x-6+y \geq 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} y \leq x-6 \\ y \geq 6-x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2x-12 &= 12 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

2) $\begin{cases} x-6-y \geq 0 \\ x-6+y \leq 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} y \leq x-6 \\ y \leq -x+6 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x-6-y &= -x+6-y \\ y &= -6 \end{aligned}$$

3) $\begin{cases} x-6-y \leq 0 \\ x-6+y \geq 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} y \geq x-6 \\ y \geq -x+6 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -x+6 &= y+2-6 \\ y &= 6 \end{aligned}$$

II $(|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a$

1) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Окружность с центром (6; 8)

2) $\begin{cases} y \geq 0 \\ x \leq 0 \end{cases}$

Окружность с центром (-6; -8)

3) $\begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

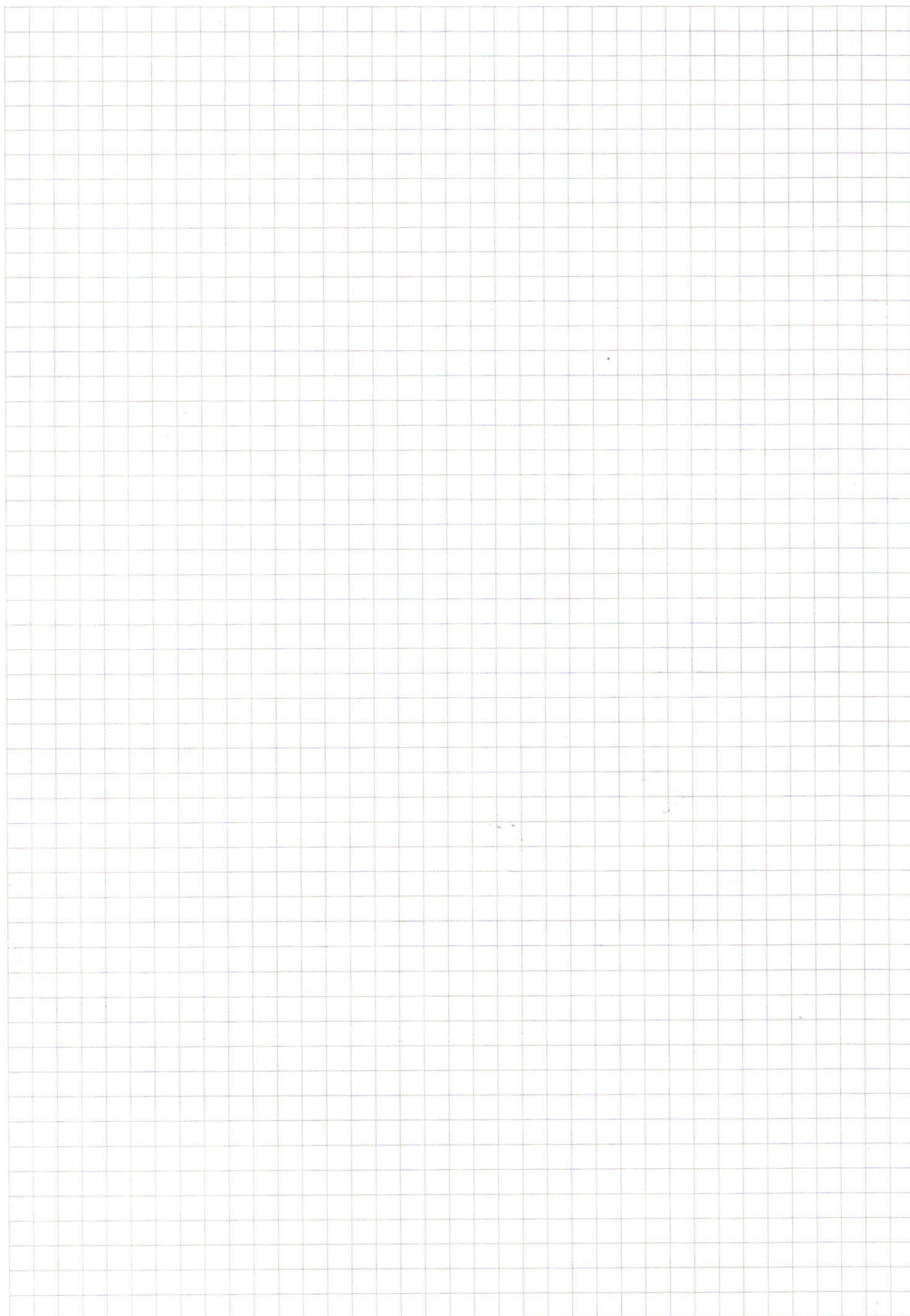
$$\begin{cases} \sin(5x - \frac{\pi}{4}) = 0 \\ \cos(3,5x - \frac{\pi}{8}) = 0 \\ \cos(1,5x - \frac{\pi}{8}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - \frac{\pi}{4} = \pi n \\ 3,5x - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ 1,5x - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi l \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x = \frac{\pi}{4} + \pi n \\ 3,5x = \frac{5\pi}{8} + \pi k \\ 1,5x = \frac{5\pi}{8} + \pi l \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5} \\ x = \frac{5\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7} \\ x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi l}{3} \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5} \\ x = \frac{5\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7} \\ x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi l}{3} \end{cases}$ при $n, k, l \in \mathbb{Z}$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

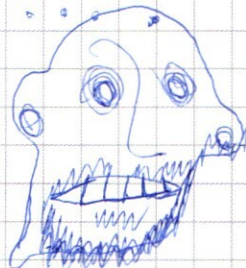
Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 63 \\ 75 \end{array}$$

16875

N/ 33355551
23555511


$$\begin{array}{r} 16875 \overline{) 13} \\ \underline{-15} \\ 18 \\ \underline{-18} \\ 78 \end{array}$$
$$16875 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

305825
16873

$$\frac{6}{L_1 = L_2 = 13}$$
$$\begin{array}{r} 5625 \overline{) 1875} \\ \underline{-3} \\ 26 \\ \underline{-24} \\ 22 \\ \underline{-21} \\ 15 \end{array}$$

CF-1

tell me how baby

$$\begin{array}{r} 1875 \overline{) 3} \\ \underline{18} \\ 7 \\ \underline{6} \\ 15 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 625 \overline{) 121} \\ \underline{12} \\ 5 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 625 \overline{) 5} \\ - 5 \\ \hline 125 \\ - 125 \\ \hline 0 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 625 \\ 27 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 4375 \\ 1350 \\ \hline 4375 \\ 1350 \\ \hline 575 \end{array}$$
$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$$
$$\begin{array}{r} 125 \\ 375 \\ \hline 1125 \\ 375 \\ \hline 16875 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 9 & 3 & 5 & 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r} 135 \\ \times 775 \\ \hline 675 \\ 9450 \\ 100500 \\ \hline 104825 \end{array}$$

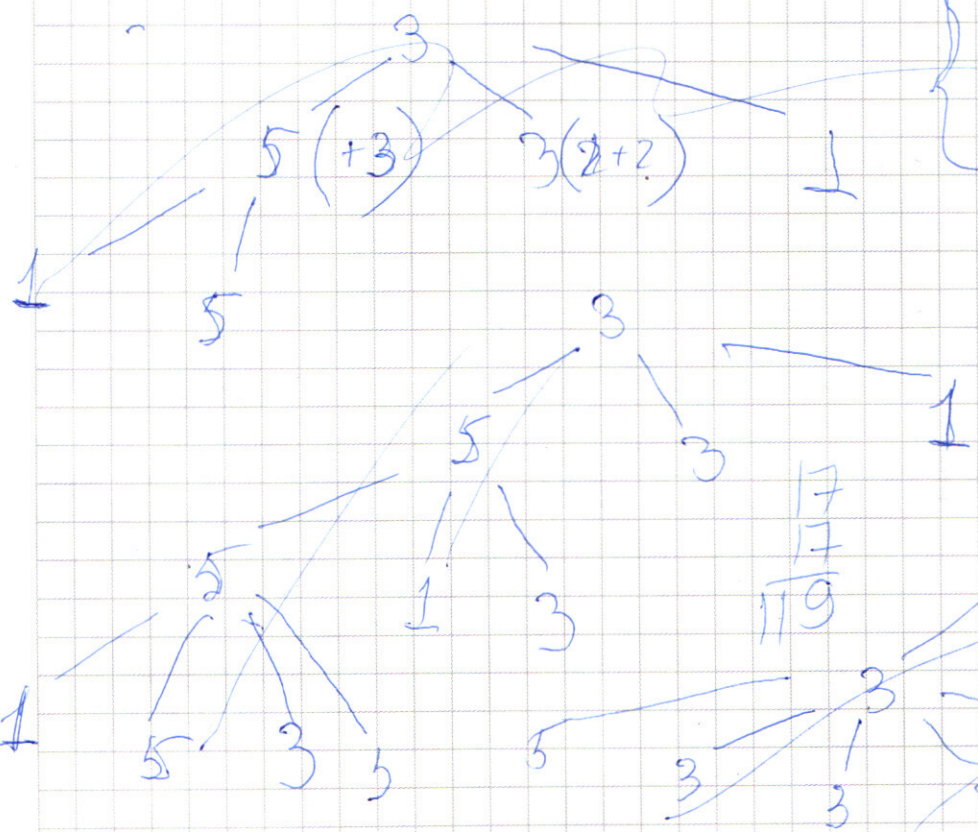
$$\begin{array}{r} 27 \\ 5 \\ \hline 135 \end{array} \quad \begin{array}{r} 135 \\ 5 \\ \hline 875 \end{array} \quad \begin{array}{r} 875 \\ 5 \\ \hline 4385 \end{array}$$

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № ____
(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{aligned} x^3 &> 0 \\ x &< 0 \\ \left(\frac{x}{y^2}\right)^4 &= (-x)^4 (-y)^4 \\ 2y^2 xy - x^2 &= 4x - 8y - 0 \end{aligned}$$

33355551
93555511



$$87 \frac{6.5}{2} \neq 8 \frac{76.5}{2}$$

③③③⑤⑤⑤⑤①

$$D = 4$$

```

graph TD
    A[3] --> B[3]
    A --> C[5]
    B --> D[3]
    B --> E[5]
    C --> F[5]
    C --> G[3]
  
```

Handwritten notes on graph paper:

- Top right: 330
- Center: A large '1' with a vertical line to its left and a diagonal line to its right.
- Bottom left: A large '3'.
- Bottom right: A large '5'.
- Far right: A vertical stack of numbers: 27, 27, 27, 189, 5.

330

$$\begin{array}{r} 27 \\ 27 \\ \hline 189 \\ 5 \end{array}$$

$$4 + 2\frac{3}{2}$$

$$\sqrt{2316} = 2\sqrt{579}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$C_8^3 \cdot C_5^4 \cdot C_1^1 + C_8^1 \cdot C_7^1 \cdot C_6^4 \cdot C_2^2 =$$

$$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + 1 + 8 \cdot 7 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} =$$

$$= 168 + 10 + 1 + 280 = 459$$

$$\cos \alpha = \frac{CB}{CF} = \frac{26}{100} = 0.26$$

$$\sin \alpha = \frac{BF}{CF} = \frac{96}{100} = 0.96$$

$$S_{ACF} = \frac{AC \cdot CF \cdot \sin(45^\circ + \alpha)}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 26 \cdot \sin(45^\circ + \alpha) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 26 \cdot (\sin 45^\circ \cos \alpha + \cos 45^\circ \sin \alpha) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 26 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0.26 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0.96 \right) =$$

$$= 10 \cdot 26 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (0.26 + 0.96) = 136 \sqrt{2} \cdot 1.22 = 156 \sqrt{2}$$

$$34^2 = x^2 + x^2 - 4x \cdot \sin 90^\circ$$

$$1156 = 2x^2 - 4x$$

$$1156 = 2(x^2 - 2x)$$

$$x^2 - 2x - 578 = 0$$

34

$$x^2 + x^2 - 2x^2 \sin 90$$

$$34^2 = 2x^2$$

$$1156 = 2x^2$$

$$578 = x^2$$

$$x = \sqrt{578}$$

$$\frac{34^2}{2} = x^2$$

$$x = \frac{34}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{34}{\sqrt{2}} \cdot 26 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{5}{13} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{12}{13} \right)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{34}{\sqrt{2}} \cdot 26 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{5}{13} + \frac{12}{13} \right) \right) = \frac{17}{13}$$

$$= 17$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ 5 \\ \hline 280 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ 17 \\ 17 \\ 17 \\ 17 \\ \hline 280 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ 56 \\ 90 \\ 75 \\ \hline 840 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) 333 55551
938 55511

12

25

$$\begin{array}{r} 16 \\ 16 \\ \hline 96 \end{array}$$

$\cos 7x + \cos 3x =$
 $\frac{35}{10} = \frac{7}{2}$

$$\begin{array}{r} 26 \\ 26 \\ \hline 156 \\ 52 \\ \hline 676 \end{array}$$

$$\frac{35}{10} = \frac{7}{2}$$

$$\frac{35}{10} = \frac{7}{2}$$

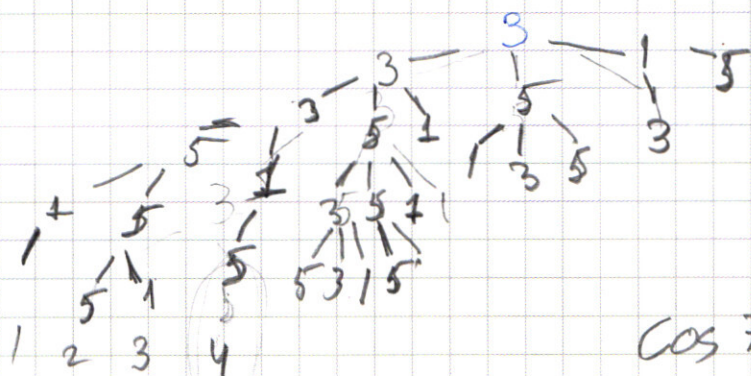
$$x = \frac{5.2}{8.7}$$

$$\frac{5}{28} \sqrt{8}$$

$$\frac{17}{13} \cdot 17 \cdot 13$$

$\begin{matrix} 3 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 & 1 \\ 9 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 & 1 & 1 \end{matrix}$

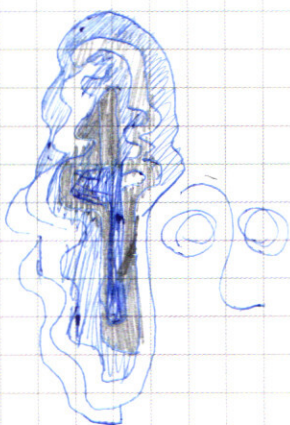
dont shed
 no test
 no woman
 no cry



$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x =$$

$$= \sin 7x + \sin 3x$$

$$\begin{cases} y \geq 3x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - x)x \end{cases}$$



$$\left\{ \begin{matrix} \left(\frac{x}{y} \right)^4 = \frac{xy}{-2} \\ \left(\frac{y}{x} \right)^4 = \frac{xy}{-2} \end{matrix} \right.$$

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{y} \right)^4 = \frac{xy}{-2} \\ \left(\frac{y}{x} \right)^4 = \frac{xy}{-2} \end{cases}$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4xy = 0$$

