

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР $\frac{\quad}{3}$

Бланк задания должен быть вложен в работу
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. Разложим число 16875 на множители:

$$16875 = 5^4 \cdot 3^3 \text{ (вычисления проводятся как черновики)} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ все восьмизначные числа, удовлет. ~~16875~~
-воряющие условию, содержат 4 цифры ⁵ ~~16875~~ и ³
одну цифру, ¹ $9 \in \{1, 3\}$, или 4 цифры ~~16875~~ и 3 цифры ³ 3 .
(остальные - единицы).

①. Кол-во способов поставить 4, 5' на 8 позиций:

C_8^4 . Кол-во способов поставить 9' на ост. позициях:

4, 3' : 3. Единицы расставляются ед. способом на оставшиеся места. Тогда кол-во чисел такого

$$\text{вида: } C_8^4 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{8! \cdot 4 \cdot 3}{4! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} =$$

$$= 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$$

② Аналогично: кол-во способов для 5' : C_8^4 . Кол-во
способов для 3' : C_4^3 . Всего: $C_8^4 \cdot C_4^3 = \frac{8! \cdot 4!}{4! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 1!} =$

$$= \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 5 \cdot 7 \cdot 8$$

$$\text{Всего: } 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 + 5 \cdot 7 \cdot 8 = 35 \cdot (24 + 8) = 32 \cdot 35 = 1120$$

Ответ: 1120

$$2. \cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$(\cos 7x - \sin 7x) + (\cos 3x - \sin 3x) = \sqrt{2} \cos 10x$$

По формуле год. аргумента:

$$\cos\left(7x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 10x$$

$$\sin 7x + \sin 3x = -\cos 10x$$

$$\cancel{\cos} 2 \sin 5x \cos 2x = \cancel{\cos} 2 \sin^2 5x - 1$$

$$\cancel{2} \sin 1x$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3. \begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{1/5} = (-x)^{1/5} \cdot (-y) \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases}$$

ОДЗ: $x < 0, y > 0$

$$\begin{cases} \left(\frac{x^2}{y}\right)^{2/5} = (-x)^{(1/5(-1)) + 1/5} & (1) \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 & (2) \end{cases}$$

Решим ур-е (1):

Обозначим $a = \lg(-x) < 0$, $b = \lg y > 0$. Тогда

$$\frac{(-x)^{4/5}}{y^{2/5}} = (-x)^{(1/5(-1))} \cdot (-x)^{1/5}$$

$$\frac{10^{4ab}}{10^{2b^2}} = 10^{a^2} \cdot 10^{ab}$$

$$10^{4ab} = 10^{a^2 + ab + 2b^2}$$

$$4ab = a^2 + ab + 2b^2$$

$$a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$$

Решим как квадратное ур-е относительно a .

$$D = 9b^2 - 8b^2 = b^2$$

$$a = \frac{3b \pm b}{2}$$

$$\begin{cases} a = b \\ a = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg(-x) = \lg y \\ \lg(-x) = 2\lg y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = y & (I) \\ -x = y^2 & (II) \end{cases}$$

1) Рассмотрим случай $\textcircled{\text{I}}$; ур-е $\textcircled{2}$ ($-x=y$)

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$2y^2 + \overset{-x}{y^2} - y^2 + 4y - 8y = 0$$

$$2y^2 - 4y = 0$$

$$y(y-2) = 0$$

$$\begin{cases} y=0 - \text{не подходит т.к. } y>0 \\ y=2 \end{cases}$$

$$y=2 \Rightarrow x=-2$$

2) Рассмотрим случай $\textcircled{\text{II}}$, ур-е $\textcircled{2}$ ($-x=y^2$)

$$2y^2 + y^3 - y^4 + 4y^2 - 8y = 0$$

$$\begin{cases} y=0 - \text{не позв. т.к. } y>0 \\ 2y + y^2 - y^3 + 4y - 8 = 0 \end{cases}$$

$$y^3 - y^2 - 6y + 8 = 0$$

Заметим, что $y=2$ - корень. Тогда по теореме Безу.

$$(y-2)(y^2+y-2) = 0$$

$$\downarrow \quad \quad \quad \Delta = 1+8=9$$

$$\begin{cases} y=2 \\ y=-2 - \text{не позв. т.к. } y>0 \\ y=1 \end{cases} \quad y = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$\textcircled{\text{I}}$

$$\begin{cases} y=2 \\ x=-4 \\ y=1 \\ x=-1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r|l} y^3 - y^2 - 6y + 8 & y-2 \\ \hline -y^3 + 2y^2 & \\ \hline y^2 - 6y + 8 & \\ -y^2 + 2y & \\ \hline -4y + 8 & \\ -4y + 8 & \\ \hline 0 & \end{array} \quad \begin{array}{l} y-2 \\ y^2+y-2 \end{array}$$

Ответ: $(-2; 2)$, $(-4; 2)$, $(-1; 1)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$5. \begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

$$(|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a$$

Т.к. $(|x|-6)^2 \geq 0 \wedge (|y|-8)^2 \geq 0$, то $a \geq 0$. Тогда

пусть $z^2 = a$

$$\begin{cases} |(x-y)-6| + |(x+y)-6| = 12 & (1) \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = z^2 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad |(x-y)-6| + |(x+y)-6| = 12$$

Рассмотрим знаки модулей в ур-е (1):

$$x-y-6 \geq 0 \Leftrightarrow y \leq x-6 \Leftrightarrow y \leq x'$$

$$x+y-6 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -x+6 \Leftrightarrow y \geq -(x-6) \Leftrightarrow y \geq -x',$$

где $x' = x-6$

Перенесем точку origins в $(6,0)$, пусть $x' = x-6$

$$\begin{cases} x' = 6, (x', y) \in C_1 \\ y = 6, (x', y) \in C_2 \\ x' = -6, (x', y) \in C_3 \\ y = -6, (x', y) \in C_4 \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = z^2 \end{cases}$$

(или частей окружностей с
радиусом z и центром в $(6,0)$)

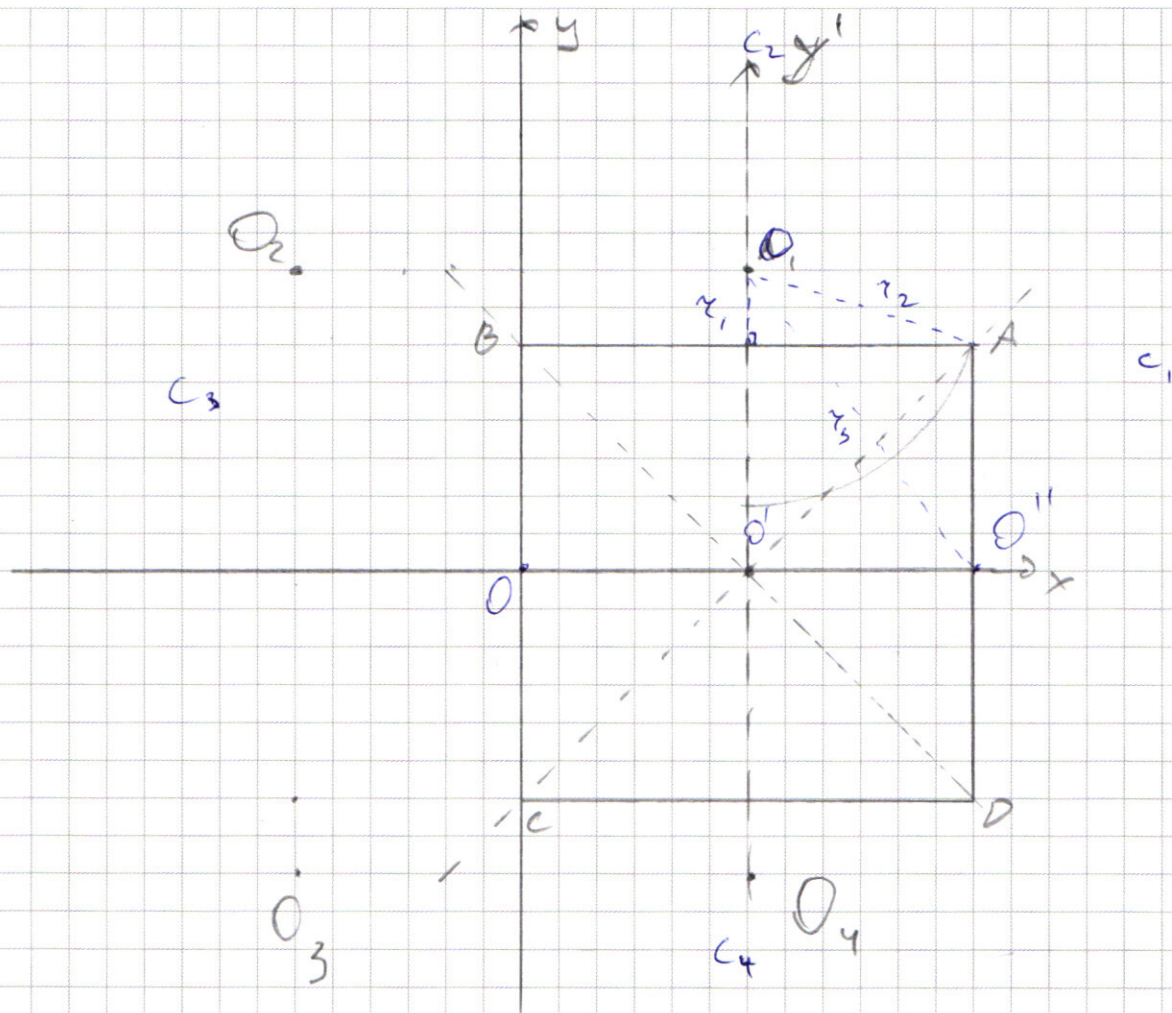
Пусть $O_1, \dots, O_4$ - центры окружностей, задаваемых ур-е

(2) в зависимости от знаков x и y

$$O_1 - x \geq 0, y \geq 0; O_2 - x < 0, y \geq 0; O_3 - x < 0, y < 0; O_4 -$$

$$x \geq 0, y < 0.$$

Т.к. квадрат, задаваемый ур-е (1), лежит целиком в I и IV четвертях и на ОХ, то окружности с



центрами в O_2 и O_3 никогда не пересекают квадрат, значит $x < 0$ и можно не рассматривать (нет решений.)

Так как картинка симметрична относительно Ox , то окружности $w_4(O_4; r)$ пересекают квадрат столько же раз, сколько и $w_1(O_1; r)$. Т.к. решений должно быть равно 2, то обе окружности должны пересекать квадрат по одному разу.

1) При $r < r_1$, ~~они не касаются~~ нет решений

2) При $r = r_1$, обе касаются $\Rightarrow$ подходит

3) При $r_1 < r \leq r_2$ или $r_2 < r < r_3$ обе пересекают AB и CD или BC и AD в точках, симметричных относительно Oy' и Ox . Никакая точка не перес.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Не мешает как OY' или OX (осей симметрии),
значит $y \neq 0 \Rightarrow$ решение
4) при $r = r_3$ обе окружности пересекают
квадрат O и $O'' \Rightarrow$ подходит
5) при $r > r_3$ окружности не пересекают квадрат.
Подходит $r = r_1$ и $r = r_3$
 $r_1 = 8 - 6 = 2$
 $r_3 = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$
и
 $\begin{cases} a = 4 \\ a = 100 \end{cases}$

6. Обозначим ^{первую} окруж. ~~слева~~ за $w_1(\mathcal{O}_1; 13)$, а ~~справа~~ ~~за~~ вторую за $w_2(\mathcal{O}_2; 13)$ ①

Рассмотрим случаи: $(CD) \cap (0, 0_2]$ ¹ и $(CD) \cap [0, 0_2)$ ² и $CD \cap \{0, 0_2\}$ ³

1 Пусть $K = BF \cap \omega_2$

$$\angle KBD = 90^\circ \rightarrow \odot_2 \text{ (K.D. } \rightarrow)$$

$$\rightarrow KV = 26$$

$$\angle KAD = \angle KBD = \frac{90}{2} \rightarrow$$

$$\tau_7 < KAD = 90^\circ$$

$$\angle CAD + \angle DAK = 180^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K \in (CA)$$

$$\omega_1 = \omega_2 \Rightarrow \overset{\vee}{AB} \in \omega_1, \text{ равно } \overset{\vee}{AB} \in \omega_2$$

$$\Rightarrow \angle ACB = \angle AKB \Rightarrow \Delta CKB - p1d \Rightarrow$$

$$\rightarrow CB = KC$$

$$CB \perp B$$

$$BF = BD$$

$$\angle CBF_2 \angle ABD = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \Delta C F = \Delta K B D \Rightarrow C F = K D = 26$$

②. $K = \{F \cap W_i$

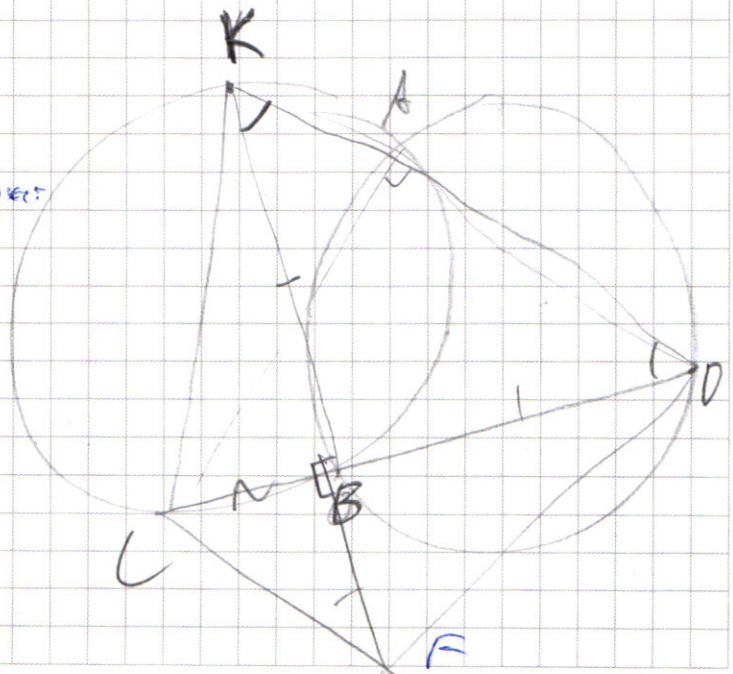
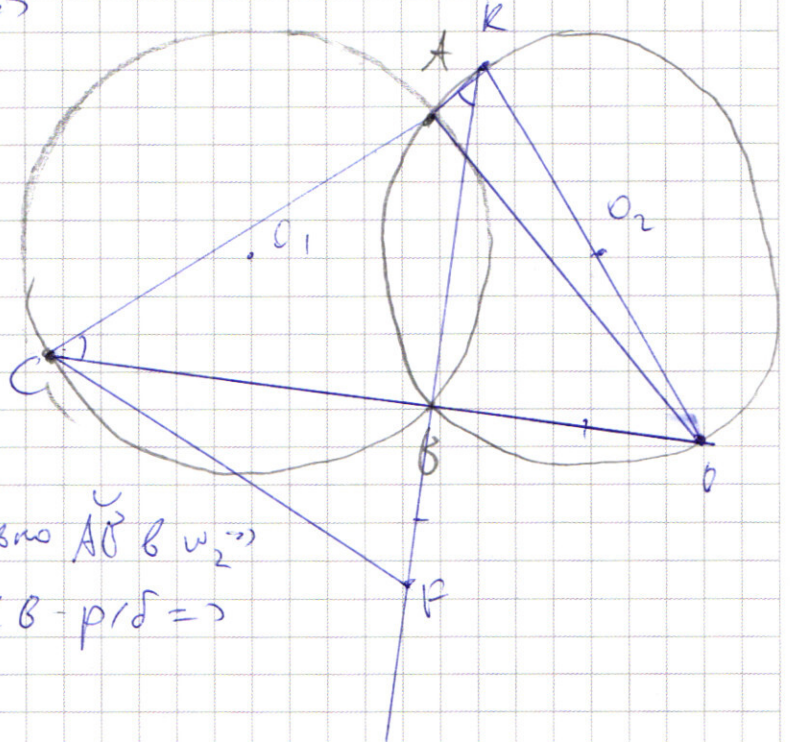
Force vector $\vec{F}$ DA $\rightarrow$ center:

К, акалог $\textcircled{1} BD = BK$ и

$$\Rightarrow BK = B \mathbb{F}_q$$

For $\Delta BKC = \Delta BPC \Rightarrow$
(BC - of Δ)

$$\Rightarrow CF = KL = 26$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Картинка симметрична относительно AB

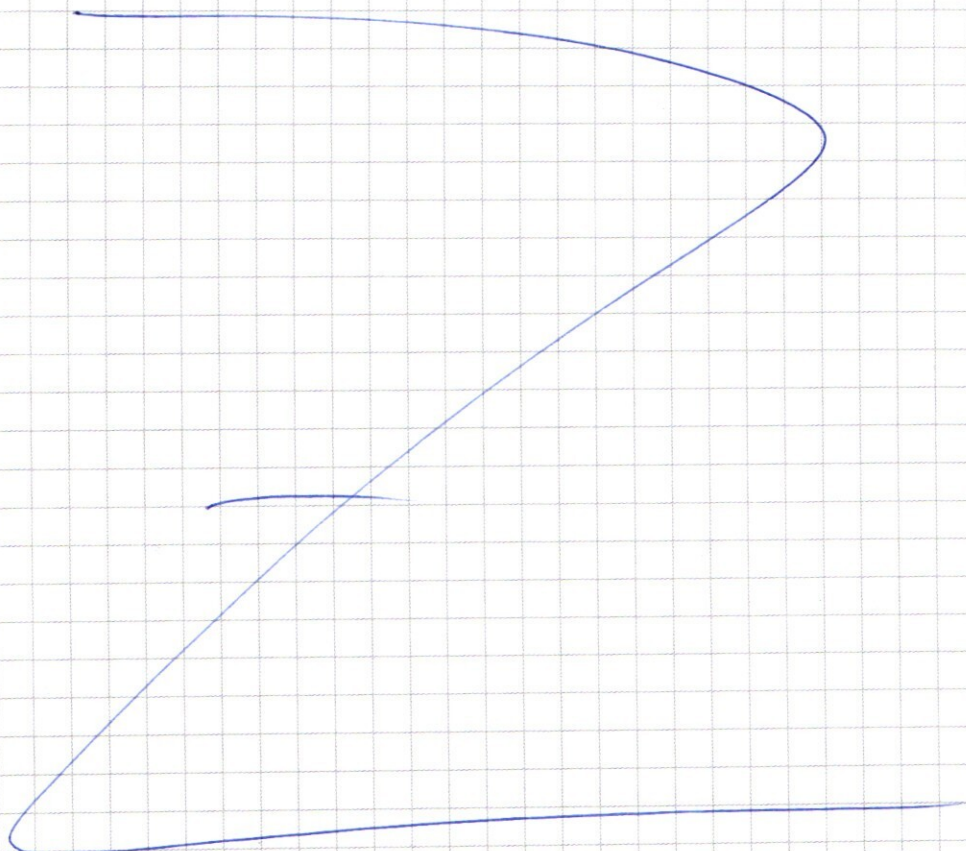
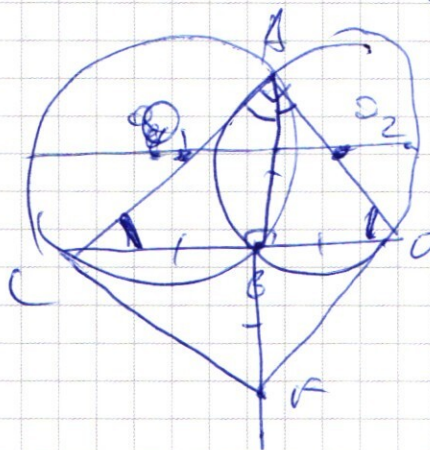
③. Ты: $K = A$ ^{карты}

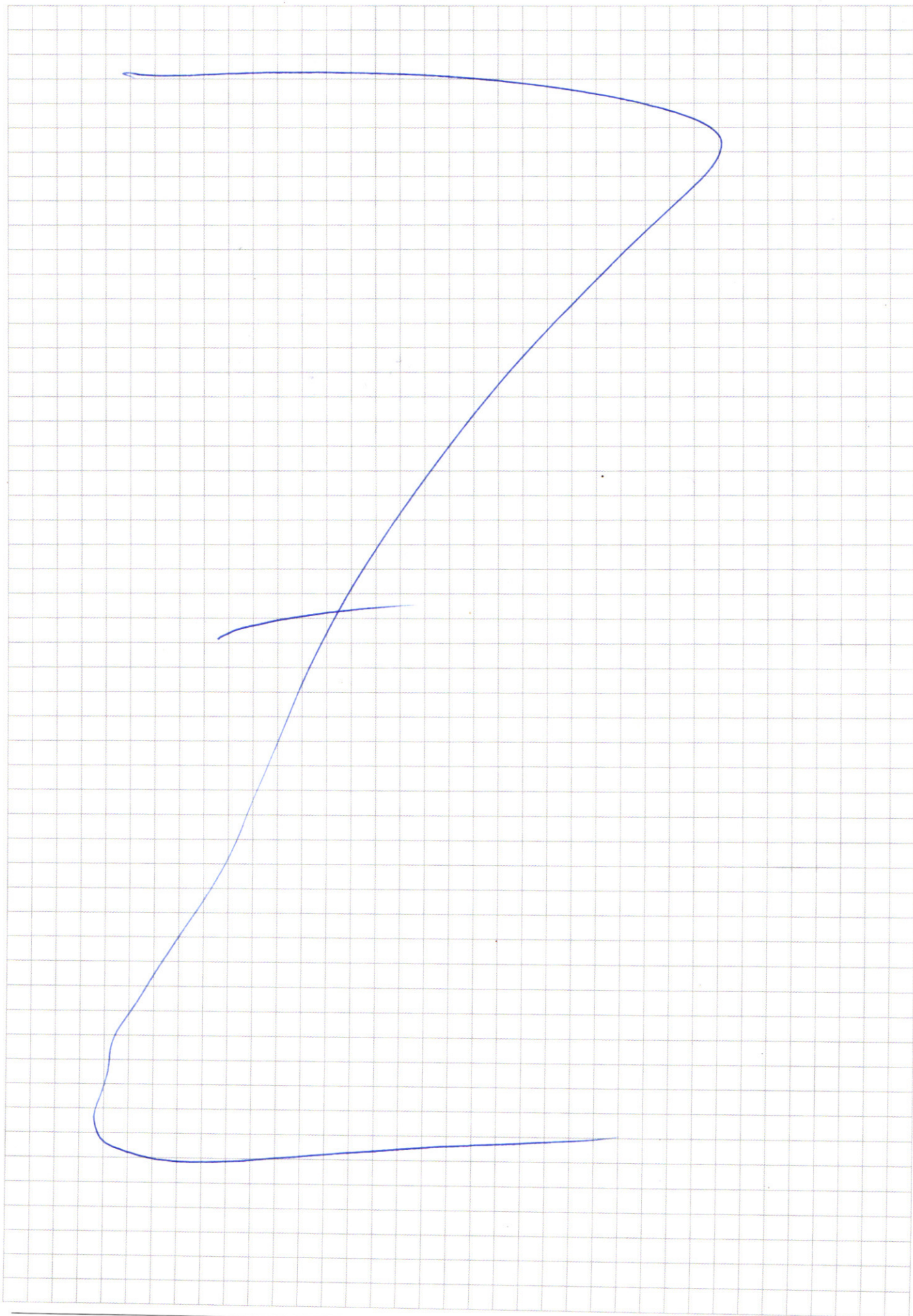
$$\angle CAP = \angle BAP = 45^\circ$$

$$\angle ACB = \overset{\frown}{AOB} = 45^\circ$$

$$BO = \overset{4}{AB} = BC = BF$$

$$\triangle ABD \cong \triangle CBF \Rightarrow CF = 26$$





☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 10
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4.
Дано:

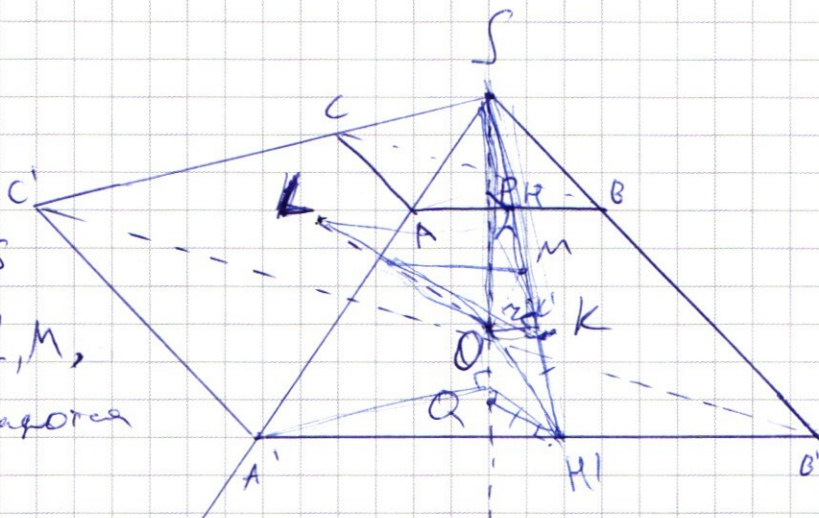
$w(O; r)$

S — трехгр. угл с верш. S

w касается r в K, L, M ,

$\alpha, \beta \perp SO$, α и β касаются

w ~~в точках~~



~~Пусть~~ Пусть $\alpha \cap r = AB, C$; $\beta \cap r = A'B', C'$

~~Пусть~~ $\alpha \cap SO = P$; $\beta \cap SO = Q$ $S_{ABC} = 4$; $S_{A'B'C'} = 9$

До (Очевидно, что пересечение α и r — это треугольник, т.к. α не совпадает ни с одной из граней, и не параллельна им, а также не проходит через S и имеет точку внутри r , как и β).

$\alpha \perp SO \wedge \beta \perp SO \Rightarrow \alpha \parallel \beta$

$\begin{cases} AB \in \text{пл. } \alpha \wedge SA'B' \in \alpha \\ A'B' \in \text{пл. } \beta \wedge SA'B' \in \beta \end{cases} \Rightarrow AB \parallel A'B'$
(аналогично $AC \parallel A'C'$ и $BC \parallel B'C'$)

$AB \parallel A'B' \Rightarrow \angle SAB = \angle SA'B' \wedge \angle SBA = \angle SB'A'$

Т.к. $\triangle SAB$ и $\triangle SA'B'$ имеют общий угол $\angle ASB$ и два угла соответственно совпадают $\Rightarrow \triangle SAB \sim \triangle SA'B' \Rightarrow$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{SA}{SA'} = \frac{SB}{SB'}$$

аналог. $\frac{AC}{A'C'} = \frac{SA}{SA'} \Rightarrow \frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'}$, аналог. $\frac{BC}{B'C'} = \frac{SB}{SB'} \Rightarrow \frac{BC}{B'C'} = \frac{AB}{A'B'}$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \sqrt{\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

II. Пусть ω касается α в P' .
Докажем, что $P' = P$:

Предположим противное. Тогда $OP' \perp \alpha \wedge OP \perp \alpha \Rightarrow$
 $\Rightarrow OP' \parallel OP$ — невозможно т.к. $O \in OP' \wedge O \in OP$, но $OP \cap OP' = \emptyset$
 $[P' \in OP]$ — невозможно т.к. тогда $OP \subset \alpha \Rightarrow O \in \alpha$

Противоречие $\Rightarrow P' = P$

Аналогично докажем, что ω касается β в Q . Тогда
 $OP = r$; $OQ = r$; $P, Q \in OS \Rightarrow PQ = 2r$.

III. Пусть H' — высота в $\triangle A'B'C'$ на $A'B'$,
 $SH' \cap AB = H \perp AB \Rightarrow \frac{SH}{SH'} = \frac{2}{3}$

$$\triangle SPH \sim \triangle SQH' \Rightarrow \frac{SP}{SQ} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{SP}{SP+2r} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3SP = 2SP + 4r \Rightarrow SP = 4r$$

Отметим на SH' K' : $H'K' = OQ' \Rightarrow$
 $\Rightarrow OQH' =$

Рассмотрим $\triangle OSK$:

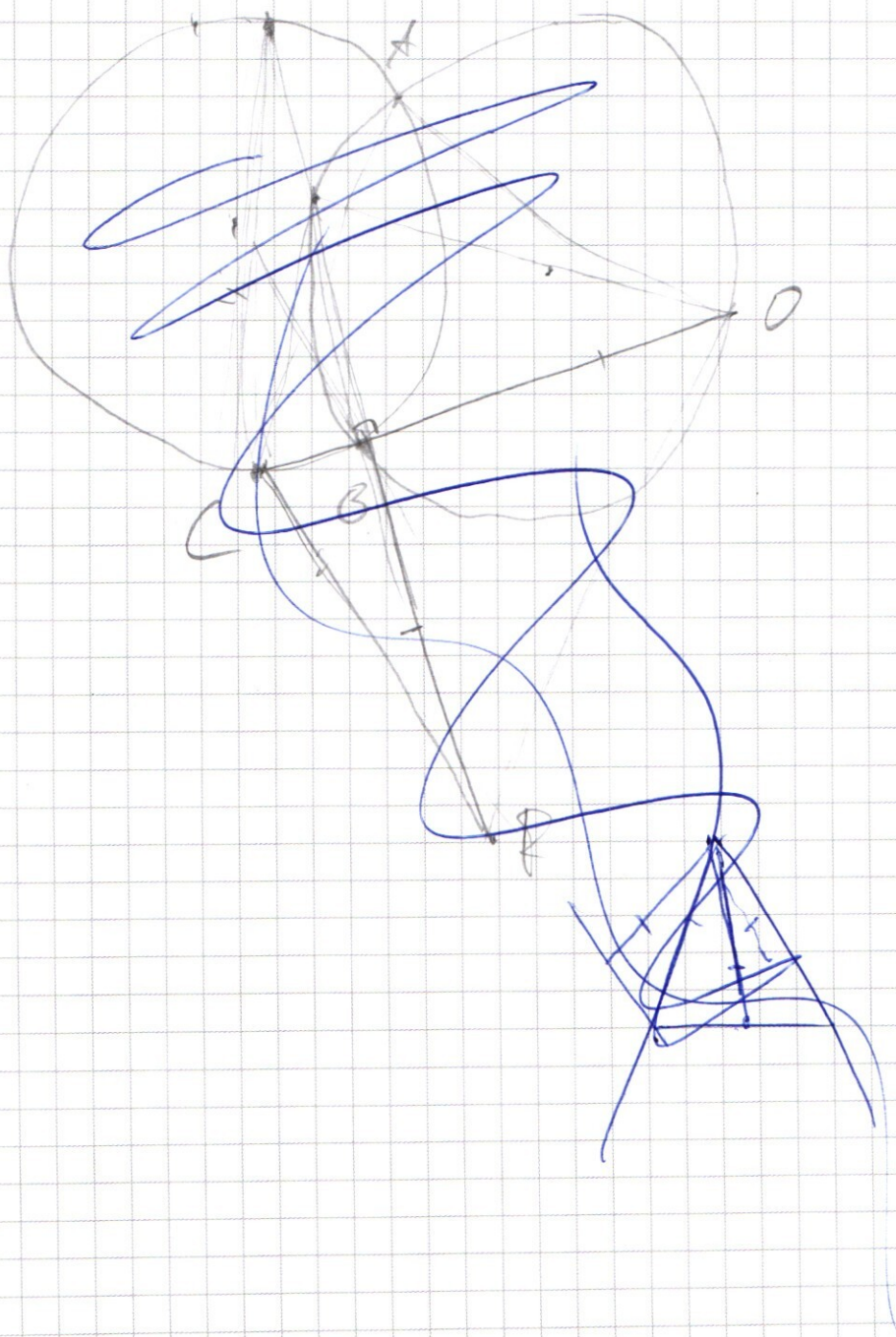
$$OK = r$$
; $OS = SP + r = 5r \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle KSO = \arcsin\left(\frac{1}{5}\right)$$

По теореме Пифагора $SL = SM = SK \Rightarrow MLK \parallel \alpha \parallel \beta$.

Пусть $H \in OS$; $KH \perp OS \Rightarrow LK \perp OS \Rightarrow MK \perp OS$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Найти среднюю S:

$$S = \left(\frac{SK}{SK} \right)^2 \cdot g$$

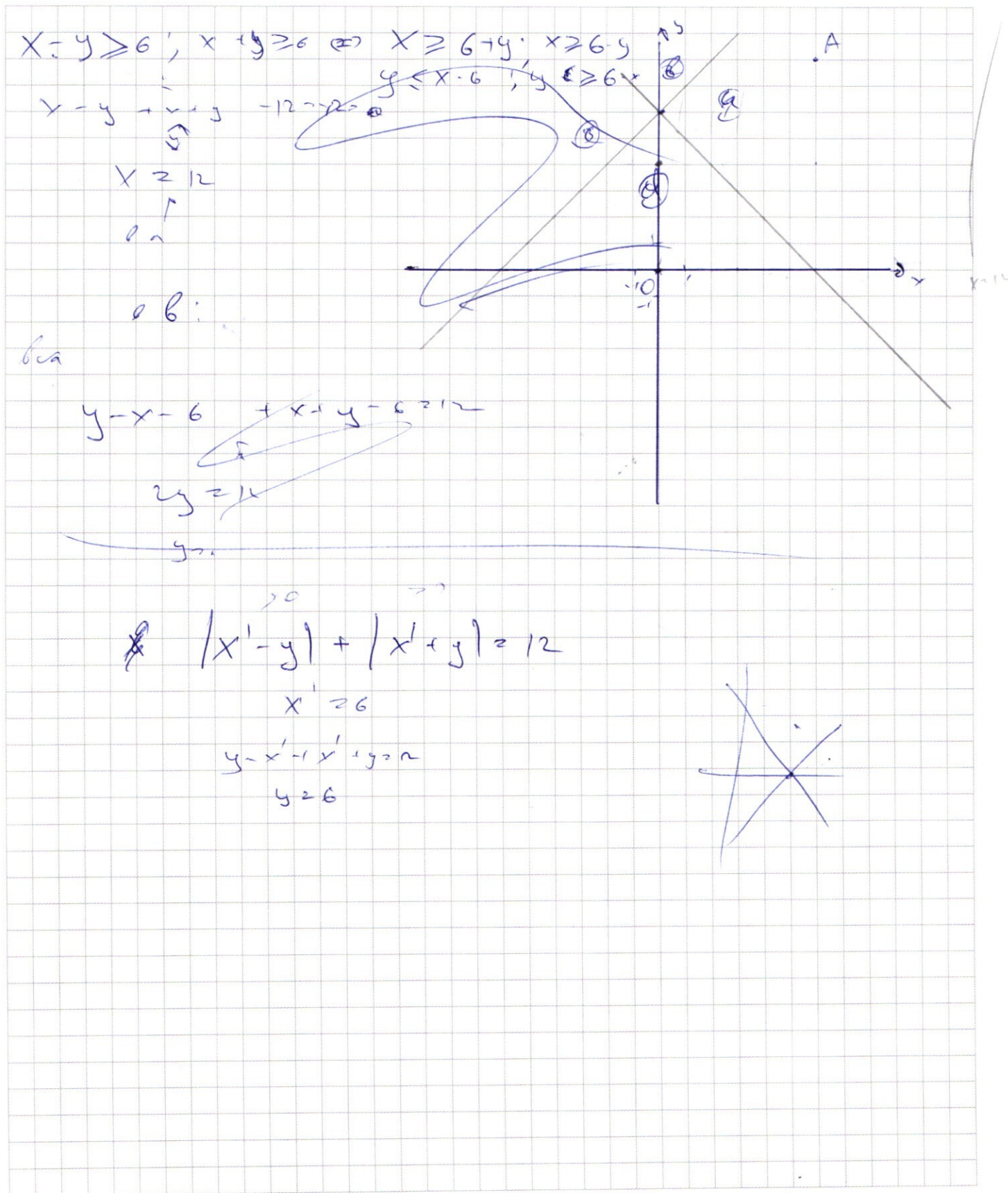
$$SK = 92 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{1}{5} \right)^2} = 92 \cdot \sqrt{24}$$

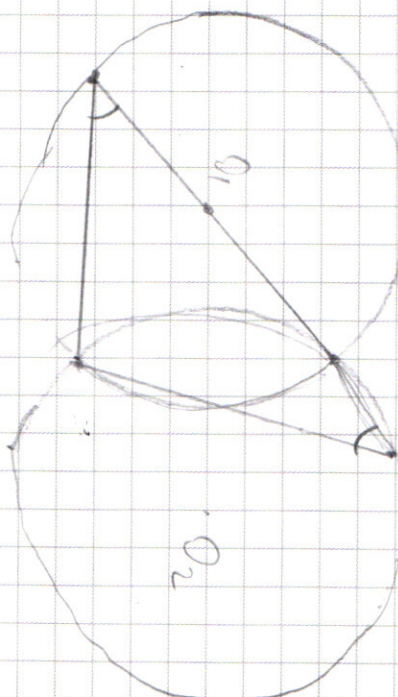
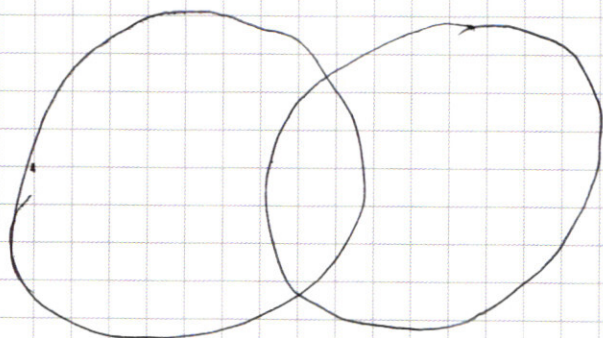
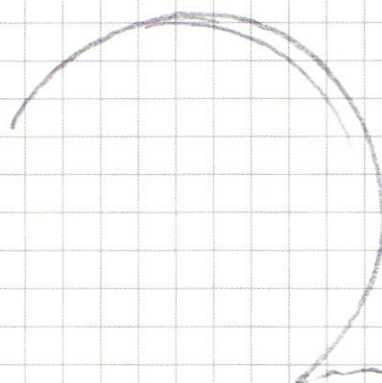
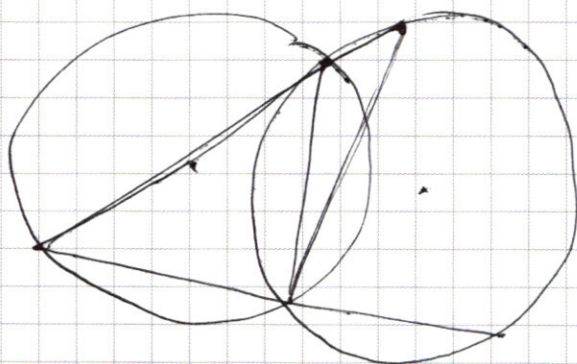
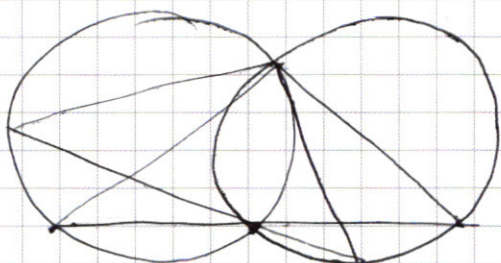
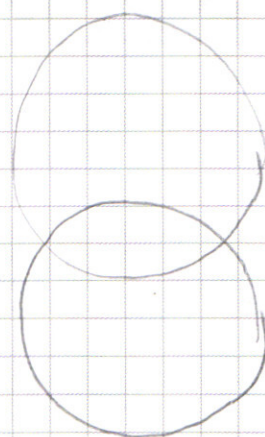
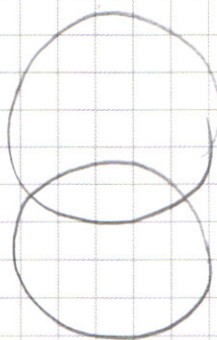
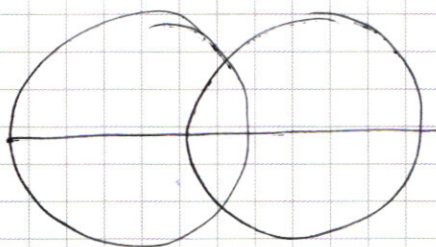
$$SK = 92 \cdot \frac{25}{\sqrt{24}}$$

$$\frac{SK}{SK} = \frac{24}{6 \cdot 25} = \frac{4}{25}$$

$$S = \left(\frac{4}{25} \right)^2 \cdot 9 = \left(\frac{12}{25} \right)^2 = \frac{144}{25}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \left(\frac{a+b}{2} \right) \cos \left(\frac{a-b}{2} \right)$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

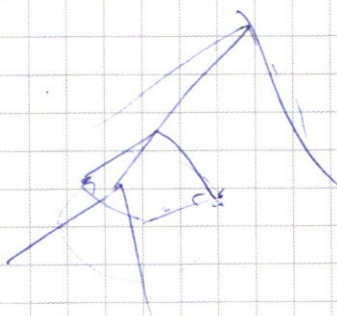
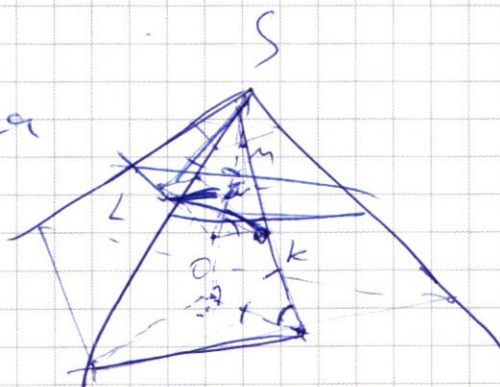
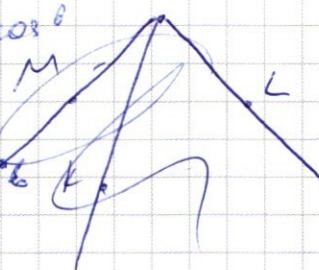
$$\frac{\sin a + \sin b}{\sin a \sin b} = 1 - \cos a \cos b$$

$$\sin a (\sin a + \sin b) = \cos a$$

$$\sin a + \sin b = 2 \cos a$$

$$2 \sin a \cos a = 2 \cos a$$

$\sin$



$$\cos \alpha + \cos \beta =$$

$$= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} =$$

$$= 2 \cdot (\sin \alpha \cos \beta)$$

$$\begin{array}{r} 16875 \overline{) 5} \\ - 15 \\ \hline 18 \\ - 15 \\ \hline 32 \\ - 30 \\ \hline 25 \\ - 25 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3375 \overline{) 5} \\ - 30 \\ \hline 37 \\ - 35 \\ \hline 25 \\ - 25 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 675 \overline{) 5} \\ - 5 \\ \hline 17 \\ - 15 \\ \hline 25 \\ - 25 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 35 \\ \cdot 32 \\ \hline 70 \\ 105 \\ \hline 1120 \end{array}$$

$$\cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1$$

$$8 - 4 - 12 - 8 =$$

$$= 16 - 16 = 0$$

$$\begin{array}{r} 135 \overline{) 5} \\ - 10 \\ \hline 35 \\ - 35 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\cos 10x =$$

$$= \cos(7x + 3x) =$$

$$= \cos 7x \cos 3x - \sin 7x \sin 3x$$

$$\cos 7x - \sin 7x = \sqrt{2} \cos(7x - \frac{\pi}{4})$$

$$\cos(7x - \frac{\pi}{4}) - \sin(3x - \frac{\pi}{4}) = \cos 10x$$

$$2 \cos \frac{10x - 2\pi}{2} \cos$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{\cos(\frac{\alpha + \beta}{2}) + \cos(\frac{\alpha - \beta}{2})}{2}$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}$$

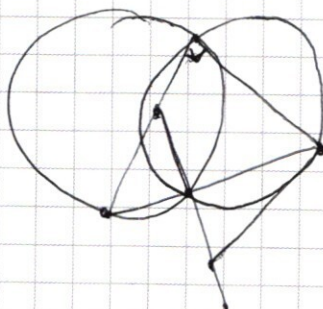
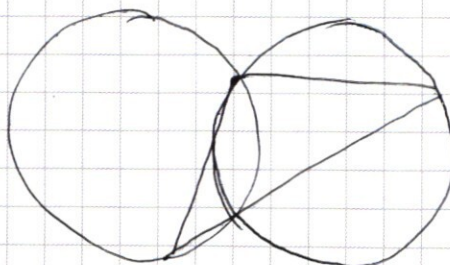
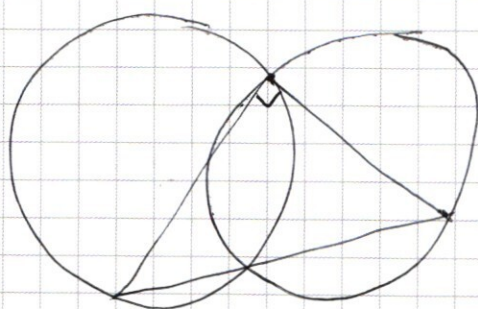
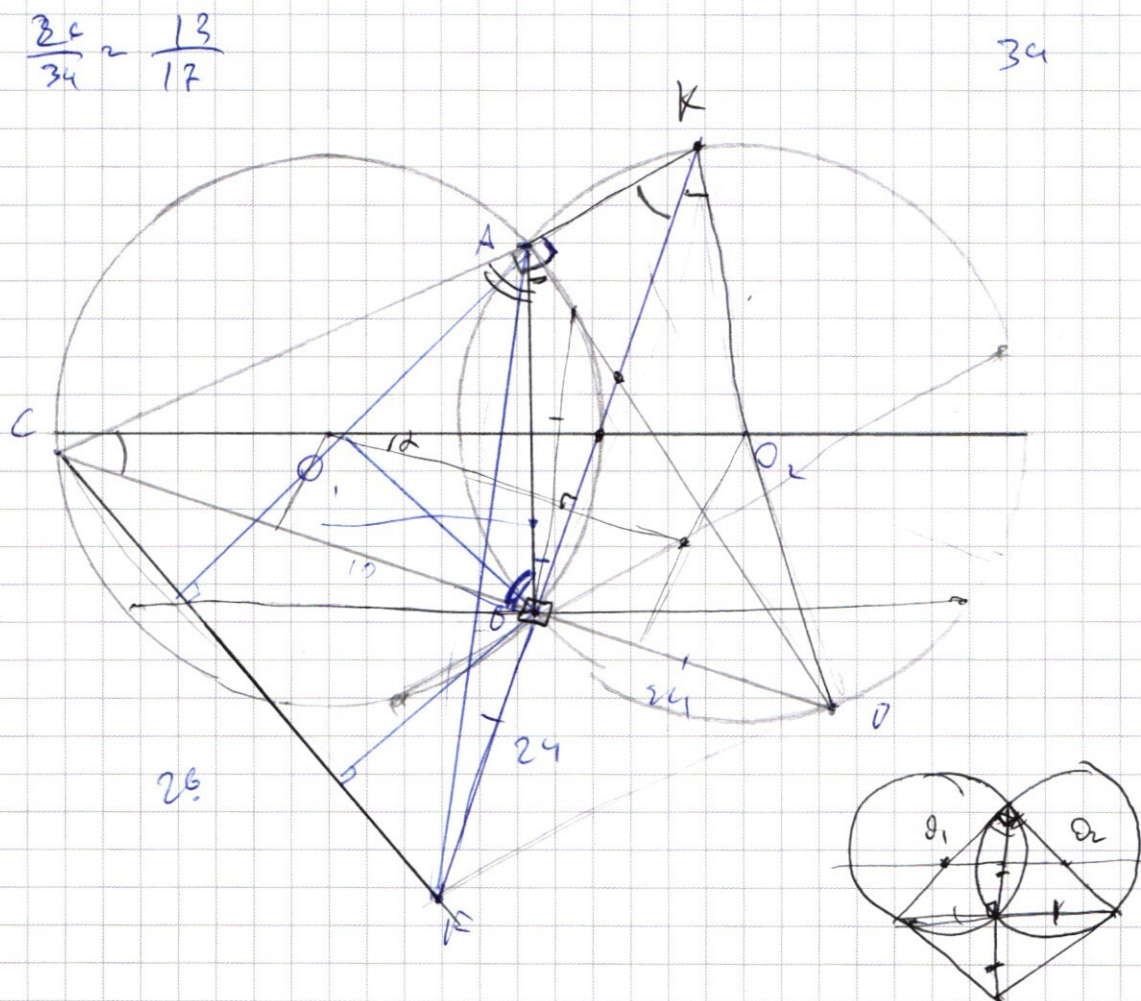
$$\alpha + \beta = x$$

$$\alpha - \beta = y$$

$$\alpha = \frac{x + y}{2}$$

$$\beta = \frac{x - y}{2}$$

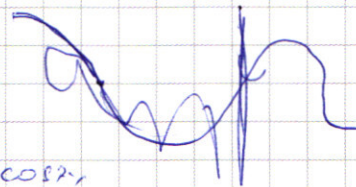
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\cos 7x - \sin 7x = \sqrt{2} \cos(7x - \varphi) = \cos(7x + \frac{\pi}{2})$$

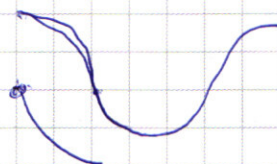
$$\begin{aligned} A &= -1 & \sin \varphi &= -\frac{1}{\sqrt{2}} & \Rightarrow \sin 7x \\ B &= 1 & \cos \varphi &= \frac{1}{\sqrt{2}} & \Rightarrow \cos 7x \end{aligned} \quad \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

$$\sin 7x + \sin 3x = 2 \sin 5x \cos 2x$$



$$\sin 7x - \sin 3x = \sin 3x \sin 7x - \cos 3x \cos 7x$$

$$\frac{1}{\sin 3x} - \frac{1}{\sin 7x} = 1 - \tan 3x \tan 7x$$



$$\left(\frac{x^2}{y}\right)^{2/5} = 10^{1/5} \cdot (-x)^{1/5}$$

$$\begin{aligned} D &= 9b^2 - 8b^2 \cdot b^3 \\ &= 6(9b - 8b^3) \end{aligned}$$

$$\frac{(-x)^{4/5}}{2^{1/5}} = 10^{1/5} \cdot 10^{1/5} \cdot (-x)^{1/5}$$

$$10^{1/5} \cdot 4/5 = 10^{1/5} + 1/5 + 2/5$$

$$4ab = a^2 + ab + 2b^2$$

$$\begin{aligned} a^2 - 3ab + 2b^2 &= 0 \Rightarrow a(a - 2b) - (ab - 2b^2) = 0 \\ a(a - 2b) &= b(a - 2b) \end{aligned}$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$(y^2 - 8y + 16) - 16 + y^2 - xy - x^2 - 4x = 0$$