

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО М

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

$$16275 = 3^5 \cdot 5^4$$

Значит оно будет в виде $5555 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1$ или $5555 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1$.

2) в этом обшая сумма будет

$$\frac{8!}{4! \cdot 3!} + \frac{8!}{4! \cdot 2!} = \frac{8! + 8! \cdot 3}{4! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 4}{3!} = 1120$$

Ответ: 1120

№ 2

$$① \cos 7x + \cos 3x = 2 \cos 5x \cos 2x$$

$$② \sin 7x + \sin 3x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$③ \cos 10x = \cos^2 5x - \sin^2 5x = (\cos 5x - \sin 5x)(\cos 5x + \sin 5x)$$

$$④ \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin 5x + \cos 5x) = \sin 5x \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{1} + \cos 5x \frac{\cos \frac{\pi}{4}}{1} = \cos \left(\frac{\pi}{4} - 5x \right)$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 5x$$

$$①, ② \Rightarrow 2 \cdot \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$③ \Rightarrow 2 \cos 2x = \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)$$

$$\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin 5x + \cos 5x)$$

$$④ \Rightarrow \cos 2x = \cos \frac{\pi}{4} - 5x$$

$$① \quad 2x = \frac{\pi}{4} - 5x + 2\pi k$$

$$7x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

Ответ:

$$x_1 = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7}$$

$$② \quad 2x = 5x - \frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

$$3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

$$x_2 = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}$$

№ 3

$$2y' - xy - x' - 4x - 8y = 0$$

$$(2y + x)(y + x - 4) = 0$$

$$\textcircled{I} \quad x = -2y$$

$$\textcircled{II} \quad y = x + 4$$

Мы знаем что $y \geq 0$ и $x < 0$.

$$\textcircled{I} \quad \left(\frac{(2y)'}{y'}\right)^{\lg y} = (2y)^{\lg 2y'}$$

$$(16y')^{\lg y} = (2y)^{\lg 2y'}$$

$$\underline{2^{4\lg y}} \cdot \underline{y^{2\lg y}} = \underline{2^{\lg 2}} \cdot \underline{2^{2\lg y}} \cdot \underline{y^{2\lg y}} \cdot \underline{y^{\lg 2}}$$

$$2^{4\lg y} = 2^{\lg 2}$$

$$\lg y = \lg 2$$

$$\boxed{y_1 = 2 \quad x_1 = -4}$$

$$\textcircled{II} \quad \text{Пусть } a = -x \quad \text{где } a > 0.$$

$$y = x + 4 = 4 - a. \quad \text{т.е. } y + a = 4$$

$$\underline{a^{4\lg y}} = \underline{a^{\lg a}} \cdot \underline{a^{\lg y}} \cdot \underline{y^{2\lg y}}$$

$$a^{3\lg y} = a^{\lg a} \cdot y^{2\lg y} \quad / \lg$$

$$3 \lg y \cdot \lg a = \lg a \cdot \lg a + 2 \lg y \cdot \lg y$$

$$\lg a = b$$

$$\lg y = c$$

$$3bc = b^2 + 2c^2$$

$$(b-c)(b-2c) = 0$$

$$\textcircled{1} \quad b = c$$

$$\lg a = \lg y$$

$$a = y = 2 \Rightarrow \begin{matrix} x_2 = -2 \\ y_2 = 2 \end{matrix}$$

Продолжение на
другой странице

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

② $b = 2c$

$\lg a = \lg y^*$

$a = y^*$

$y^* + y = 4$

$y^* \cdot y - 4 = 0$

$D = 1 - 4 \cdot (-4) = 17$

$y_3 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$

$a = \left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)^2$

$x_3 = -\frac{9 - \sqrt{17}}{2}$

Ответ: $(x; y) = (-4; 2); (-2; 2); \left(\frac{\sqrt{17}-9}{2}; \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$

№ 5

$|x-6-y| + |x-6+y| = 12$

① Если $(x-6-y)(x-6+y) \geq 0$ то $|x-6-y + x-6+y| = 12$

② Если $(x-6)^2 - y^2 \leq 0$ то $|x-6-y - x+6+y| = 12$

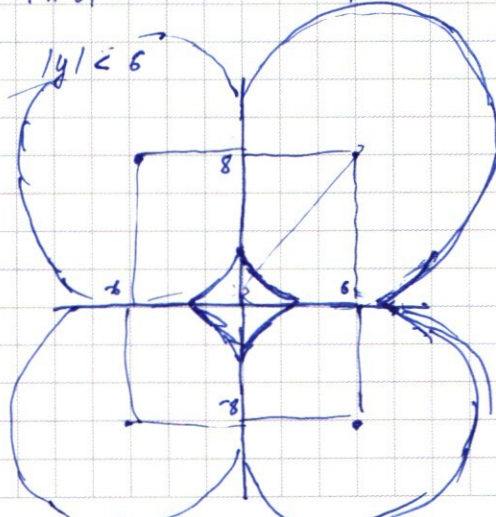
(I) $(x-6)^2 > y^2$

$|x-6| > |y|$

$2|x-6| = 12$

$|x-6| = 6$

$x_1 = 0 \quad x_2 = 12$



Если $(x; y)$ корни уравнения

то и $(x; -y)$ - корни

У нас есть два $x_{1,2} = 0, 12$

Значит y должен быть один

$y = 0$

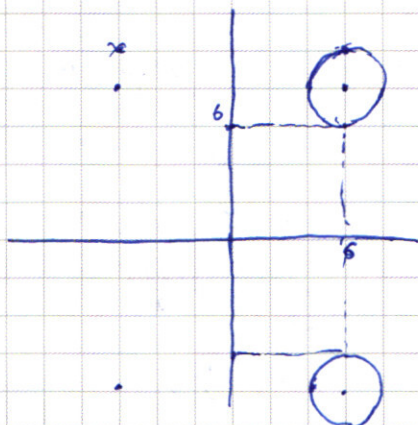
$$(0-8)^2 + (12-6)^2 = a^2$$

$$a_1 = 100$$

21

$|y| = 6$

$$|x - 6| < 6.$$



Тут Х должен чисть

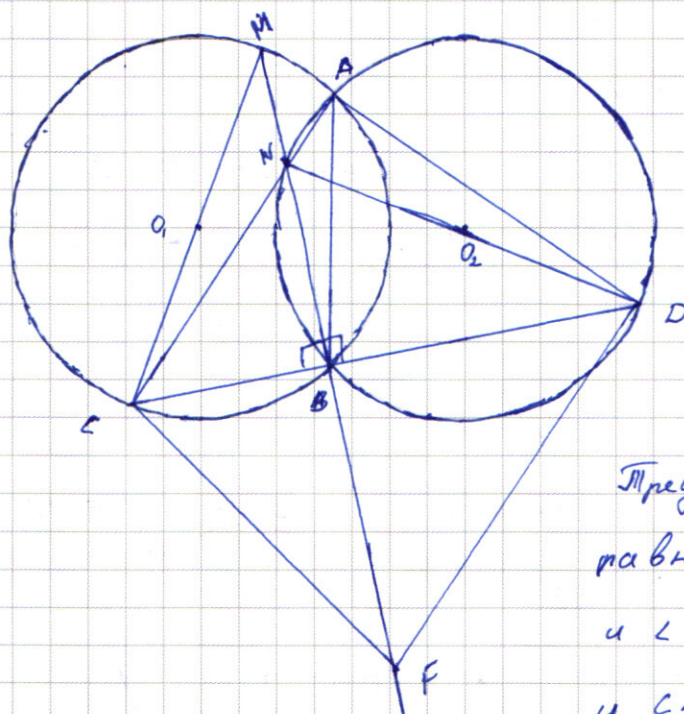
одно решение, где

$$|x-6| = 0$$

$$(6-8)^2 + (6-6)^2 = a$$

$$a_1 = 4$$

Ombeten: $a_1 = 100$; $a_2 = 4$

 $\sqrt{6}$ 

Продолжим отрезок AF

и оно пересекается с

окружностями на точках

М и N.

$$F_{\text{class}} \angle \angle A B = \angle$$

TO $\angle BAD = 90^\circ - 2$

Треугольники BCM и BDN -

равны так как $\angle BMC = \angle$

$$\angle NDB = 90^\circ - \angle BND = \alpha,$$

и CM и DN - диаметры

окружностей.

Значит $BM = BD = BF \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Delta BCM = \Delta BCF \Rightarrow CF = CM = 26.$$

Ответ: 25

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2

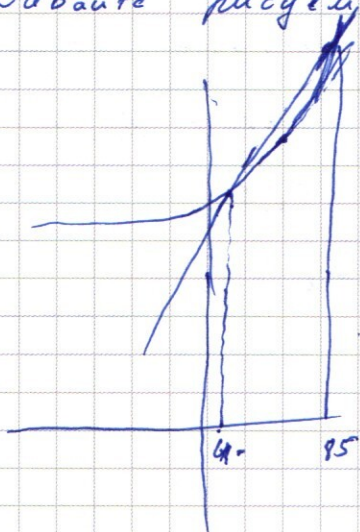
Значит $(3^{81} - 1) \cdot x + 85 > 3^x + 4 \cdot 3^{81}$. Мы знаем, что

Если $(3^{81} - 1) \cdot x + 85 = 3^x + 4 \cdot 3^{81}$

то это будет есть максимум два решения

$x = 4$ и $x = 85$ которых я нашёл неограниченно.

Давайте рисуем графики функций.



Значит система будет иметь решение если $4 < x < 85$

При x_0 у будет иметь корни столько, сколько введёт выражение. $(3^{81} - 1)x_0 + 85 - 3^{x_0} - 4 \cdot 3^{81}$.

Значит количество общих корней будет

$$\sum_{x=5}^{84} ((3^{81} - 1) \cdot x + 85 - 3^x - 4 \cdot 3^{81}) = (3^{81} - 1) \cdot \frac{5+84}{2} \cdot 80 + 85 \cdot 80 -$$

$$- \sum_{x=5}^{84} (3^x) - 80 \cdot 4 \cdot 3^{81} = 40 \cdot (3^{81} \cdot 89 - 89 + 120 - 8 \cdot 3^{81}) - \sum_{x=5}^{84} (3^x) =$$

$$= 40(3^{85} + 3^4) - \sum_{k=5}^{84} (3^k) = \textcircled{1}$$

$$\sum_{k=5}^{84} (3^k) = 3^5(1 + \dots + 3^{79}) = 3^5 \cdot \frac{3^{80} - 1}{2}$$

$$\textcircled{1} = 3^4 \cdot 40 \cdot (3^{81} + 1) - \frac{3^5}{2} \cdot (3^{80} - 1) = \frac{1}{2} \cdot (80 \cdot 3^{85} + 80 \cdot 3^4 - 3^{85} + 3^5) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (79 \cdot 3^{85} + 77 \cdot 3^4) = \frac{81}{2} \cdot (79 \cdot 3^{81} + 77)$$

Ответ: $\frac{81 \cdot (79 \cdot 3^{81} + 77)}{2}$

№4

Пусть треугольник с площадью 4 пересекется с трёхгранным углом в точках A_1, B_1, C_1 .

А большой в точках A_2, B_2, C_2 .

Пирамиды $A, B, C, S \sim A_1, B_1, C_1, S$.

Значит $\frac{S_{H_1}}{S_{H_2}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$

$$H_1, H_2 = 2 \cdot R$$

$$S_{H_1} = 4R$$

$$S_O = 4R + R = 5R$$

$$OK = R$$

$$\sin \angle KSO = \frac{R}{5R} = 0,2$$

Ответ: $\angle KSO = \arcsin 0,2$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(-x)^4 \log y = (-x)^{\log(-x)} (-x)^{\log y} \cdot y^{2 \log y}$$

$$(-x)^{3 \log y}$$

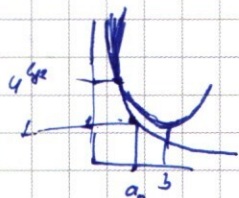
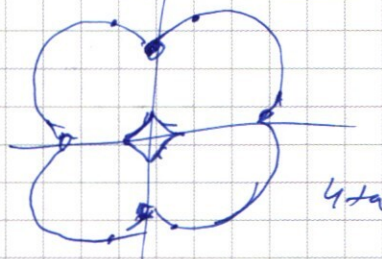
$$a^{3 \log 4-a} = a^{\log a} (4-a)^{\log(4-a)}$$

$$a^{3 \log(4-a) - \log a} = (4-a)^{2 \log 4-a}$$

$$a^{\log \frac{(4-a)^2}{a}}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(\log x)'$$

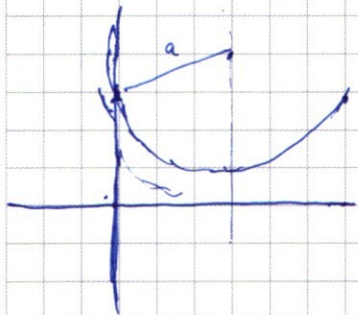


$$x \in \mathbb{Z}$$

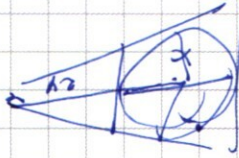
$$36$$

$$(4-a_0)^2 = a_0$$

$$1,3 < a_0 < 1,4$$



$$a^{\log \frac{(4-a)^2}{a}}$$



$$|x-6-y| = |x-6+y|$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{2(x-6)} \geq \sqrt{2(2)} \\ & 2+y \geq 12 \end{aligned}$$

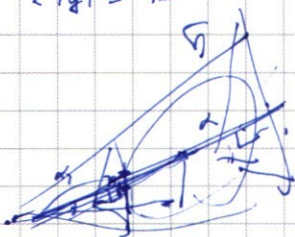
$$(x-6)^2 + y^2 \geq 0$$

$$|x-6| = 6$$

$$|y| \leq 6$$

$$|y| = 6$$

$$|x-6| \leq 6$$



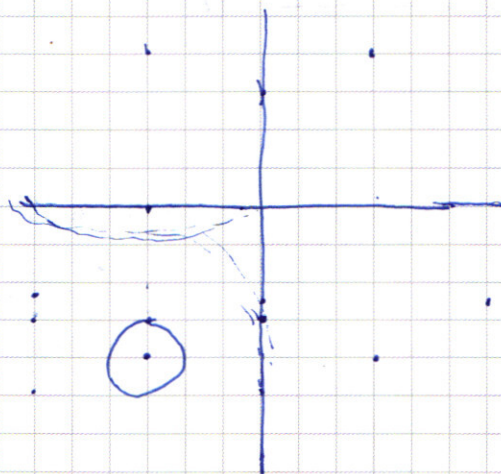
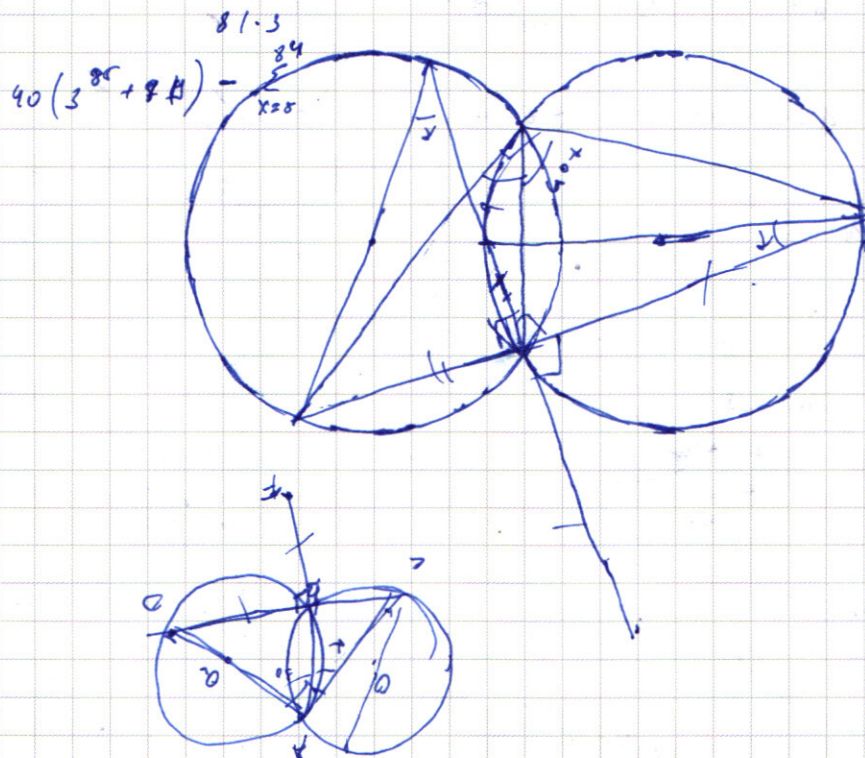
$$x \cdot 3^{81} - x + 85 - 3^x \neq 4 \cdot 3^{81} - 1$$

$$x(3^{81} - 1) - 3^x$$

$$\frac{5 + 84}{2} \cdot 80$$

$$89 \cdot 40 (3^{81} - 1) - 3^x + 80 \cdot 85 - 80 \cdot 4 \cdot 3^{81} - 80$$

$$40 \cdot (89 \cdot 3^{81} - 89 + 170 - 8 \cdot 3^{81} - 2)$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 16875 \overline{) 25} \\ \underline{160} \\ 87 \\ \underline{87} \\ 0 \end{array}$$

27

5² · 5¹

5555 3331

5555 22 11

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\begin{aligned} \cos x \cdot \cos y &= \frac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{2} \\ \sin x \cdot \cos y &= \frac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{2} \\ \left(\frac{x+y}{2} \right) & \quad \left(\frac{x-y}{2} \right) \end{aligned}$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - 2\sqrt{2} \sin 5x \cos 5x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$\cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} \sin 5x \cos 5x$$

$$2 \cos 2x \cos 10x = \sqrt{2} \sin 5x \cos 5x (\cos 5x + \sin 5x)$$

$$2 \cos 2x = \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)$$

$$\cos 2x = \sqrt{2} \left(\frac{\pi}{4} + 5x \right)$$

$$2x + 2\pi k = \frac{\pi}{4} + 5x$$

$$3x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

$$x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}$$

$$(-x)^{4 \lg y} = (-x)^{\lg(x^4)} \cdot (-x)^{\lg y} \cdot \left(\frac{x^4}{y^4}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \quad (16 \cdot 4)^{\lg 2} = 4^{\lg 2}$$

$$(-x)^{5 \lg y} = (-x)^{\lg(x^5)} \cdot y^{\lg y} \cdot 2y^1 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$y^{\lg(-x)}$$

$$(-x)^{5 \lg y} = (-x)^{\lg(x^5)} \cdot y^{\lg y}$$

$$\left(\frac{y^2}{-x}\right)^{\lg(-x)} = y^{2 \lg y}$$

$$y^1 - xy + 0,25x^2 + (y-4)^2 =$$

$$-x^2 - xy - 0,25y^2 + 2,25y^2 + 8y$$

$$-0,7x^2$$

$$-(x-4)^2 + (y-4)^2 - 12 - xy + y^2$$

$$x^{\lg 4-x} = x^{\lg x} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$x^{2 \lg y} = x^{\lg y^2}$$

$$x^{2 \lg(4-x)} - \lg x = (4-x)^{\lg 4-x}$$

$$\left(\frac{x^2}{y^2}\right)^{\lg y} = x^{\lg x}$$

площадь сегмента трапеции

$$\frac{y}{2} \cdot (y-x-4) \cdot (2y+x)$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 2y - 4x$$

$$y - x + a$$

$$2y + x + b$$

$$x = -1y$$

$$\left(\frac{y^2}{x}\right)^{\lg x} = y^{\lg y}$$

$$x \cdot y < 0$$

$$a - b \leq -4$$

$$y \geq x + 4$$

$$2a + b \geq -8$$

$$x \cdot (x+4) \leq 0$$

$$3a \geq -12$$

$$-4 \leq x \leq 0$$

$$a \leq -4$$

$$b \leq 0$$

$$\left(\frac{x^4}{(x-4)^2}\right)^{\lg(x-4)} = (-x)^{\lg(-x(x-4))}$$

$$\left(\frac{-x}{\lg y}\right)^{-x}$$

$$(16y)^{\lg y} = 2y^{\lg 2y^2}$$

$$(16y)^{\lg y} = (2y^2)^{\lg 2y^2}$$

$$16^{\lg y} \cdot y^{\lg y} = 2^{\lg 2y^2} \cdot y^{\lg 2y^2}$$

$$8^{\lg y} = 2^{\lg 2} \cdot y^{\lg y}$$

$$y^{\lg 2} = 18^{\lg 2}$$

$$y = 18$$



черновик



чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)