МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО М.

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$2y^2 - 8y + 8 - (x^2 + 4x + 4) - 4 - xy = 0$

$2(y-2)^2 - (x-2)^2 = xy + 4$

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

$(x^4)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-x)} \cdot (xy^2)^{\lg y}$

$x^{3\lg y} = (-x)^{\lg(-x)} \cdot y^{2\lg y}$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 4 и 9.

$\frac{x^{3\lg y}}{(-x)^{\lg(-x)}} = y^{2\lg y}$

=

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90°$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)\,x \end{cases}$$

$y > 3^{81}$ $x \to 0$

$y < 85$ $3^x + 4 \cdot 3^{81} = 85 + 3^{81}x - x$

$3^{81}(x-4) = 3^x + x - 85$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

$15 + 20 = 45$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

16875	5
3375	5
675	5
135	5
27	3
9	3
3	3
1	

$9 \cdot 10^7$

$\sin 7x + \sin 3x = 2\sin\frac{7x+3x}{2}\cos\frac{7x-3x}{2} = 2\sin 5x\cos 2x$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

555533331

$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha$

Всего чисел

$8 \cdot 9$

$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$

$\cos 7x - \sin 7x + \cos 3x - \sin 3x = \cos 10x \cdot \sqrt{2}$

$\cos 7x + \cos 3x - (\sin 7x + \sin 3x) = \sqrt{2}\cos 10x$

$\cos 7x = \sin\left(7x+\frac{\pi}{2}\right)$

$\sin\left(7x+\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(3x+\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(5x+\frac{\pi}{2}\right)\cos 2x$

$2\cos 5x\cos 2x$

$\cancel{\sqrt{2}}\cdot\cos\left(7x+\frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos 10x = \cos(3x+7x) = \cos 3x\cos 7x - \sin 3x\sin 7x$

$\cos 7x - \sqrt{2}\cos 3x\cos 7x + \cos 3x$

$\frac{7x+\frac{\pi}{4}+3x+\frac{\pi}{4}}{2} \quad \frac{10x+\frac{\pi}{2}}{2} = 5x+\frac{\pi}{4}$

$2\cos 5x\cos 2x - 2\sin 5x\sin 2x = \sqrt{2}\cos 10x$

$\cos\left(7x+\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(7x+\frac{3\pi}{4}\right) - \sin\left(7x-\frac{\pi}{4}\right)$

$-\sin\left(7x-\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right) = \cos 10x$

$-\sin\left(\frac{5x-\pi}{4}\right)\cdot\cos 2x = \cos 10x$

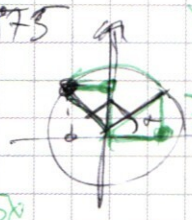
$\cos 5x - \sin 5x = \sqrt{2}\cos\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)$

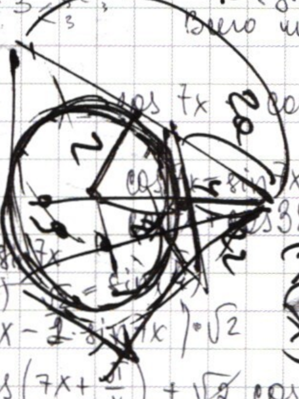
$\cancel{2(\cos 5x\cos 2x - 2\sin 5x\sin 2x)}$

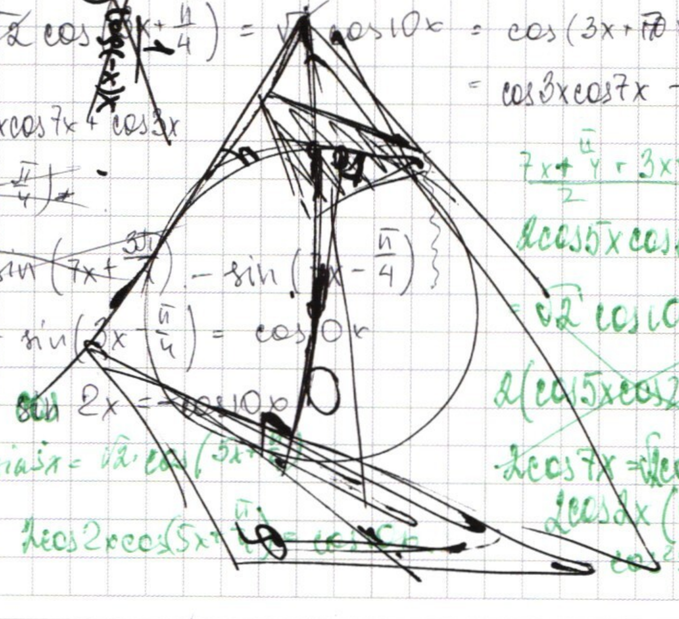
$2\cos 2x\cos\left(5x+\frac{\pi}{4}\right) = \cos 10x$

$2\cos 2x(\cos 5x - \sin 5x) + \cos 10x$

$\cos^2 5x - \sin^2 5x$







☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$x < 0.$

$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$

$\sqrt{2}\cos\left(7x+\frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos 10x$

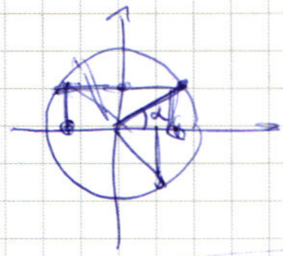
$2\cos\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)\cos 2x = \cos 10x$

$2\cos\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)\cos 2x = \cos\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)$

$2\cos\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)\cos 2x = \cos\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(5x-\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)$

$\cos 5x - \frac{\pi}{4} = \cos 2x$

$5x - \frac{\pi}{4} = \pm 2x$



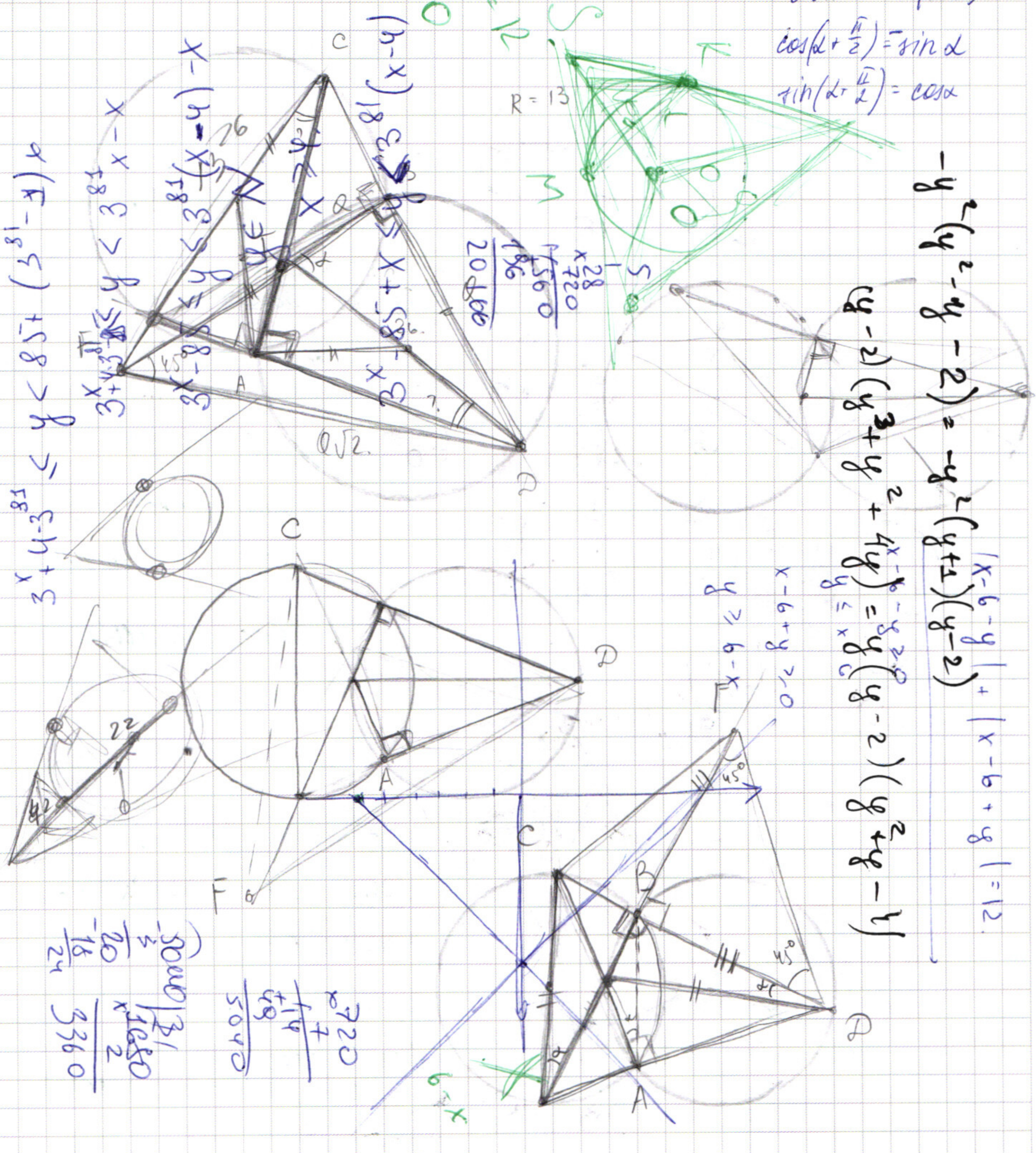
$\cos\alpha = \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$

$\sin\alpha = \cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$

$\cos\alpha = \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$

$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha$

$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha$



$-y^2(y^2-y-2) = -y^2(y+1)(y-2)$

$(y-2)(y^3+y^2+4y) = y(y-2)(y^2+y-4)$

$|x-6-y| + |x-6+y| = 12$

$3^x + 4\cdot 3^{81} \le y < 8\sqrt{5} + (3^{81}-x)x$

черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание 1.

1. Найдём все простые множители числа 16875

$16875 = 3^3 \cdot 5^4$

16875	3
5625	3
1875	3
625	5
125	5
25	5
5	5
1	

Минимальное количество цифр в этой записи 6 $(16875 = 9\cdot3\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5)$, максимальное – 7 $(16875 = 3\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5)$

Чтобы представить это в виде 8-значного числа, необходимо добавить единицы к записи числа.

I. 6 цифр (+ 2 единицы)

3 9 5555 11: используются 4 различных символа.

II. 7 цифр (+ 1 единица)

333 5555 1: используются 3 различных символа

I. Расстановок 5-к: $8\cdot7\cdot6\cdot5 = \frac{8!}{4!\cdot4}$ Среди них по 2 одинаковых с единичками

Варианты расстановок кроме 5: $4\cdot3\cdot2\cdot1$

$n_1 = \frac{8!}{4!}\cdot\frac{4!}{4\cdot2} = \frac{8!}{8} = 7! = 4\cdot7\cdot6! = 720\cdot7 = \cancel{2016}\ \underline{5040}$

II. Расстановок 5-к $8!/(4!\cdot4!) =$

Остальных: $\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{3}$ → Среди них по 3 одинак. 3-ки

$(4\cdot2\cdot1)$

$n_2 = \frac{8!}{4!\,4!}\cdot4\cdot2\cdot1 = \frac{8!\cdot4!}{4!\cdot4\cdot3} = 2\cdot\frac{7!}{3} = 5040\cdot\frac{2}{3} = 3360$

Всего: $5040 + 3360 = \underline{8400}$ $\boxed{\text{Ответ: } 8400}$

Задание 2.

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\cos 7x - \sin 7x + \cos 3x - \sin 3x = \sqrt{2}\cdot\cos 10x$$

$$\cancel{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 7x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 7x\right) + \cancel{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 3x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 3x\right) = \cancel{\sqrt{2}}\cdot\cos 10x$$

$$\cos\left(7x+\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right) = \cos 10x$$

$$2\cos\frac{7x+\frac{\pi}{4}+3x+\frac{\pi}{4}}{2}\cos\frac{7x+\frac{\pi}{4}-3x-\frac{\pi}{4}}{2} = \cos 10x$$

$$2\cos\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)\cos 2x = \cos\left(\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)+\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$2\cos\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)\cos 2x = \cos\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)$$

$*$ $\sin\left(5x+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)$; $\sin\left(5x-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(5x-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)$

$$\cancel{2}\cos\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)\cos 2x = \cancel{2}\cos\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right) - \cos 2x\right) = 0$$

$$\cos\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left(-2\sin\frac{5x-\frac{\pi}{4}+2x}{2}\sin\frac{5x-\frac{\pi}{4}-2x}{2}\right) = 0 \quad \Big|:(-2)$$

$$\cos\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(\frac{7}{2}x-\frac{\pi}{8}\right)\cdot\sin\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{8}\right) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)=0,\\ \sin\left(\frac{7}{2}x-\frac{\pi}{8}\right)=0,\\ \sin\left(\frac{3}{2}x-\frac{\pi}{8}\right)=0;\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}5x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z};\\ \frac{7x}{2}-\frac{\pi}{8}=\pi k,\ k\in\mathbb{Z};\\ \frac{3x}{2}-\frac{\pi}{8}=\pi l,\ l\in\mathbb{Z};\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{ll}5x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}; & \Big|:5\\ 7x=\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}, & \Big|:7\\ 3x=\frac{\pi}{4}+2\pi l,\ l\in\mathbb{Z}; & \Big|:3\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{20}+\frac{\pi n}{5},\ n\in\mathbb{Z},\\ x=\frac{\pi}{28}+\frac{2\pi k}{7},\ k\in\mathbb{Z},\\ x=\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi l}{3},\ l\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

$\boxed{\text{Ответ: } \left\{\frac{\pi}{20}+\frac{\pi n}{5};\ \frac{\pi}{28}+\frac{2}{7}\pi k;\ \frac{\pi}{12}+\frac{2}{3}\pi l\right\};\ \{n,k;l\}\subset\mathbb{Z}}$

Рег. №: М11-ЗГ-0092
Класс участия: 11 класс
Место проведения: Зеленоград (Москва)
Дата проведения: 22 февраля 2020 г.
Время начала (местное): 11:00

1 0 1 2 4 0 2 2

2 0 0 0 8 8 2 7

МФТИ

Олимпиада школьников «Физтех» по математике

Заключительный этап 2020 г.

Анкета участника

Данная анкета предъявляется участником вместе с документом, удостоверяющим личность, при входе на олимпиаду. По окончании написания олимпиады анкета обязательно вкладывается в работу. Работа без предоставления анкеты недействительна и не проверяется. Анкета без подписей недействительна.

Клейменов	Максим	Игоревич	16.01.2003	17 лет
Фамилия	Имя	Отчество	Дата рождения	Возраст

Российская Федерация	г Москва	г Москва
Страна	Регион	Населенный пункт

Паспорт гражданина РФ	45 17	975739	13.02.2017	770-125
Документ, удостоверяющий личность	Серия	Номер	Дата Выдачи	Код Подразделения

Российская Федерация	г Москва	г Москва
Страна школы	Регион Школы	Населенный Пункт Школы

11 класс	ГБОУ ШКОЛА № 1543
Класс обучения	Полное название образовательного учреждения

+7 929 640 18 10	kleymenov.max@yandex.ru
Мобильный телефон	E-mail

Согласие на обработку персональных данных

Я согласен на сбор, хранение, использование, распространение (передачу) и публикацию своих персональных данных, а также олимпиадных работ, в том числе в сети "Интернет". Я согласен, что мои персональные данные будут ограниченно доступны организаторам олимпиады для решения административных и иных рабочих задач. Я проинформирован, что под обработкой персональных данных понимаются действия (операции) с персональными данными в рамках выполнения Федерального закона №152 от 27 июля 2006 г., конфиденциальность персональных данных соблюдается в рамках исполнения Операторами законодательства Российской Федерации. Я согласен на получение информационных писем от организаторов олимпиады на E-mail, указанный при регистрации.

Я подтверждаю, что все указанные мной данные верны и в указанном виде будут использованы при печати диплома олимпиады в случае его получения. Я согласен на передачу данных в государственный информационный ресурс о детях, проявивших выдающиеся способности, созданный во исполнение Постановления Правительства Российской Федерации № 1239 от 17 ноября 2015 г.

Я подтверждаю, что ознакомлен с Положением и Регламентом проведения олимпиады школьников "Физтех", а также с правилами оформления и условиями проверки работы.

«19» февраля 2020 г

М. Клейменов
Подпись участника олимпиады

Злобина Ю. С.
ФИО законного представителя

мать
Степень родства

Подпись законного представителя

Анкета без подписи недействительна.
Анкета обязательно должна быть вложена в работу!

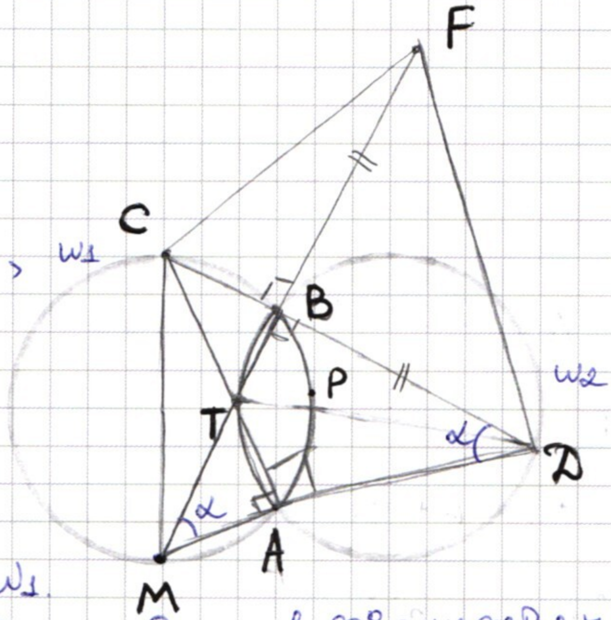
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание 6.

а) 1. $EB \cap CA = T$.

Т.к. $\angle DBT$ и $\angle DAT$ прямые, $TBDA$ вписан по признаку =>

=> T лежит на правой окр-ти



2. $FB \cap \omega_1 = \{B; M\}$.

Т.к. $\angle CBM = 90^\circ$ (по условию)

CM — диаметр окружности ω_1. (вписанный угол в 90° опирается на диаметр)

($CM = 2R = 2 \cdot 13 = 26$)

3. Т.к. $\omega_1 = \omega_2$ (и $R_1 = R_2$), $\overset{\frown}{BPA} = \overset{\frown}{BTA} = 2\alpha$ => $\left.\begin{array}{l}\angle BDA = \alpha \\ \angle BMA = \alpha\end{array}\right\}$ как вписанные, опирающиеся на дугу 2α

=> $\triangle MBD$ — р/б с основанием MD =>

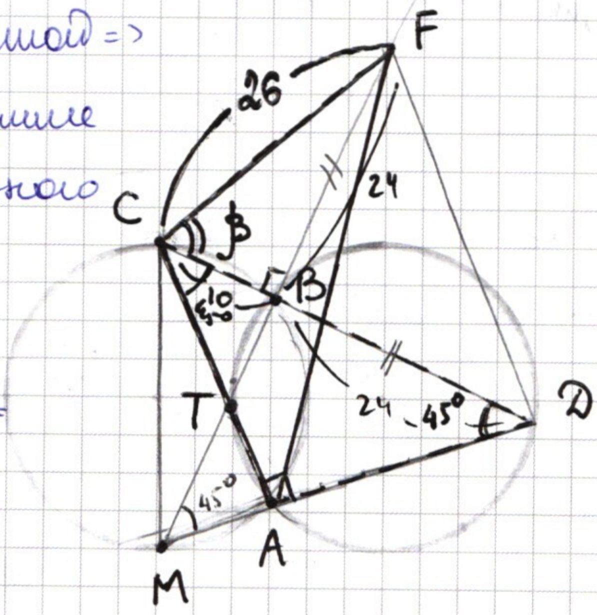
=> $MB = BD = BF$

4. $\triangle CFM$: $CB \perp MF$ (по условию), $MB = BF$ => CB — медиана и высота $\triangle CMF$ => $\triangle CMF$ — р/б с основанием MF => $CF = CM = \underline{\underline{26}}$.

б) 1. $\angle CAM$ по условию прямой =>

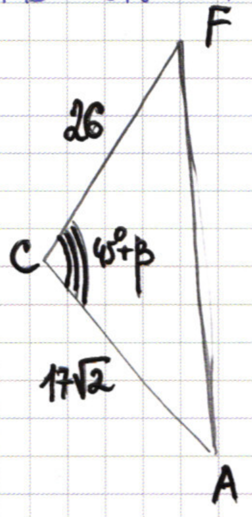
=> $\angle DCA = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ (по сумме острых углов прямоугольного $\triangle CDA$)

2. По теореме Пифагора в $\triangle CFB$: $FB^2 = 26^2 - 10^2 = 16 \cdot 36 = 6^2 \cdot 4^2 = 24^2$ => $FB = 24$



Задание 6 (продолжение)

$FB = BD = 24 \Rightarrow CD = 34 \Rightarrow AD = AC = 34\sin 45^\circ = 17\sqrt{2}$



ΔCBF: $\sin\beta = \frac{24}{26} = \frac{12}{13}$; $\cos\beta = \frac{10}{26} = \frac{5}{13}$

$\sin(45^\circ+\beta) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\beta + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{5}{13} + \frac{12}{13}\right) = \frac{17\sqrt{2}}{26}$

$S_{\Delta AFC} = \frac{1}{2}\cdot 26\cdot 17\sqrt{2}\cdot \sin(45^\circ+\beta) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\cancel{26}\cdot 17\sqrt{2}\cdot 17\sqrt{2}}{\cancel{26}} =$

$= 17^2 = 289$ ед^2

$\boxed{\text{Ответ: а) } 26 \quad \text{б) } 289 \text{ ед}^2}$

Задание 5

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12, & \text{— ломаная (1)} \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a; & \text{— окружность (2)} \end{cases}$$

(1) $x-6-y \geq 0$ $\qquad$ $x-6+y \geq 0$

$y \leq x-6$ $\qquad$ $y \geq -x+6$

1) $x-6 \leq y \leq -x+6$

$-x+6+\cancel{y}-x+6-\cancel{y} = 12$

$-2x = 0$

$x = 0$ — прямая, совп. с осью y на $[-6; 6]$

2) $-x+6 \leq y \leq x-6$

$x-6-\cancel{y}+x-6+\cancel{y} = 12$

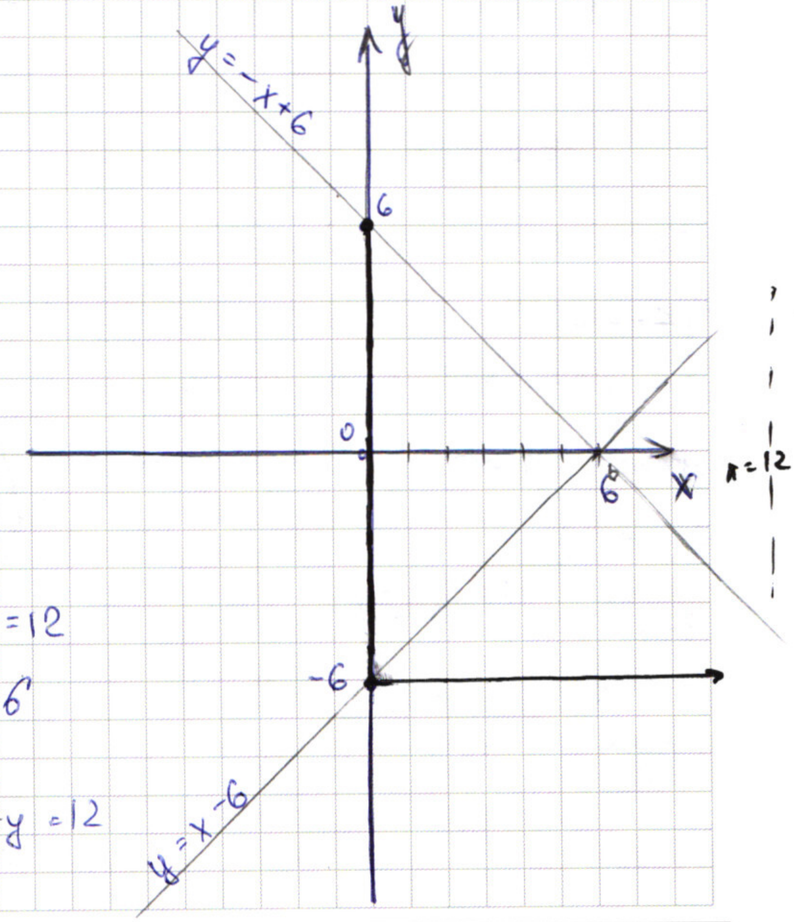
$2x = 24$; $x = 12$

3) $\begin{cases} y \leq -x+6, \\ y \leq x-6; \end{cases} \rightarrow \cancel{x}-\cancel{6}-y-\cancel{x}+\cancel{6}-y = 12$

$2y = -12$; $y = -6$

4) $\begin{cases} y \geq -x+6 \\ y \geq x-6 \end{cases} \rightarrow -\cancel{x}+\cancel{6}+y+\cancel{x}-\cancel{6}+y = 12$

$y = 6$.

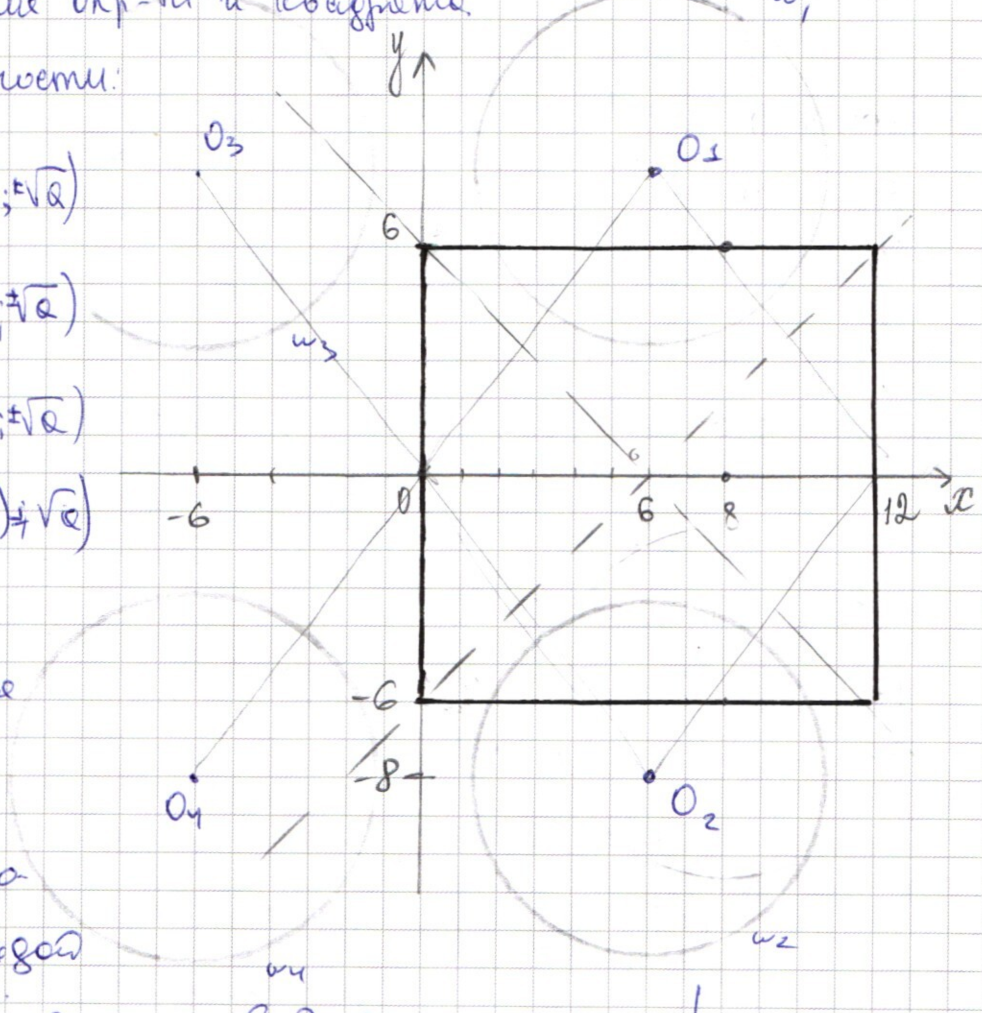


ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание 5 (продолжение)

Т.о. имеется ур-ние окр-ти и квадрата.

(2) ур-ние окружности:



$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$; $\rightarrow \omega_1(O_1(6;8); \pm\sqrt{a})$

$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$; $\rightarrow \omega_2(O_2(6;-8); \pm\sqrt{a})$

$\begin{cases} x \leq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$, $\omega_3(O_3(-6;8); \pm\sqrt{a})$

$\begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$; $\omega_1(O_4; (-6;-8); \pm\sqrt{a})$

2 решения:

1) ω_1 и ω_2 касаются квадрата

Решения всегда симметричны относительно оси Ox, т.е. с каждой стороны от неё должно быть только одно решение, или оба решения должны лежать на оси Ox

(*). Касаются: $R = \pm\sqrt{a} = |-6-(-8)| = 2 \Rightarrow a = 4$

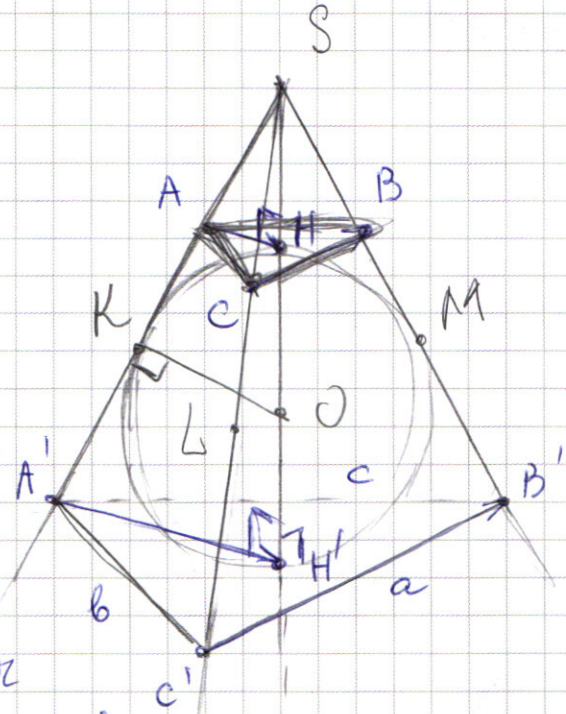
(**) Когда все 4 окружности пересекаются в точке (0;0)

~~$\sqrt{a} = \sqrt{(R-6)^2}$~~ $R = |\overrightarrow{OO_1}| = \sqrt{36+64} = 10 \Rightarrow R = 10 = \pm\sqrt{a} \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 100$

$\boxed{\text{Ответ: } a \in \{4, 100\}.}$

Задача 4



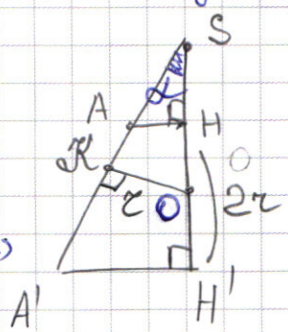
1. $\left.\begin{array}{l}(ABC) \perp SO \\ (A'B'C') \perp SO\end{array}\right\} (ABC) \parallel (A'B'C')$

2. $AC \in (A'SC')$, $AC \in (ABC)$
$\underbrace{A'C' \in (A'SC'); \quad A'C' \in (A'B'C')}$
$AC \parallel A'C'$ по признаку
Аналогично, $BC \parallel B'C'$
и $AB \parallel A'B'$

3. $\angle BAC = \angle B'A'C'$ (как углы между взаимнопараллельными прямыми)
Аналогично, $\angle ABC = \angle A'B'C'$ и $\angle ACB = \angle A'C'B'$

$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$; $\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = k^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow k = \frac{2}{3}$ (где k - коэф. подобия)

4. Т.к $SO \perp (ABC)$, $AH \perp SO$
(где $H = SO \cap (ABC)$, $H' = SO \perp (A'B'C')$)
$SO \perp (A'B'C')$, $AH' \perp SO \Rightarrow$
$\Rightarrow AH \parallel AH'$ $(A'SH')$ ⟶



5. По теореме о пропорциональных отрезках $\frac{SA}{SA'} = \frac{AH}{A'H'} = k \Rightarrow$ (т.к. AH и $A'H'$ - соответствующие элементы подобных треугольников)
$\Rightarrow \frac{SA}{SA'} = \frac{2}{3}$

6. По теореме Фалеса (обобщённой) для $\angle ASH$:
$\frac{AS}{A'S} = \frac{HS}{H'S} = \frac{2}{3}$; Пусть $HH' = 2r$, а $SH = x$ тогда: $\frac{x}{x+2r} = \frac{2}{3}$
$2x + 4r = 3x \Rightarrow x = 4r$

7. $\triangle SOK$: $OK = r$, $OK \perp SA'$ как радиус в точку касания
$SO = 4r + r = 5r \Rightarrow \sin\alpha = \frac{r}{5r} = \frac{1}{5}$ $\boxed{\text{Ответ: } \arcsin\frac{1}{5}}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

МФТИ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание 3.

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \ (*) \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

~~$y>0$~~ $-xy>0$

$\begin{cases} y>0, \\ -xy>0; \end{cases}$ $\begin{cases} y>0, \\ x<0. \end{cases}$

ОДЗ: $y \in (0;+\infty)$, $x \in (-\infty;0)$

(*) $x^{4\lg y} = (-x)^{\lg(-x)} \cdot (-x)^{\lg y} \cdot y^{2\lg y}$

Все множители >0, прологарифмируем по основанию 10

$$\lg x^{4\lg y} = \lg(-x)^{\lg(-x)} + \lg(-x)^{\lg y} + \lg y^{2\lg y}$$

т.к $|x| = -x$

$$4\lg y \lg(-x) = \lg^2(-x) + \lg y \lg(-x) + 2\lg^2 y$$

Пусть $\lg y = a$, $\lg(-x) = b$ тогда

$4ab = b^2 + ab + 2a^2$; $2a^2 - 3ab + b^2 = 0$

$(2a-b)(a-b) = 0$

$\left[\begin{array}{l} b = 2a, \\ b = a; \end{array}\right.$ Выполним обр. замену! $\left[\begin{array}{l} \lg(-x) = 2\lg y \\ \lg(-x) = \lg y \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} -x = y^2, \ (1) \\ -x = y. \ (2) \end{array}\right.$

Рассмотрим по отдельности для каждого случая

(1) $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \\ x = -y^2 \end{cases} \\ \begin{cases} 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \\ x = -y; \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2y^2 + y^3 - y^4 + 4y^2 - 8y = 0 \\ x = -y^2 \end{cases} \\ \begin{cases} 2y^2 + y^2 - y^2 + 4y - 8y = 0 \\ x = -y \end{cases} \end{array}\right.$

$\longrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cancel{y(2y^2+y^2-2y^3z+4z)}\ y^4-y^3-6y^2+8y=0,\\ x=-y^2;\end{cases}\\ \begin{cases}2y^2-4y=0,\\ x=-y;\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y(y^3-y^2-6y+8)=0,\\ x=-y^2\end{cases}\\ \begin{cases}2y(y-2)=0,\\ x=-y\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=0\\ x=0\end{cases}\\ \begin{cases}y^3-y^2-6y+8=0, \quad (*)\\ x=-y^2;\end{cases}\\ \begin{cases}y=2\\ x=-2;\end{cases}\end{array}\right.$$

$(*)$ $\begin{cases}y^3-y^2-6y+8=0\\ x=-y^2\end{cases}$

Заметим, что $y=2$ - корень верхнего уравнения

$8-4-12+8=0$

$16-16=0$ В.

$$\begin{array}{l|l} y^3-y^2-6y+8 & y-2 \\ \hline -\ y^3-2y^2 & y^2+y-4 \\ \quad y^2-6y+8 & \\ \quad -\ y^2-2y & \\ \qquad -4y+8 & \\ \qquad -4y+8 & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$$\begin{cases}(y-2)(y^2+y-4)=0,\\ x=-y^2;\end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=2,\\ x=-4;\end{cases}\\ \begin{cases}y^2+y-4=0 \quad (**)\\ x=-y^2\end{cases}\end{array}\right.$$

$(**)$ $y^2+y-4=0$

$$y=\frac{-1\pm\sqrt{1+16}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}=\left[\begin{array}{l}\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\\ \frac{-1-\sqrt{17}}{2}\notin ОДЗ\end{array}\right.$$

ОДЗ: $y>0 \Rightarrow y=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$;

$\sqrt{17}-9<0$; $\sqrt{17}<9$; $17<81$ (+) $\in$ ОДЗ

$$x=-\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)^2=-\frac{17-2\sqrt{17}+1}{2}=-9+\sqrt{17}=\sqrt{17}-9$$

$$\boxed{\text{Ответ: } \left\{(0;0),\ (-2;2),\ (-4;2),\ \left(-9+\sqrt{17};\ \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)\right\}.}$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)