



Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

Разложим число 16845 на простые множители:

$$16845 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 5^4 \cdot 3^3$$

Т.к. цифры в числе от 0 до 9, то есть 2 варианта, из каких цифр состоит число:

1) 5, 5, 5, 5, 3, 3, 3, 1

2) 5, 5, 5, 5, 9, 3, 1, 1

Теперь посчитаем их количество. ~~Этого можно воспользоваться формулой~~

Пусть у нас n -значное число, в котором k цифр одного значения (например, 2) и m цифр другого значения (тоже $\neq$ одинаковые, например, 5):

$$\underbrace{\overbrace{555}^{m \text{ штук}} \overbrace{222}^{k \text{ штук}} \dots}_{n \text{ цифр}}$$

Удобно посчитать кол-во возможных чисел, которые

можно составить из данных цифр:

$$N = \frac{n!}{m! \cdot k!}$$

Посчитаем N для данной задачи:

$$N = \frac{8!}{4! \cdot 3!} + \frac{8!}{4! \cdot 2!} = 8 \cdot 7 \cdot 5 + 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 = 56 \cdot 20 = 1120$$

Ответ: 1120 чисел можно составить

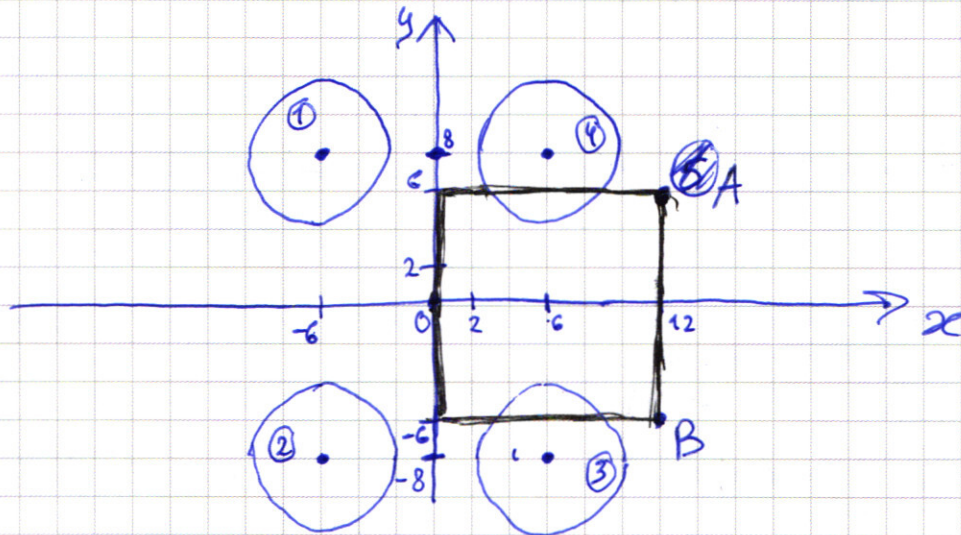
N5

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 & (1) \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a & (2) \end{cases}$$

$$(2) \text{ ур-ие } - \text{уравнение окружности радиуса } \sqrt{a} \text{ с центрами в точках } (-6; -8); (-6; 8); (6; -8); (6; 8).$$

(1) ур-ие - ~~фигура~~ квадрат со стороной 12. Заметим, что у модулей одинаковые части: $x-6$. Значит центр у этого квадрата в точке $(6; 0)$

Построим ~~обе~~ функции ~~на~~ графически:



(1) график построен синими чернилами (окружности)

(2) график построен черными чернилами (квадрат)

~~(2) график ~~во~~ пересекает~~ система имеет ровно 2 решения, когда ~~на~~ окружности 3 и 4 касаются сторон квадрата



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Это происходит тогда, когда радиус окружности равен 2:

$$\sqrt{a} = 2$$

$$a = 4$$

~~Ответ: при $a = 4$~~

Также система имеет 2 решения, когда ~~квадрат~~ квадрат лежит внутри окружностей 3 и 4, а окружности 1 и 2 касаются квадрата в точках B и A соответственно.

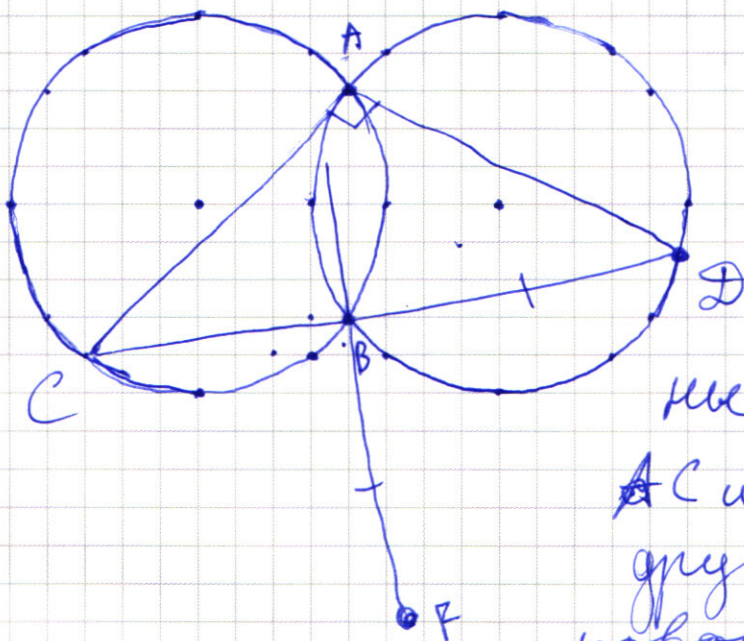
~~В~~ В этом случае радиус окружностей должен быть равен (по т. Пифагора): $\sqrt{a} = \sqrt{18^2 + 14^2} = \sqrt{324 + 196} =$
 $= \sqrt{520}$

$$a = 520$$

Ответ: при $a = 4$ и $a = 520$ система имеет 2 решения.

NB

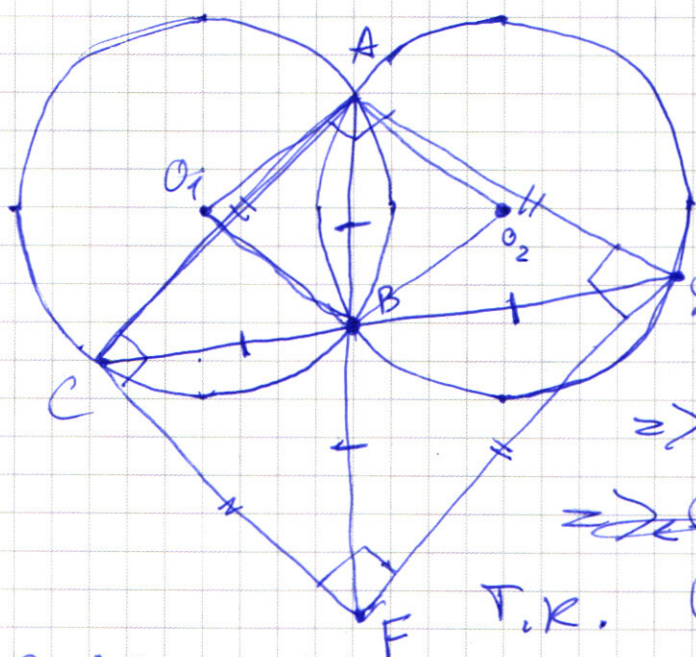
Воспроизведите чертеж по условию задачи (см. следующую стр.)



т.к. $\angle CAD = 90^\circ$,
то $AC = AD$
(потому что
окружности равны,
и хорды ~~AB~~
 AC и AD переходят
друг в друга при
повороте на 90°)

Следовательно $\angle ACD = \angle ADC = 45^\circ$.

т.к. CF проходит через т. B , то
 $\triangle ACF$ симметричен относительно
 $AB \Rightarrow BD = AB = BC = BF \Rightarrow ACF$ -
квадрат:



т.к. AC и AD
переходят друг
в друга при
повороте на 90° ,
аналогично

$$\text{то } \angle O_1AC = \angle O_2AD \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle O_1AO_2 = 90^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle O_1BO_2 = 90^\circ$$

т.к. $O_2B = O_2A = O_1A = O_1B$ и
 $\angle O_1AO_2 = 90^\circ$, то AO_2BO_1 - квадрат $\Rightarrow AB = \sqrt{2}R$
 $\Rightarrow AD = \sqrt{2}AB = 2R \Rightarrow AD$ и AC - диаметры ок-
ружностей

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$CF = AC = AD = 2R = 26$$

$$S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} BC \cdot AF = \frac{1}{2} BC \cdot 2BC = BC^2 = 100$$

Ответ: а) $CF = 26$; б) $S_{\triangle ACF} = 100$

№3

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{(\lg(x) + \lg y)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases} \quad (\text{т.к. } y > 0, \text{ то } -x > 0)$$

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg y} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x^4}{y^2} = -x \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^4 = -x y^2 \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x^3 = y^2 \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases}$$

Решим 2-е ур-ие относительно x , учитывая ОДЗ 1-ого ур-ия: $y > 0$; $x < 0$

$$x^2 + 4x + xy + 8y - 2y^2 = 0$$

$$x^2 + (4+y)x + 8y - 2y^2 = 0$$

$$\begin{aligned} D &= (4+y)^2 - 4(8y - 2y^2) = 16 + 8y + y^2 - 32y + 8y^2 = \\ &= 9y^2 - 24y + 16 = (3y - 4)^2 \end{aligned}$$

$$x = \frac{-(4+y) \pm (3y-4)}{2}$$

$$x_1 = -2y$$

$$x_2 = y - 4$$

Учитывая ОДЗ:

$$\begin{cases} \begin{cases} x = -2y \\ y > 0 \end{cases} & \text{1 случай} \\ \begin{cases} x = y - 4 \\ y > 4 \end{cases} & \text{2 случай} \end{cases}$$

Подставим x в первое ур-ие, предварительно упростив его:

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = 1 + (-x)^{\lg y}$$

$$\frac{x^4}{y^2} = 1 - x$$

1 случай;



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{16y}{y^2} = 1 + 2y$$

$$16y^2 = 1 + 2y$$

$$16y^2 - 2y - 1 = 0; \quad D = 4 + 64 = 68 = 4 \cdot 17$$

$$y = \frac{2 \pm 2\sqrt{17}}{32}$$

т.к. $y > 0$, то $y = \frac{1 + \sqrt{17}}{16} \Rightarrow x = -\frac{1 + \sqrt{17}}{8}$

2 случая

$$\frac{(y-4)^4}{y^2} = 1 - y + 4$$

$$(y^2 - 8y + 16)^2 = 5y^2 - y^3$$

$$y^4 + 64y^2 + 256 - 16y^3 - 256y + 32y^2 = 5y^2 - y^3$$

$$y^4 - 15y^3 + 91y^2 - 256y + 256 = 0$$

не забываем, что $y \in (0; 4)$

на этом интервале корней нет

~~ответ: $x = -\frac{1 + \sqrt{17}}{8}$~~

ответ: $\left(-\frac{1 + \sqrt{17}}{8}; \frac{1 + \sqrt{17}}{16} \right)$

и т.

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases} \Rightarrow 3^x + 4 \cdot 3^{81} < 85 + (3^{81} - 1)x$$

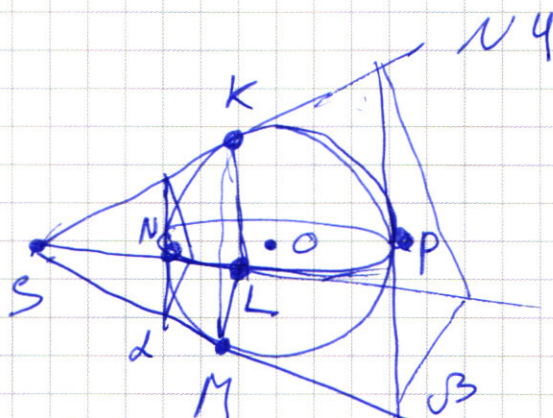
$$3^x + 4 \cdot 3^{81} - 3^{81} \cdot x + x - 85 < 0$$

$$3^x + (4-x) \cdot 3^{81} + x - 85 < 0$$

$$3^x + (4-x) \cdot 3^{81} + x - 85 = 0 \text{ при } x=4 \text{ и } x=85$$

следовательно, $x \in (4; 85)$

$$y \in [3^5 + 4 \cdot 3^{81}; 3^{81} \cdot 85)$$



т.к. SK, SL и SM — касательные, то

$$SK = SL = SM$$

Пусть плоскость α

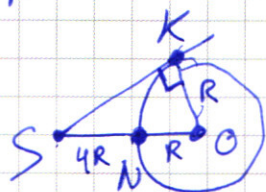
(поверхность сечения которой γ) касается со сферой в т. N, ~~тогда~~ а β (с поверхностью сечения δ) — в т. P

тогда:

$$\frac{SN}{SP} = \sqrt{\frac{S_\alpha}{S_\beta}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}, \text{ где } SP = SN + 2R,$$

~~SN~~ где R — радиус сферы

$$\frac{SN}{SN + 2R} = \frac{2}{3}, \text{ откуда } SN = 4R$$



Найдём $\angle KSO$ (зная, что KSO — прямоугольный Δ -к, и зная $SO = 5R$ и $KO = R$)

$$\sin(\angle KSO) = \frac{R}{5R} = \frac{1}{5}$$

$$\angle KSO = \arcsin(0,2)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Найдём $SK = SL = SM$;

$$SK = \sqrt{(SR)^2 - R^2} = 2\sqrt{6}R$$

$$\frac{S_{(KLM)}}{S_L} = \frac{SK}{4R} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$S_{(KLM)} = 6$$

Ответ: $\angle KSO = \arcsin(0,2)$

$$S_{(KLM)} = 6$$

$$\cos 4x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) + \sin(-4x) + \sin(-3x) =$$

$$= \sqrt{2} \cos 10x$$

$$\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) + \sin(-4x)\right) + \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) + \sin(-3x)\right) =$$

$$= \sqrt{2} \cos 10x$$

~~2 sin~~ Воспользуемся ф-ой $\sin x + \sin y =$

$$= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2};$$

$$2 \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} - 4x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{2}\right) + 2 \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} - 6x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{2}\right) =$$

$$= \sqrt{2} \cos 10x$$

$$2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - 4x\right) + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 4x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = \cos 10x$$

$$2 \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} - 10x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{-4x}{2}\right) = \cos 10x$$

$$2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) \cdot \cos 2x = \cos 10x$$

$$2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos 5x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x \right) \cdot \cos 2x = \cos^2 5x - \sin^2 5x$$

$$\sqrt{2} \cdot \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = (\cos 5x - \sin 5x)(\cos 5x + \sin 5x)$$

$$I \quad \cos 5x = \sin 5x$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z} ; x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z}$$

$$II \quad \sqrt{2} \cdot \cos 2x = \cos 5x + \sin 5x$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x \in \left\{ \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5} ; -\frac{\pi}{4} + \pi k \right\}, k \in \mathbb{Z}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 16'875 \overline{) 5} \\ \underline{15} \\ 18 \\ \underline{15} \\ 37 \\ \underline{35} \\ 25 \\ \underline{25} \\ 0 \end{array}$$

$$333 \overline{) 5555} \begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}$$

$$55559311$$

$$55553331$$

$$\frac{8!}{4! \cdot 3!} + \frac{8!}{4! \cdot 2!} =$$

$$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2 \cdot 2} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2} =$$

$$\sin 15^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{2 \cos 15^\circ} =$$

$$= 8 \cdot 7 \cdot 5 + 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 =$$

$$= 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 = 20 \cdot 56 = 1120$$

$$\sin x = \frac{\sin 2x}{2 \cos x} = \frac{\sin 2x}{2 \sqrt{1 - \sin^2 x}}$$

$$2 \sin x \sqrt{1 - \sin^2 x} = A$$

$$4 \sin^2 x - 4 \sin^4 x = A^2 = \frac{1}{4}$$

$$16 \sin^4 x - 16 \sin^2 x + 1 = 0$$

$$D = 256 - 16 \cdot 16 - 4 \cdot 16 = 12 \cdot 16 = 192$$

$$\sin^2 x = \frac{16 \pm 8\sqrt{3}}{32} = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{4}$$

$$\sin x = \sqrt{\frac{2 \pm \sqrt{3}}{4}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$30 + 30 = \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \sin \frac{1}{2}$$

$$60 + 30 =$$

$$2 \sin \frac{d-\beta}{2} \cdot \sin \frac{d+\beta}{2}$$

$$\sin + \sin = 2 \cos \frac{3}{2} = 2 \cdot \cos \frac{d-\beta}{2} \cdot \sin \frac{d+\beta}{2}$$

$$2 \sin 2x \cdot \sin 5x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \sin 5x (\sin 2x - \cos 2x) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$\sqrt{2} \sin 5x \left(\frac{3!}{2!} \right)^{112}$$

$$\sin 2x + \cos(\pi - 2x)$$

$$\sin 30^\circ + \cos 60^\circ = \sin 30^\circ + \cos 30^\circ$$

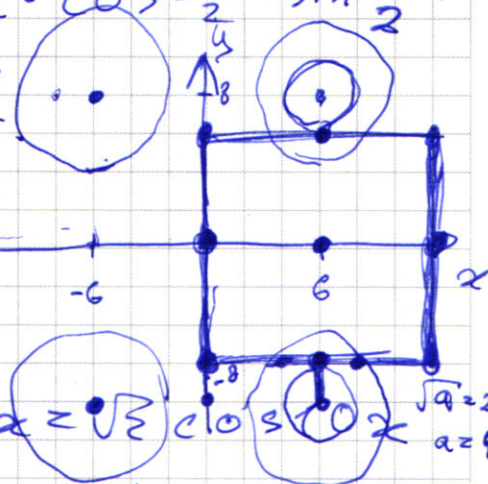
$$= \frac{1}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\begin{matrix} 112 \\ 121 \\ 211 \end{matrix}$$

$$= 2 \cdot \cos \frac{\pi + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\beta - \alpha}{2}$$

$$2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\ |6-y| + |6+y| = 12 \end{cases}$$



$$\cos 7x \cos 3x - \sin 7x - \sin 3x = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$\cos \left(\sin \left(\frac{\pi}{2} - 7x \right) + \sin \left(\frac{\pi}{2} - 3x \right) - \sin 7x - \sin 3x \right) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} - 7x \right) + \sin(-7x) + \sin \left(\frac{\pi}{2} - 3x \right) + \sin(-3x) =$$

$$= \sqrt{2} \cos 10x$$

$$\sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) \cdot \cos 2x = \cos 10x$$

$$2 \sin \left(\frac{\frac{\pi}{2} - 14x}{2} \right) \cdot \cos \frac{\pi}{4} + 2 \sin \left(\frac{\frac{\pi}{2} - 6x}{2} \right)$$

$$\cdot \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$1112$$

$$\sqrt{2} \left(\sin \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) + \sin \left(\frac{\pi}{4} - 3x \right) \right) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$2 \sin \frac{\frac{\pi}{2} - 10x}{2} \cdot \cos \left(\frac{-4x}{2} \right) = \cos 10x$$

$$2 \sin \left(\frac{\frac{\pi}{2}}{4} - 5x \right) \cdot \cos 2x = \cos 10x$$

$$2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x - \frac{2}{2} \sin 5x \right) \cdot \cos 2x = \cos 10x$$

$$12 \cdot 6 = 30$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81}$$

$$y < 85 + (3^{81} - 1)x$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{81} < 85 + (3^{81} - 1)x$$

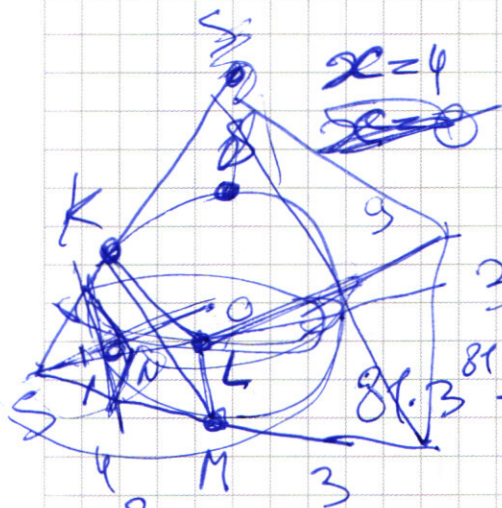
$$3^x + 4 \cdot 3^{81} - 3^{81} \cdot x + x - 85 < 0$$

$$3^x + 3^{81}(4 - x) + x - 85 < 0$$

$$x = 4$$

$$x = 4; \dots 81 + 4 - 85 = 0$$

$$x > 4$$

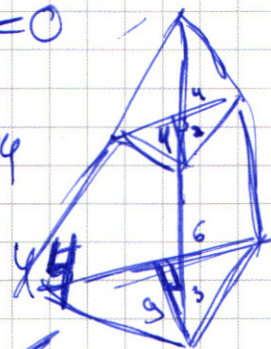


$$3^5 = 3^{81} + 5 - 85 = 3^5(1 - 3^{76}) - 80$$

$$81 \cdot 3^{81} - 81 \cdot 3^{81} + 85 - 85 = 0$$

$$x < 85$$

$$5 \dots 84$$



$$\frac{SN}{2R+SN} \geq \frac{2}{3} \Rightarrow 243 + 4 \cdot 3^{81}$$

$$y < 85 + (3^{81} - 1) \cdot 5$$

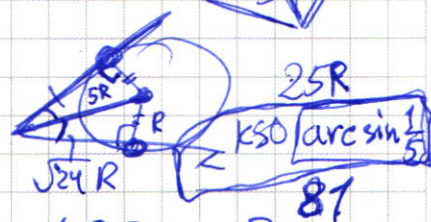
$$SN = 4R$$

$$4R + 2SN = 3SN \Rightarrow 243 - 3^{81} - 80 = 163 - 3^{81}$$

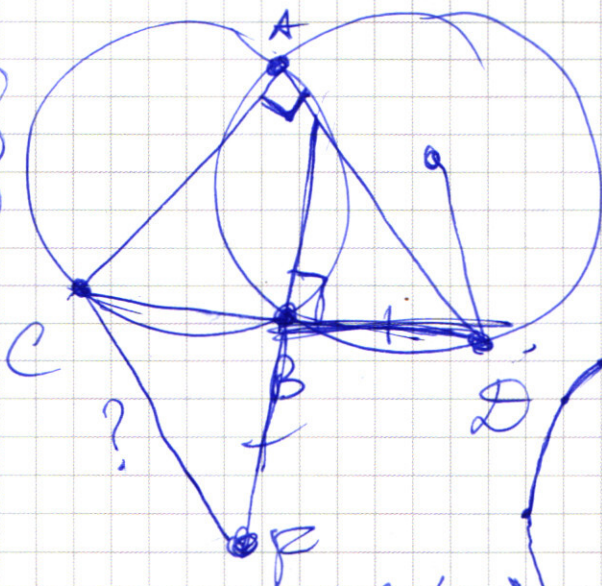
$$SN = 4R$$

$$\frac{\sqrt{24}R}{6R} = \frac{k}{3}$$

$$3^{44} = 81 \cdot 40 + 44 - 85 = 3^{44} - 40 \cdot 3^{81} - 41$$



- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- 6
- 7

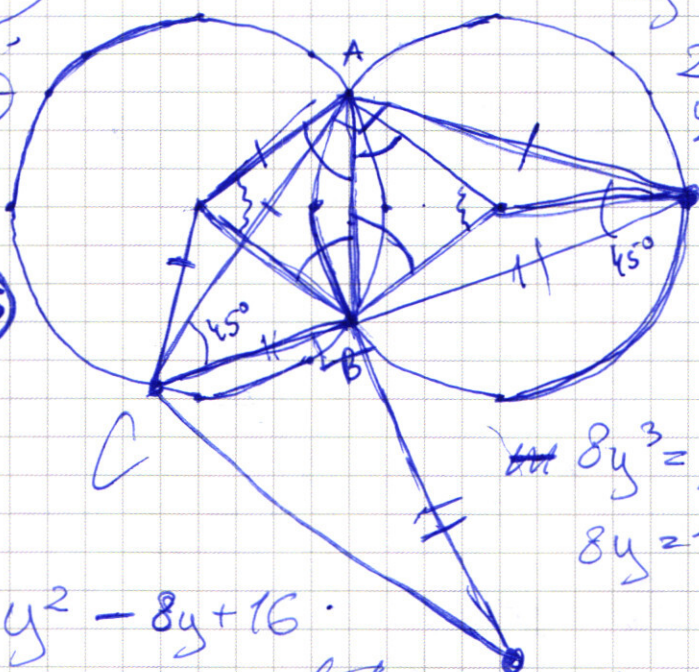


$$\frac{16y^4}{y^2} = 2y \quad \lg 2y^4$$

$$2y = 16y^2$$

$$2 = 16y$$

$$y = \frac{1}{8}$$



$$8y^3 = y^2$$

$$8y = 1$$

$$(y-4)^4 \cdot 2 \lg(2 \cdot 5)$$

$$2 \lg \cdot 2$$

$$-(x^2 + 4x + 4) \neq y^2 - 8y + 16$$

$$y^2 - xy + \frac{x^2}{4} \quad \frac{3}{4}x^2 + 4 \lg \quad x^{\lg y} = 1$$

$$y^2 - xy + \frac{x^2}{4} - \frac{5}{4}x^2 - 4x + y^2 - 8y = 0$$

$$(y - \frac{x}{2})^2 - \left(\sqrt{5} \right) \quad \log_3(9 \cdot 81) =$$

$$x^2 + (4+y)x + 8y - 2y^2 = 0$$

$$D = 16 + 8y + y^2 - 32y + 8y^2 = 9y^2 - 24y + 16 = (3y - 4)^2$$

$$x = \frac{-(4+y) \pm (3y-4)}{2} \geq \frac{-4-y-3y+4}{2} = -2y$$

$$x = -2y \leq 0 \quad y \geq 0$$

$$x = \frac{y}{2} - 4 < 0 \quad y > 8$$

$$\frac{-4-y+3y-4}{2} = y-4$$