

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФ:

Бланк задания должен быть вложен в рз
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $16875 = 3^3 \cdot 5^4$, следовательно все такие 8-значные числа состоят либо из 1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5^(II), либо из 1, 1, 9, 3, 5, 5, 5, 5^(III).
(П.к. ^{исключительно} на 3 делится только цифра 3 и 9, а на 5 только 5)
Как-во способов выбрать число (II) равно: $\frac{8!}{1! \cdot 3! \cdot 4!} = 5 \cdot 7 \cdot 8$,

а (III) равно: $\frac{8!}{2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 4!} = 5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 8$.

Совместенно в сумме получим $5 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 8 = 1120$

Ответ: 1120.

$$3) \begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases}$$

из первого равенства по ФАЗ
 $y > 0, x < 0$.

$$\lg y = \beta, \text{ т.е. } 10^\beta = y.$$

$$\lg |x| = \alpha, \text{ т.е. } 10^\alpha = |x|.$$

Тогда первое равенство пере-
писывается в виде:

$$|x|^{\frac{4\beta}{2}} = y^{\frac{2\beta}{2}} \cdot |x|^{\frac{2\beta}{2} + \beta} \Leftrightarrow |x|^{3\beta - 2} = y^{2\beta} \Leftrightarrow 10^{\frac{2(3\beta - 2)}{2}} = 10^{2\beta}$$

$$\Rightarrow (2\beta - 2)(\beta - 2) = 0 \Leftrightarrow 2\beta^2 - 2^2 - 3\beta\alpha = 0 \Leftrightarrow 10^{\frac{2(3\beta - 2)}{2} - 2\beta} = 1$$

$$\beta = 2 \text{ или } 2\beta = 2.$$

$$\beta = 2, \text{ имеем } |x| = y, \text{ т.е. } y = -x.$$

Это подставляем во второе равенство и получим

$$2y^2 - 4y = 0 \Leftrightarrow 2y(y - 2) = 0, \text{ т.е. } y = 2, \text{ а } x = -2.$$

$$2\beta = 2, \text{ имеем } |x| = y^2, \text{ т.е. } x = -y^2.$$

Это подставляем во второе равенство и получим

$$-y^4 + y^3 + 6y^2 - 8y = 0, \text{ т.е. } y(2 - y)(y^2 + y - 4) = 0.$$

$$y=2, x=-4 \text{ и } y=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}, x=-\frac{9-\sqrt{17}}{2}.$$

Ответ: $(-4; 2)$, $(-2; 2)$ и $(-\frac{9-\sqrt{17}}{2}; \frac{-1+\sqrt{17}}{2})$.

6)

а) ω_1 — описанная окружность около $\triangle ABC$,

ω_2 — опис. окр. около $\triangle ABD$.

R_1, R_2 — радиусы ω_1, ω_2 соответственно.

$$R_1 = R_2 = 13.$$

$$R_1 = \frac{AB}{2 \sin \angle ACB}; \quad R_2 = \frac{AB}{2 \sin \angle ADB}$$

П.к. $R_1 = R_2$, то $\sin \angle ACB = \sin \angle ADB$.

П.к. $\angle CAD = 90^\circ$, то $\angle ACB = \angle ADB = 45^\circ$.

$$R_1 = 13 = \frac{AB}{2 \sin 45^\circ}; \quad AB = 13\sqrt{2}$$

Пусть $CB = b$, $BD = a$, тогда $AC = \frac{a+b}{\sqrt{2}}$. $BF = BD = a$.

Из Т. косинусов имеем $\frac{(a+b)^2}{2} + b^2 - \sqrt{2}(a+b)b \cdot \cos 45^\circ = AB^2 = 13^2 \cdot 2$

(в $\triangle CAB$)

$$\frac{a^2+b^2}{2} = 13^2 \cdot 2 \Leftrightarrow a^2+b^2 = 26^2.$$

$$CF^2 = CB^2 + BF^2 = a^2 + b^2 = 26^2, \quad CF = 26$$

$$\text{б) } BC = 10, \quad BF = \sqrt{CF^2 - BC^2} = 24, \quad \text{тогда } AC = \frac{24+10}{\sqrt{2}} = 17\sqrt{2}$$

$$\sin \angle BCF = \frac{24}{26}, \quad \cos \angle BCF = \frac{10}{26}.$$

$$\sin(\angle BCF + 45^\circ) = \sin \angle FCA = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{10}{26} + \frac{24}{26} \right) = \frac{17\sqrt{2}}{26}.$$

$$S_{ACF} = AC \cdot CF \cdot \sin \angle FCA \cdot \frac{1}{2} = \frac{17\sqrt{2}}{26} \cdot \frac{1}{2} \cdot 17\sqrt{2} \cdot 26 = 17^2 = 289.$$

Ответ: а) 26, б) 289.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$5) \begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

Заметим, если y нас есть решение $(x; y)$, то и $(x; -y)$ подходит.

$$(|x-6-y| + |x-6+y| = |x-6+y| + |x-6-y| \text{ и } |-y| = |y|)$$

т.е. можно преобразовать задачу, нам необходимо ровно 1 решение для $y > 0$.

(Если $y = 0$ подходит, то кон-во р-н. нечетное, кон-во, потому что он не подходит)

$$|x-6-y| + |x-6+y| \geq |2x-12|, \text{ т.е. } 12 \geq |2x-12|, \text{ откуда получаем } 0 \leq x \leq 12.$$

$$1. x \geq 6+y, \text{ тогда } 2x=24, x=12, \text{ а } y \leq 6.$$

$$2. 6+y > x > 6-y, \text{ тогда } 2y=12, y=6, \text{ а } 0 < x < 12.$$

$$3. 6-y \geq x, \text{ тогда } x=0, \text{ а } y \leq 6.$$

Заметим, что если y нас есть пара решений $(0; y)$, то и $(12; y)$ тоже подходит:

$$|-6-y| + |-6+y| = |6-y| + |6+y| \text{ и } 36 + (|y|-8)^2 = 36 + (|y|-8)^2$$

Следовательно $0 < x < 12$, т.е. $y=6$.

$$(x-6)^2 + 4 = a, \text{ т.к. } 0 < x < 12, \text{ то } 4 \leq a < 40.$$

Дано, что если есть корень $(6+x; 6)$, то есть и $(6-x; 6)$, где $6-x_1 > 0$, тогда остается 1 вариант $x=6, y=6$, тогда $a=4$, а корни системы $\rightarrow (6; 6)$ и $(6; -6)$.

Ответ: $a=4$.

$$2) \cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - 2 \sin 5x \cos 2x = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$\sqrt{2} \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x)$$

$$\begin{cases} \cos 5x = \sin 5x \\ \cos 2x = \cos(x - \frac{\pi}{4}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: $\frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}.$

$-\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$

$\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi m}{3}, m \in \mathbb{Z}.$

$$7) \begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Чтобы нашлось такое $y \in \mathbb{Z}$ должно выполняться: $3^x + 4 \cdot 3^{81} < 85 + (3^{81} - 1)x$,

т.е. $3^x + (4 - x) \cdot 3^{81} - (85 - x) < 0$

$$f(x) = 3^x + (4 - x) \cdot 3^{81} + x - 85$$

$$f'(x) = 3^x \cdot \ln 3 - 3^{81} + 1, \text{ заметим, что для}$$

$$x \leq 80, f'(x) < 0$$

$$x \geq 81, f'(x) > 0.$$

т.е. $f(x) \searrow$ на $(-\infty; x_1)$ и $\nearrow (x_1; +\infty)$, где $80 < x_1 < 81$.

Следовательно $f(x)$ имеет не более 2 корней, находим, что это $x=4$ и $x=85$.

Тогда при $5 \leq x \leq 84$ $f(x) < 0$, т.е. условие существования y выполняется.

При некоторых значениях x , кол-во y , которое удовлетворяет системе равно: $85 + 3^{81} \cdot x - x - 3^x - 4 \cdot 3^{81}$.

т.е. для каждой пары (x, y) целых, достаточно поискать $(85 - x) + 3^{81}(x - 4) - 3^x$ для $x \in \mathbb{Z}$ и $5 \leq x \leq 84$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

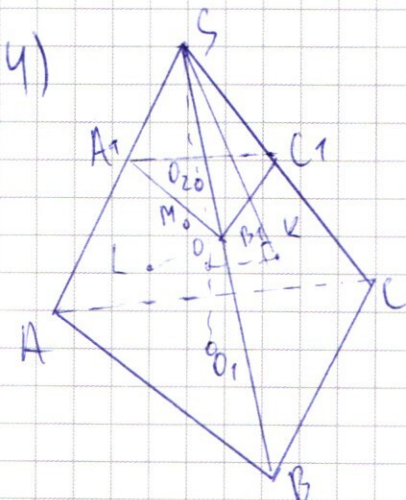
Заметим, что $85-x$ для $x=5, \dots, 84$ это ар. пр. с первым членом 80 и разностью 1, и последним членом 1. $\sum_{i=5}^{84} 85-i = \frac{80+1}{2} \cdot 80 = 40 \cdot 81$.

$$\sum_{i=5}^{84} (-3^i) = -\frac{3^5 \cdot (3^{80} - 1)}{3 - 1} = -\frac{3^5 - 3^{85}}{2} \quad (\text{это геометрич. пр.})$$

$$3^{81} \cdot \sum_{i=5}^{84} (i-4) = 3^{81} \cdot \left(\frac{1+80}{2}\right) \cdot 80 = 40 \cdot 81 \cdot 3^{81}$$

$$\begin{aligned} \text{Суммируя это, получим } 40 \cdot 81(3^{81} + 1) + \frac{3^5 - 3^{85}}{2} &= \\ &= \frac{80 \cdot 81 \cdot 3^{85} + 80 \cdot 81 + 81 \cdot 3 - 3^{85}}{2} = \frac{79 \cdot 3^{85} + 81 \cdot 83}{2} \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{79 \cdot 3^{85} + 81 \cdot 83}{2}$.



Пусть ABC — сечение K ABC и $A_1B_1C_1$ — сечение, касающееся сфер и перпендикулярное прямой SO . $S_{ABC} = 9$, $S_{A_1B_1C_1} = 4$.

Пусть SO_1 — высота в пирамиде S_{ABC} , SO_2 — высота в пирамиде $S_{A_1B_1C_1}$. П.к. $SO \perp (ABC)$ и $(A_1B_1C_1) \perp SO$, то $O \in O_1O_2$. Пусть R — радиус сфер.

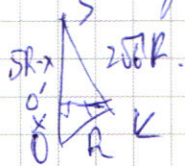
$S_{A_1B_1C_1} \sim S_{ABC}$, тогда $\frac{SO_2}{SO_1} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$, т.е. $\frac{SO_2}{SO_2 + R} = \frac{2}{3}$,

$OO_1 = OO_2 = R$.

$SO_2 = 4R$.

П.к. K - точка касания сферы и плоскости SBC , то $\angle OKS = 90^\circ$, т.е. $\sin \angle KSO = \frac{OK}{OS} = \frac{R}{5R} = \frac{1}{5}$.

П.е. $\angle KSO = \arcsin \frac{1}{5}$. П.к. $\triangle SMO \cong \triangle SKO \cong \triangle SLO$, то высота опущенная из S на KL делит KL пополам в одинаковых отношениях, т.е. $(KL) \perp SO$.



$$\frac{x}{R} = \frac{R}{5R}, \quad x = \frac{R}{5}$$

KO' - высота на SO в $\triangle KOS$.

Тогда $\frac{S_{ABCL}}{S} = \left(\frac{4R}{5R - \frac{R}{5}} \right)^2 = \frac{4}{5}$, где S - площадь по-

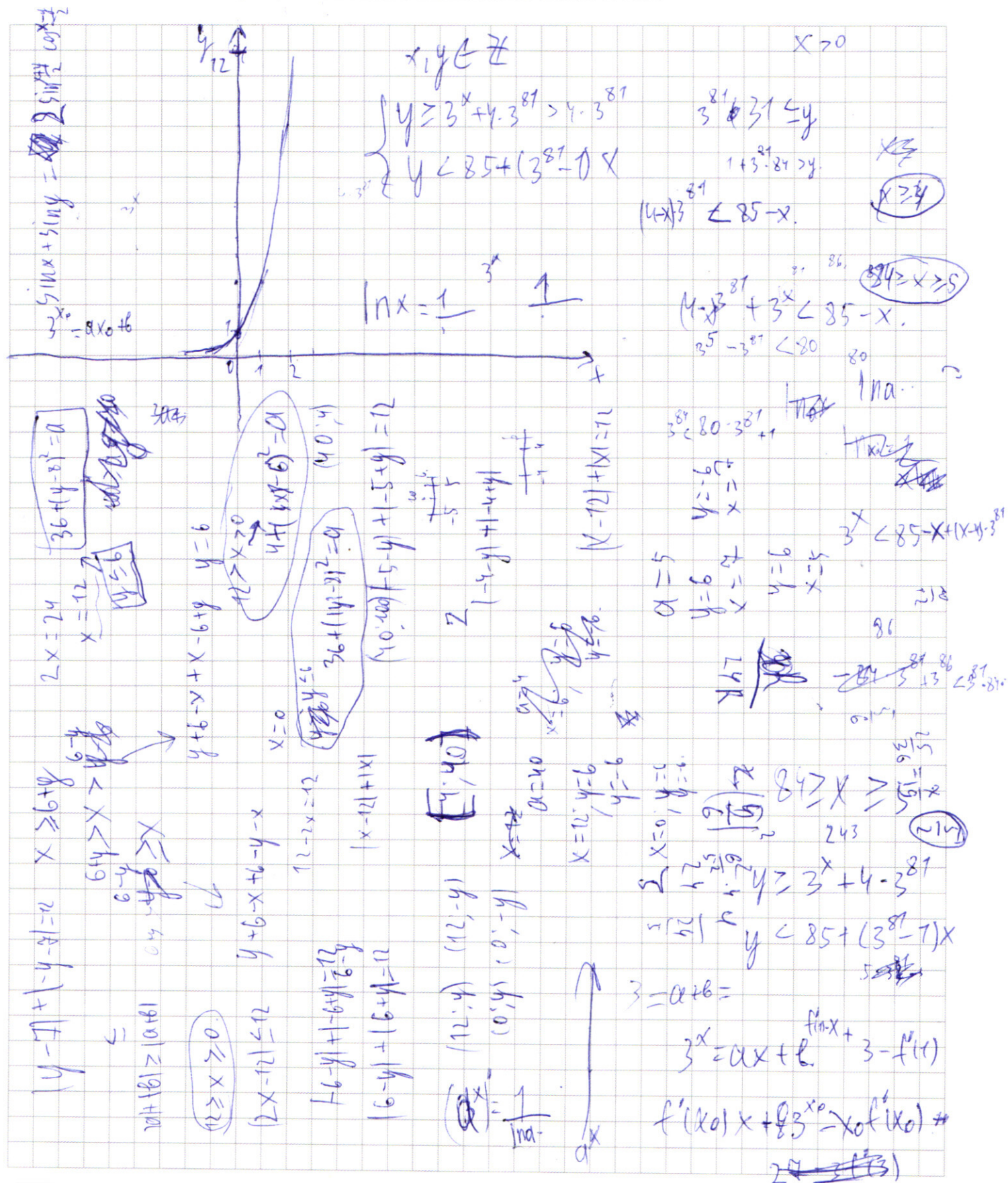
верх сечения, проходящего через K, L, M .

$$S = \frac{6^2 \cdot 4}{5^2} = \frac{144}{25}$$

Ответ: $\arcsin \frac{1}{5}$ и $\frac{144}{25}$.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\frac{8}{27} = \frac{h \cdot 4}{9(h+1)^2}$$

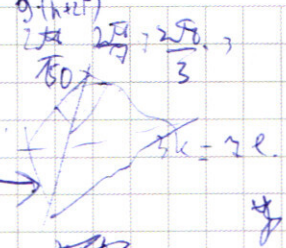
$$\cos 7x + \cos 3x = 2 \cos 5x \cos 2x = \sin 7x + \sin 3x$$



$$\frac{a}{x} = \frac{c}{y}$$

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{d}$$

$$ac \cdot bd = y^2 x^2$$

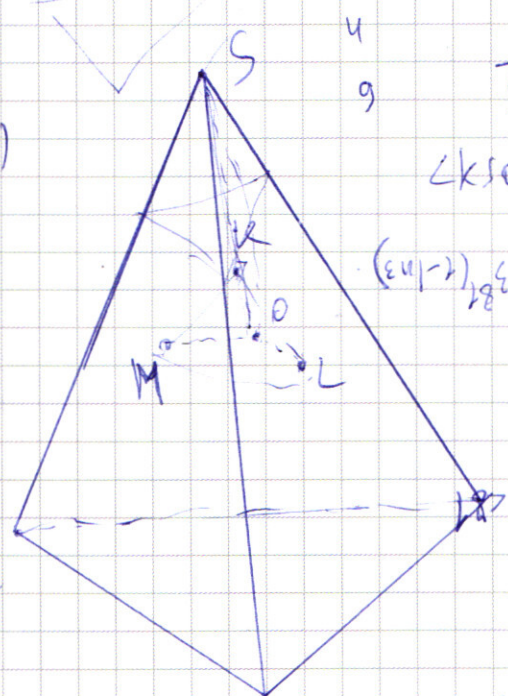


$$cb = ad$$

$$\frac{x^2}{b^2} \cdot \frac{dy^2}{c^2}$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 7x \cos 3x = \sin 7x + \sin 3x - \sqrt{2} \sin 7x \cos 3x$$

$$\frac{80 \cdot 81 \cdot 3^8 + 80 \cdot 81 \cdot 3 - 3^8}{2}$$



$$\frac{M}{S} = \sin \alpha$$

$$\frac{2}{3} = \frac{h}{h+2R}$$

$$h = 4R$$

$$80 \cdot 81 \cdot 3^8 + 80 \cdot 81 \cdot 3 - 3^8$$

$$(80 \cdot 81 \cdot 3^8 + 80 \cdot 81 \cdot 3 - 3^8) \cdot \frac{1}{3}$$

$$(80 \cdot 81 \cdot 3^8 + 80 \cdot 81 \cdot 3 - 3^8) \cdot \frac{1}{3^2}$$



$$\frac{80 \cdot 81 \cdot 3^8 + 80 \cdot 81 \cdot 3 - 3^8}{2}$$

$$(4-x) \cdot 3^8$$

$$2 \cdot 3^8 - 3^8 + 1 - 80 \cdot 81 + \frac{2}{3^5} + \frac{2}{3^5}$$

$$3^x \cdot \frac{1}{3^x}$$

$$(80 \cdot 81 \cdot 3^8 + 80 \cdot 81 \cdot 3 - 3^8) < 0$$

$$80 \cdot 81 \cdot 3^8 + 80 \cdot 81 \cdot 3 - 3^8$$

$$84 \leq x \leq 85$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\underbrace{\cos 7x + \cos 3x}_{5x+2x} - \sqrt{2} \cos 4x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$\sqrt{2} \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} \cos 7x$$

$$\cos x - \sin x$$

$$\cos 3x - \sin 3x$$

$$\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sqrt{2} \cos\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2} \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos 20x$$

$$2 \cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos 2x = \cos 7x$$

$$\ln x = \log_e x$$

$$\cos 40^\circ = \cos 7^\circ \cos 33^\circ - \sin 7^\circ \sin 33^\circ$$

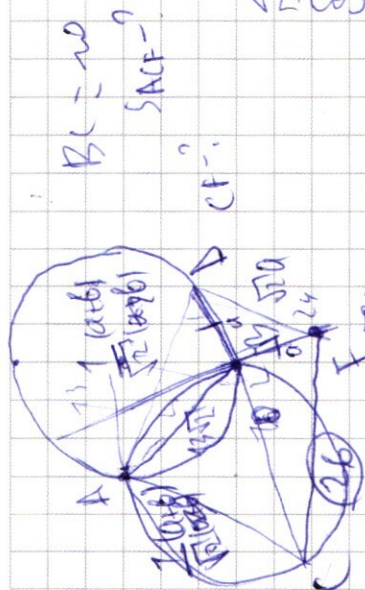
~~$$a+b+ac+bc+cd+ad$$~~

$$\sqrt{29-106} = \sqrt{29} - \sqrt{106}$$

$$v = {}_2(8 - |k|) + {}_2(9 - |x|)$$

$$31 = |k + 9 - x| + |k - 9 - x|$$

$$0 < h$$

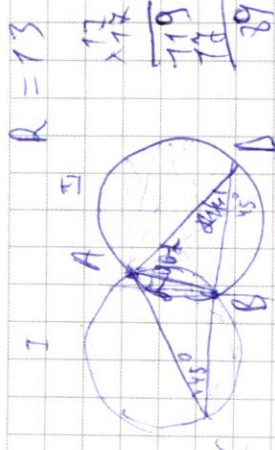


$$a^2 + b^2 = \frac{(a+b)^2}{2} + \frac{b^2 - a^2}{2}$$

$$h_{\text{eff}} = \frac{2}{2} + \frac{2}{2} = 1$$

$$b = 10$$

92, 26



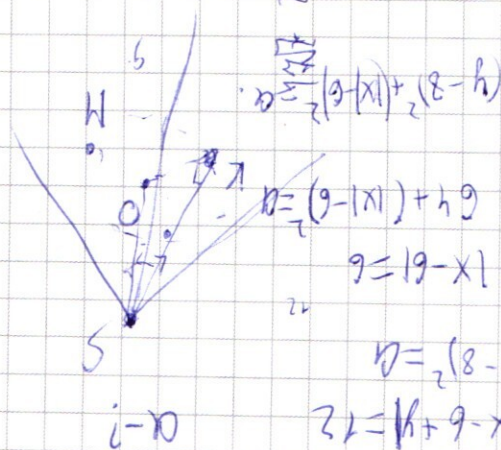
$$\sin 115^\circ + i = -\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$$

$$\frac{34}{26} - \frac{15}{26} = \frac{19}{26}$$

$$\sqrt{26} \approx 5.1$$

2.41

$$a_0 \neq 0$$



8-2m. 16875 → пропуск.

$$16875 = 3^3 \cdot 5^4$$

$$(1) (333) (5555)$$

$$\frac{8!}{1! \cdot 3! \cdot 4!}$$

$$(5 \cdot 2 \cdot 8)$$

$$\frac{18-2 \cdot 7}{4} = 9$$

$$\begin{array}{r} 1875 \\ 625 \\ 125 \\ 25 \\ 5 \end{array}$$

$$11/93/5555$$

$$\frac{8!}{1! \cdot 7! \cdot 2! \cdot 4!}$$

$$5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 8$$

$$\frac{5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 4}{35 \cdot 32} = 1120$$

$$\frac{6!}{2! \cdot 3!}$$

$$11 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4$$

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

$$\begin{cases} y > 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 112444 \\ 114244 \\ 114424 \\ 114442 \\ 124441 \\ 124441 \\ 124441 \end{array}$$

$$111/2,4$$

$$\begin{array}{r} 11124 \\ 11142 \\ 11421 \\ 11421 \\ 11421 \\ 11421 \\ 11421 \end{array}$$

$$\frac{5!}{2!}$$

$$\frac{35}{2}$$

$$\frac{4 \cdot 5 \cdot 1120}{4!} = 1120$$

$$6+6+4+4=20$$

$$\begin{array}{r} 14112 \\ 211 \\ 121 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12141 \\ 411 \\ 114 \end{array}$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

$$(x^4)^{\lg y}$$

$$|x| \lg(|x|y)$$

$$|x| \lg(x+y) - |x| \lg y$$

$$1 \cdot 1$$

$$\frac{|x|^4 \lg y}{|x| \lg y} =$$

$$-x = 2y$$

$$(1, -4, 2)$$

$$y = -x, y > 0$$

$$(3+x) \pm (3x+3)$$

$$x+y=y$$

$$\frac{-x}{2} = y$$

$$(-2, 2)$$

$$64 + x^2 + 2x^2 + 8x$$

$$10^{\beta} = y$$

$$-y^2 + y = y$$

$$a^{4\beta} = y^{2\beta} \cdot a^{2+\beta}$$

$$a^{3\beta-2} = y^{2\beta}$$

$$2\beta^2 + \beta^2 - 3\beta = 0$$

$$2y^2 - y(8+x) - x^2 - 4x = 0$$

$$|x|^2 \lg y = |x|^2 \lg |x|$$

$$|x| = y$$

$$\begin{array}{c} y^2 + 4 - y = 0 \\ y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \end{array}$$

$$10^{2(3\beta-2)} = 10^{2\beta^2}$$

$$(2\beta-2)(\beta-2) = 0$$

$$y^{6 \lg y} = y$$

$$2\beta = 2$$

$$|x| = y^2$$

$$10^{2\beta} = a$$

$$10^{\beta} = y$$

$$3\beta^2 - 2^2 - 2\beta^2 = 1$$

$$(-y^2, y)$$

$$(-y, y)$$

$$y > 0$$

$$2y^2 + y^2 - y^2 + 4y - 8y$$

$$2y^2 - 4y = 0 \quad x = -y^2$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$y^3 + 2y^2 - y^4 + 4y^2 - 8y = 0$$

$$y^2 + y - 7(y+2)$$

$$-y^4 + y^3 + 6y^2 - 8y = 0$$

$$-y^3 + y^2 + 6y - 8 = 0$$