

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИС

Бланк задания должен быть вложен в
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

①

Разложим 16875 на простые множители:

$$16875 = 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$$

$$\begin{array}{r|l} 16875 & 5 \\ \hline 3375 & 5 \\ 675 & 5 \\ 135 & 5 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

I. Сл-но, если число состоит из цифр:

1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, расставленных в любой порядке, то произведение цифр это числа будет равно 16875.

II. Но также можно составить число из делителей числа 16875, не считая

10, ~~так как это~~ Т.е. мы можем заменить 3 и 3 на 9 и 1. Получим

набор цифр: 1, 1, 3, 5, 5, 5, 9, которые также можно расставить в любой

порядке. При перемножении любых 2 других простых множителей числа

16875 мы будем получать число, большее 9. Сл-но, в эти 2 набора

цифр - единственные.

Рассчитаем кол-во чисел, которые можно составить из этих наборов цифр:

$$I: 1, 3, 3, 3, 5, 5, 5$$

$$\frac{8!}{1!3!4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{6} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 5}{1} = 280$$

$$II: 1, 1, 3, 5, 5, 5, 9$$

$$\frac{8!}{2!1!4!1!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2} = 8 \cdot 105 = 840$$

$$\text{Всего: } 280 + 840 = 1120$$

Ответ: 1120

5

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 & (1) \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1): |x-6-y| + |x-6+y| = 12$$

$$1) \begin{cases} x-6-y \geq 0 \\ x-6+y \geq 0 \end{cases} \begin{cases} y \leq x-6 \\ y \geq x-6 \end{cases}$$

$$x-6-y + x-6+y = 12$$

$$2x = 24$$

$$x = 12$$

$$2) \begin{cases} x-6-y \geq 0 \\ x-6+y \leq 0 \end{cases} \begin{cases} y \leq x-6 \\ y < -x+6 \end{cases}$$

$$x-6-y - x+6-y = 12$$

$$-2y = 12$$

$$y = -6$$

$$3) \begin{cases} y > x-6 \\ y \geq -x+6 \end{cases}$$

$$-x+6+y + x-6+y = 12$$

$$2y = 12$$

$$y = 6$$

$$4) \begin{cases} y > x-6 \\ y \leq -x+6 \end{cases}$$

$$-x+6+y - x+6-y = 12$$

$$-2x = 0$$

$$x = 0$$

график - квадрат с центром (6,0) и стороной 12.

$$(2): (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = 0$$

$$x > 0, y > 0:$$

$$(x-6)^2 + (y-8)^2 = 0 \quad (3)$$

график - окружность с центром в точке $O(6,8)$ и радиусом $\sqrt{0}$.

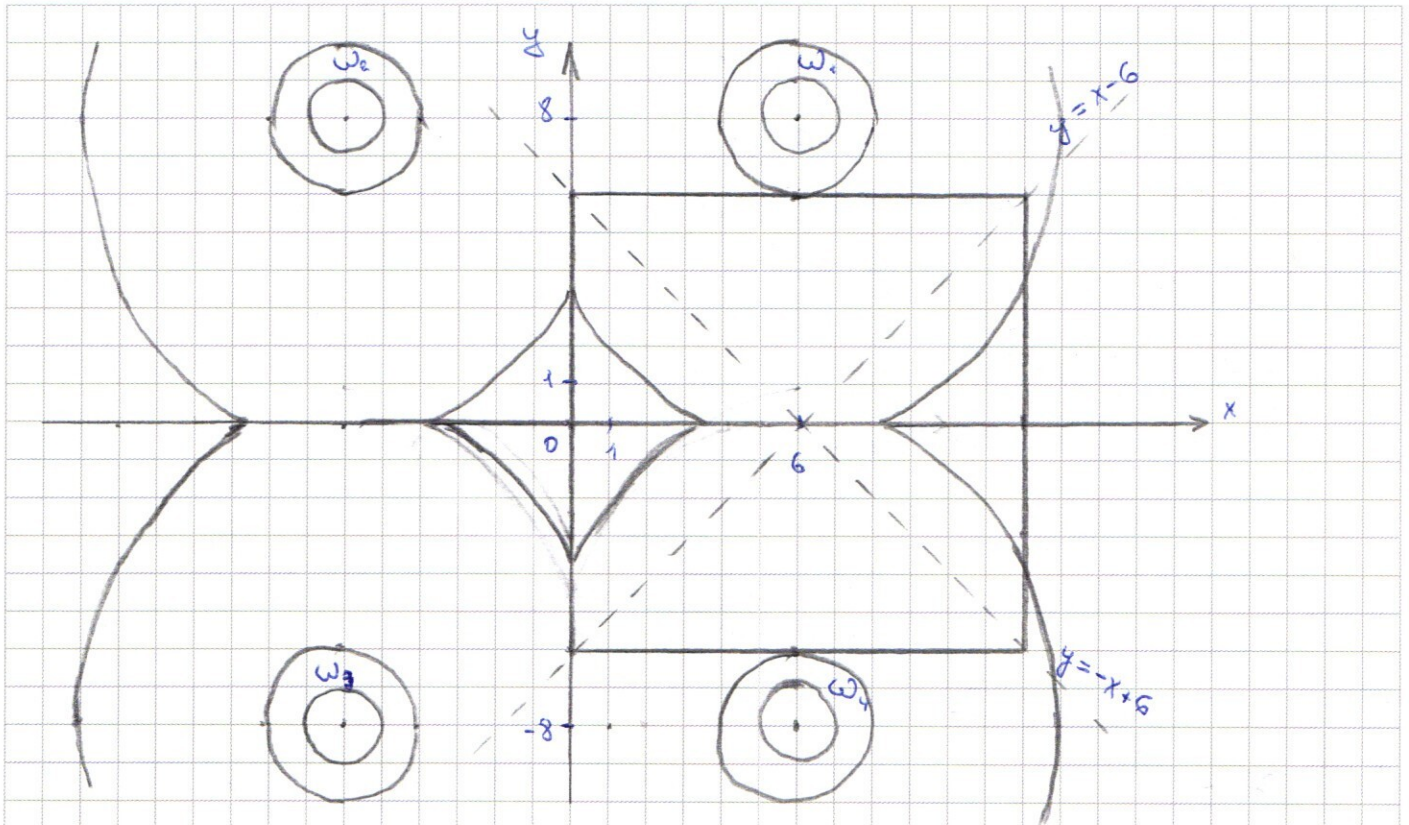
Т.к. в (2) $|x|$ и $|y|$, то можно симметрично отразить

график (3) при $x > 0, y > 0$ относительно осей Ox, Oy и точки $(0,0)$.

Получим 4 окружности. Назовем окружность с центром в I четверти

ω_1 , во II - ω_2 , в III - ω_3 , в IV - ω_4 .

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



(на рисунке изображены график квадрата и окружностей при
3-х значениях α : 1, 4 и 49)

~~Т.к. ω_1 , ω_2 и квадрат симметричны относительно~~

Т.к. ω_1 и ω_2 симметричны относительно Ox , и квадрат
симметричен относительно Ox , то ω_1 имеет столько же точек
пересечения с квадратом, сколько и ω_2 .

Т.к. ω_1 , ω_4 и квадрат симметричны относительно $x=6$, то
если ω_1 пересекает одну вертикальную сторону квадрата, то ω_4
пересекает и другую.

Окружности ω_2 и ω_3 ^{не} могут пересекать квадрат, ~~так как~~ ~~т.к.~~
~~в точках, лежащих~~ т.к. все точки квадрата имеют координату по

х большую $\frac{1}{2}$ или равную 0, а все точки ω_2 и ω_3 имеют абсциссу меньше 0.

Сл-но, ω_1 должна иметь 1 точку пересечения с горизонтальной линией (минимум она не может пересекать) стороны квадрата и не иметь других точек пересечения с ним. Это происходит только тогда, когда ω_1 касается $x=6$ ~~$y=6$~~ .

$$\begin{cases} (x-6)^2 + (y-8)^2 = a \\ y=6 \end{cases} \quad x^2 - 12x + 36 + 4 = a$$

$$x^2 - 12x + 40 - a = 0$$

$$D_1 = 36 - 40 + a = 0 \quad (\text{касание})$$

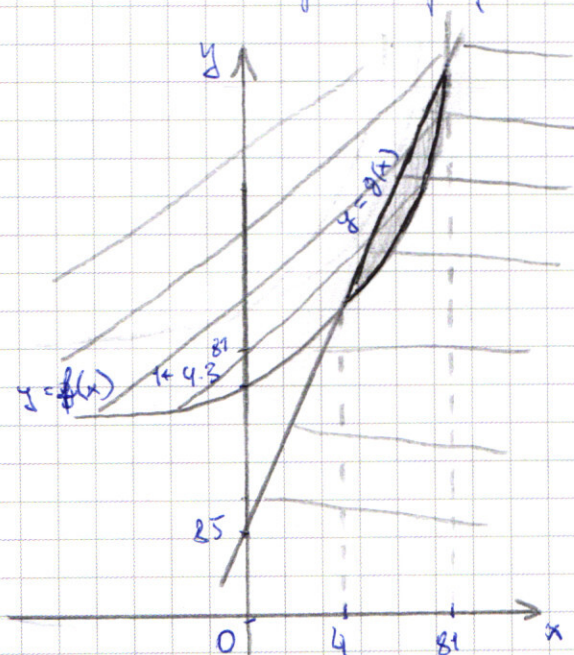
$$a = 4$$

Ответ: $a = 4$

⑦

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}, \text{ пусть } f(x) = 3^x + 4 \cdot 3^{81}, g(x) = 85 + (3^{81} - 1)x$$

Схематично построим график этой системы:



Все решения системы находятся в области, обведенной черным, причем нижняя граница является кривой, а верхняя — прямой.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Подстановкой найдём решение ур-ния $f(x) = g(x)$, а также $g(x) - f(x) = h(x)$.
(при некоторых значениях x):

x	0	1	2	4	...	81	84	85
$f(x)$	$1+4 \cdot 3^{81}$	$3+4 \cdot 3^{81}$	$9+4 \cdot 3^{81}$	$81+4 \cdot 3^{81}$	...	$5 \cdot 3^{81}$	$31 \cdot 3^{81}$	$85 \cdot 3^{81}$
$g(x)$	85	$84 \cdot 3^{81}$	$83 \cdot 2 \cdot 3^{81}$	$81 \cdot 4 \cdot 3^{81}$	...	$4 \cdot 81 \cdot 3^{81}$	$1 \cdot 84 \cdot 3^{81}$	$85 \cdot 3^{81}$
$h(x)$	-	-	-	0	...	$4 \cdot 763 \cdot 3^{81}$	$1 \cdot 33 \cdot 3^{81}$	0

Сп-ко, при $x=4$ и $x=85$ $f(x) = g(x)$. Также т.е. система имеет
решения при $x \in (4; 85)$, а также при $\forall x_0$ ка-во решение равно
 $h(x_0)$.

$$h(x) = g(x) - f(x) = 85 + (3^{81} - 1)x - 3^x - 4 \cdot 3^{81}$$

$$h(x+1) = 85 + (3^{81} - 1)x - 3 \cdot 3^x - 4 \cdot 3^{81} + (3^{81} - 1)$$

$$h(x+1) - h(x) = 3^{81} - 1 - 2 \cdot 3^{x-1}$$

Можно заметить, что $h(x)$ состоит из двух ^{разностей} прогрессий: арифметической и геометрической. Найдём их суммы.

арифм: $d = 3^{81} - 1$, $a_1 = 85 + (3^{81} - 1) \cdot 4 - 4 \cdot 3^{81} = 81$, $n = 85 - 4 + 1 = 82$

$$S_n = \frac{81 + (3^{81} - 1) \cdot 81}{2} \cdot 82 = 81 \cdot 3^{81} \cdot 41$$

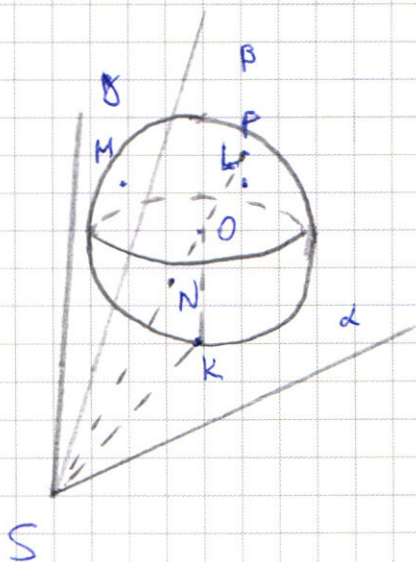
геом: $q = 3$, $b_1 = 81$, $n = 82$

$$S_{n_2} = \frac{81 \cdot (3^{82} - 1)}{2}$$

$$\sum_{x_0=4}^{85} h(x_0) = S_n - S_{n_2} = 3^{81} \cdot 81 \cdot 41 - \frac{81 \cdot (3^{82} - 1)}{2} = 3^{85} - \frac{81 \cdot (3^{82} - 1)}{2}$$

$$\text{Ответ: } 3^{85} - \frac{81 \cdot (3^{82} - 1)}{2}$$

(4)



Дано: сфера $(O; R)$ впис. в трехгранный угол с вершиной S , касается его граней в точках K, L, M .

φ, ω — п-ты, $\varphi \perp SO, \omega \perp SO$.

φ и ω касаются сферы $(O; R)$, $\varphi \neq \omega$

$$S_{\text{сеч.}\varphi} = 4, S_{\text{сеч.}\omega} = 9$$

Найти: $\angle KSO, S_{\text{сеч.}KM}$

Решение.

1. Пусть трехгранный угол образован п-тами α, β и γ . $K \in \alpha, L \in \beta, M \in \gamma$

Т.к. эти п-ты касаются сферы, то $OK \perp \alpha, OM \perp \gamma, OL \perp \beta$.

$OK = OM = OL$ (как радиусы).

След. $\triangle SOK = \triangle SOM = \triangle SOL$ (по катету и гипотенузе).

2. Пусть φ кас. сферу в т. N , ω кас. сферу в т. P .

$ON \perp \varphi, SO \perp \varphi \Rightarrow N \in SO$.

Аналогично, $P \in SO, NP = 2R$

3. Опустив перпендикуляры из N и P на α, β, γ получим подобные тр-ки.

$$\text{След.} \quad \frac{S_{\text{сеч.}\omega}}{S_{\text{сеч.}\varphi}} = \left(\frac{SP}{SN} \right)^2 = \left(\frac{SN + 2R}{SN} \right)^2 = \left(1 + \frac{2R}{SN} \right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$\frac{2R}{SN} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$\frac{2R}{SN} = \frac{1}{2}$$

$$R = \frac{1}{4} SN \Rightarrow \frac{R}{SN} = \frac{1}{4}, \quad \frac{SN}{R} = 4$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4. Треугольник $(KLM) \perp SO$.

SO — высота, аналогично ≈ 3 ;

$$\frac{S_{\text{треуг. KLM}}}{S_{\text{треуг. S}}} = \left(\frac{SO}{SN}\right)^2 = \left(\frac{SN+R}{SN}\right)^2 = \left(1+\frac{R}{SN}\right)^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$$

$$S_{\text{треуг. KLM}} = \frac{25}{16} \cdot 4 = 6,25$$

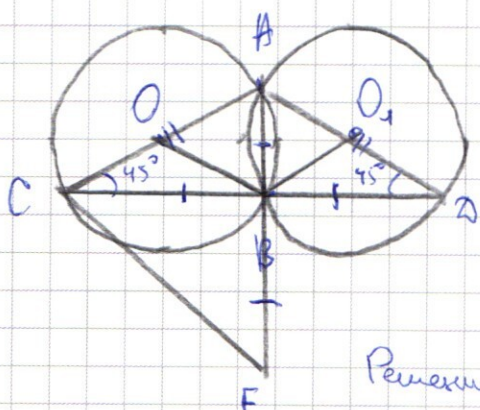
5. Из $\triangle KSO$:

$$\sin \angle KSO = \frac{OK}{SO} = \frac{R}{SN+R} = \frac{1}{\frac{SN}{R} + 1} = \frac{1}{4+1} = \frac{1}{5}$$

$$\angle KSO = \arcsin\left(\frac{1}{5}\right)$$

Ответ: $S_{\text{треуг. KLM}} = 6,25$; $\angle KSO = \arcsin\left(\frac{1}{5}\right)$

(6)



Решение.

а) г. Т.к. $R_1 = R_2 = R$, то $\angle ACB = \angle ADB$ (опираются на равные хорды), $\triangle ACD$ — равнобедр. с осн. CD .

$\triangle CAD$ — прямоугол., $\angle CAD = 90^\circ$,

т.к. $\angle ACD = \angle ADC = 45^\circ$, $AC = AD$.

2. Чт-во, $CB=BD$, $(R_1=R_2=R, AC=AD)$, н.к.:

Значит:

$$R_1 = \frac{\frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin 45^\circ}{AC+BC+AD} = R_2 = \frac{\frac{1}{2} AD \cdot BD \cdot \sin 45^\circ}{AB+AD+AB}$$

↓

$$(BC-BD)(AC+AB)=0$$

$$\underline{BC=BD}$$

3. Чт-во, AB - медиана, $\angle CBA=90^\circ$, и высота. $AB \perp CD$, н.к. $B \in AF$.

$\angle CBA=90^\circ \Rightarrow AC$ - гипотен., $AC=2R$

4. $CD = \sqrt{(2R)^2 + (2R)^2} = 2\sqrt{2}R$

$$BC = \sqrt{2}R = \sqrt{2} \cdot 13$$

$$BF = BD = BC = \sqrt{2}R$$

$$CF = \sqrt{BC^2 + BF^2} = \sqrt{2R^2 + 2R^2} = 2R = 2 \cdot 13 = 26,$$

$$S_{ACF} = \frac{1}{2} BC \cdot AF = \frac{1}{2} \cdot 13\sqrt{2} \cdot 26 = 338$$

5)

$BC = 13\sqrt{2} \neq 10$, не может быть.

~~См.~~

$$\text{Ответ: а) } CF=26 \text{ б) } S_{ACF}=338$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2.

$$\sqrt{2} \cos 10x = (\cos 7x - \sin 7x) + (\cos 3x - \sin 3x)$$

$$\cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2} \cdot \sin\left(\alpha - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \sqrt{2} \cdot \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sqrt{2} \cos 10x = \sin\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos 10x = 2 \cdot \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos(2x)$$

$$\cos 10x = \cos\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos 10x = 2 \cdot \cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos(2x)$$

2.

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\cos 10x = \cos(7x + 3x) = \cos 7x \cos 3x - \sin 7x \cdot \sin 3x$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 7x \cdot \cos 3x$$

$$\cos 7x \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 3x\right) + \cos 3x \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 7x\right)$$

2.

$$\sqrt{2} \cos 5x \cdot \cos 2x - \cos 10x = \sqrt{2} \sin 5x \cos 2x$$

$$\sqrt{2} \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \cos 10x$$

$$2 \cos 2x \cdot \cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos 10x$$

$$3. \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg 5} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

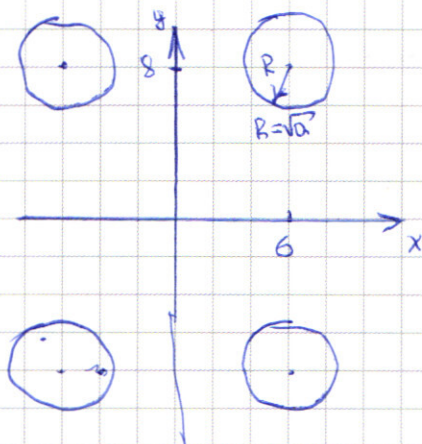
$$x^{\lg x} = \left(\frac{x \cdot e}{e}\right)^{\lg x} = \frac{x^{\lg x} \cdot x}{x} = x^{\lg x}$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

√5.

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 & (1) \\ (x-6)^2 + (y-8)^2 = 2 & (2) \end{cases}$$

(2):



1): $|x-6-y| + |x-6+y| = 12$

Край: 1) $x-6-y=0$ 2) $x-6+y=0$

$y = x-6$

$y = -x+6$

1)

$$\begin{cases} y \leq x-6 \\ y \geq -x+6 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$x-6-y + x-6+y = 12$$

$$\begin{aligned} 2x &= 24 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

2)

$$\begin{cases} y \geq x-6 \\ y \geq -x+6 \end{cases}$$

$$y-x+6 + x-6+y = 12$$

$$\begin{aligned} 2y &= 12 \\ y &= 6 \end{aligned}$$

3)

$$\begin{cases} y \leq x-6 \\ y \leq -x+6 \end{cases}$$

$$x-6-y - x+6-y = 12$$

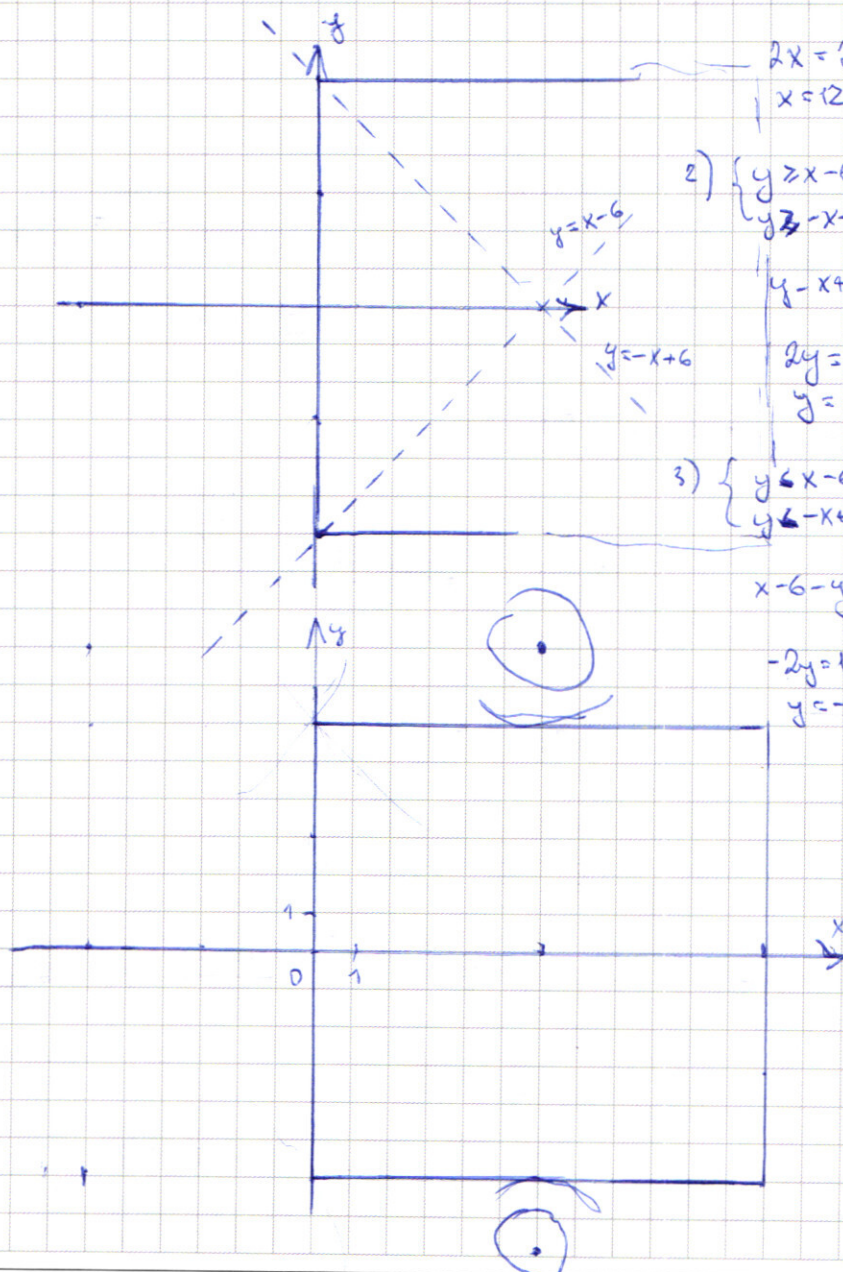
$$\begin{aligned} -2y &= 12 \\ y &= -6 \end{aligned}$$

4)

$$\begin{cases} y \geq x-6 \\ y \leq -x+6 \end{cases}$$

$$-x+6+y - x+6-y = 12$$

$$\begin{aligned} -2x &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$



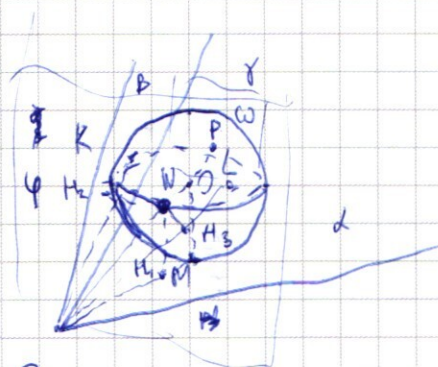
$a = 4$
 $\theta = 40$

$$\begin{array}{r} 18 \\ 18 \\ \hline 144 \\ 18 \\ \hline 324 \end{array}$$

$$a = 18 + \frac{18}{7} = 324 + 19 = 343$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

✓ 4.



$$\Delta SOM = \Delta SOL = \Delta SOK$$

$$OM \perp \alpha, OK \perp \beta, OL \perp \gamma$$

$$\& ON \perp \gamma, SO \perp \gamma \Rightarrow N \in SO$$

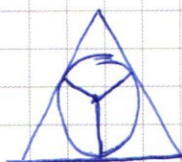
$$A \in \alpha, P \in SO$$

$$SO - \text{лучшая}$$

$$\text{Оптимально } L, \text{ так как } SN - \text{лучшая}$$

$$\sin \angle OSM = \frac{OM}{SO} = \frac{R}{SN+R} =$$

$$= \frac{1}{\frac{SN}{R}+1} = \frac{1}{4+1} = \frac{1}{5}$$



$$S = \frac{1}{2} p_1 r_1 = 4 = \frac{1}{2} p_2 \cdot \frac{SN}{SO} = \frac{1}{2} r_2 \cdot \frac{SN}{SO}$$

$$r_1 = \frac{1}{2} p_1$$

$$p_2 r_2 = 8 = p_1 r_1$$

$$\frac{SN}{SO} = \frac{SN}{SN}$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{8} = \left(\frac{SN}{SP} \right)^2 = \frac{SN}{S_2}$$

$$\frac{SO}{SN} = \frac{SN+R}{SN} = 1 + \frac{R}{SN} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{8}{1} = \left(\frac{SP}{SN} \right)^2 = \left(\frac{SN+2R}{SN} \right)^2 = \left(1 + \frac{2R}{SN} \right)^2$$

$$\frac{3}{2} = 1 + \frac{2R}{SN}$$

$$\frac{2R}{SN} = \frac{1}{2}, \quad \frac{R}{SN} = \frac{1}{4} \Rightarrow R = \frac{1}{4} SN,$$

$$\frac{SN}{R} = 4, \quad \frac{R}{SN} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{S_0}{S_1} = \left(\frac{SO}{SN} \right)^2$$

$$S_0 = \left(\frac{SO}{SN} \right)^2 \cdot S_1 = \frac{25}{16} \cdot 4 = \frac{25}{4} = 6.25$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

✓ 7.

$$3^{81} \cdot (3^{x-81} + 4 - x) \geq 85$$

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4(3^{81} - 1) + 4 \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

$$3^{81} \cdot (3^{x-81} + 4) = 85 - x + x \cdot 3^{81}$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{81} = 85 + (3^{81} - 1)x$$

$$3^x + 4 \cdot (3^{81} - 1) = 85 + (3^{81} - 1)x \rightarrow$$

$$f(x) = 3^x + 4 \cdot 3^{81} \quad f'(x) = 3^x \quad f''(x) = 3^x > 0$$

$$g(x) = 85 + (3^{81} - 1)x \quad g'(x) = (3^{81} - 1) \quad g''(x) = 0$$

$f(x)$	$1 + 4 \cdot 3^{81}$	$3 + 4 \cdot 3^{81}$	$9 + 4 \cdot 3^{81}$	$81 + 4 \cdot 3^{81}$	...	$5 \cdot 3^{81}$
$g(x)$	85	$84 + 3^{81}$	$83 + 2 \cdot 3^{81}$	$80 + 4 \cdot 3^{81}$	...	$4 + 8 \cdot 3^{81}$
x	0	1	2	4	...	81

$3 \cdot 3^{81}$	$85 \cdot 3^{81}$	$247 \cdot 3^{81}$	...
$2 \cdot 84 \cdot 3^{81}$	$85 \cdot 3^{81}$	$86 \cdot 3^{81}$	...
84	85	86	...

$$h(x) = f(x) - g(x) = 3^x + 4 \cdot 3^{81}$$

$$h(x) = g(x) - f(x) = x \cdot 3^{81}$$

$$g(x) = + 3^{81} - 1$$

$$f(x) = 3 - 4 \cdot 3^{81} + 4 \cdot 3^{81} =$$

$$3^{x-1} \cdot 3^{81} - 4 \cdot 3^{81} (3 - 1) = 8 \cdot 3^{81}$$

$$3^x - 3^{x-1} = 2 \cdot 3^{x-1}$$

$$3^{81} - 1 = 2 \cdot 3^{80}$$

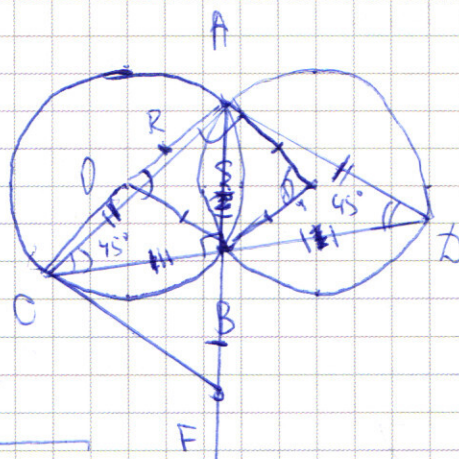
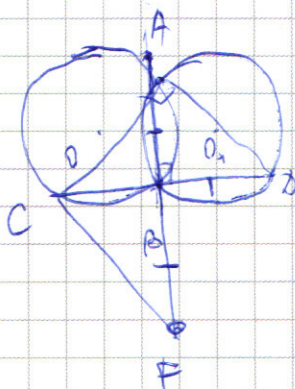
$$-3^6 + 3^5 = -3^5 \cdot 3 + 3^5 = -2 \cdot 3^5$$

$$\frac{3 \cdot 8}{2} = 12$$

ар. пр. пр. пр. пр. пр.

6.

$$R=13$$



$$BC^2 + AB^2 = 4R^2$$

$$2BC^2 = 4R^2$$

$$BC^2 = 2R^2$$

$$BC = \sqrt{2}R$$

$$CB = \sqrt{4R^2 + 4R^2} = \sqrt{8R^2} = 2\sqrt{2}R$$

$$CB = \sqrt{2}R$$

$$BF = \sqrt{2}R$$

$$CF = \sqrt{2R^2 + 2R^2} = \sqrt{4R^2} = 2R = 26$$

$$R_1 = \frac{\frac{1}{2}ACBC \cdot \sin 45^\circ}{AC+BC+AB} = R_2 = \frac{\frac{1}{2}AD \cdot AB \cdot \sin 45^\circ}{AB+AD+AB}$$

$$AC+BC+AB = AB+AD+BA$$

$$BC = AD$$

$$BC \cdot (AC+AD+BA) = AD \cdot (AC+BC+AB)$$

$$(BC-AD)(AC+AB) = 0$$

$$BC = AD$$

$$\frac{16 \times 2}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

√(1.)

$$16875 = 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$$

$$\begin{array}{r} 16875 \overline{) 5} \\ 3375 \overline{) 5} \\ 675 \overline{) 5} \\ 135 \overline{) 5} \\ 27 \overline{) 3} \\ 9 \overline{) 3} \\ 3 \overline{) 3} \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16875 \overline{) 5} \\ 15 \overline{) 3375} \\ 18 \overline{) 15} \\ 15 \overline{) 37} \\ 35 \overline{) 37} \\ 25 \overline{) 35} \\ 25 \overline{) 25} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3375 \overline{) 5} \\ 30 \overline{) 675} \\ 37 \overline{) 57} \\ 35 \overline{) 17} \\ 25 \overline{) 15} \\ 25 \overline{) 25} \\ 0 \end{array}$$

1 ✓
2
3
4 +
5 ✓
6 + + ?
7 +

$$1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = \frac{8!}{1! 3! 4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2 \cdot 2} = \dots$$

$$1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = \frac{8!}{2! 1! 1! 4!} = \dots$$

$$\frac{35}{8} = 280$$

$$C_8^4 \cdot C_4^3 \cdot C_1^1 =$$

$$\frac{8!}{4! 4!} \cdot \frac{4!}{3! 1!} \cdot \frac{1!}{1! 0!} =$$

$$\frac{35}{3} = 105$$

2.

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\cos \alpha + \cos \beta =$$

$$2 \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$2 \cos \alpha \cdot \sin \beta = \frac{\sin}{\cos} (\alpha - \beta) + \sin (\alpha + \beta)$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cdot \cos 2x$$

$$\sqrt{2} \cos 5x \cdot \cos 2x - \cos^2 5x + \sin^2 5x = \sqrt{2} \sin 5x \cdot \cos 2x$$

$$\sin 5x \cdot (\sqrt{2} \cos 2x + \sqrt{2} \cos 2x) = \cos 5x (2 \cos 5x - \sqrt{2} \cos 2x)$$

$$\cos 7x + \cos 3x = \sqrt{2} (\cos 7x \cdot \cos 3x - \sin 7x \cdot \sin 3x) = \sin 7x + \sin 3x$$

3.

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \rightarrow \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \rightarrow \end{cases}$$

$$\text{ДДЗ} \begin{cases} y > 0 \\ -xy > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y > 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

$$(y^2 - 8y + 16) - (x^2 + 4x + 4) + y^2 - xy - 12 = 0$$

$$(y-4)^2 \quad (x+2)^2$$

$$\left(\frac{x^2}{y}\right)^{2\lg y} = (-x)^{\lg(-x) + \lg y} \quad | \quad (-x)^{\lg(-x)} \cdot (-x)^{\lg y} = x^{4\lg y} \cdot y^{-2\lg y}$$

$$\lg(x) = \lg(y) = xy$$

$$\lg(-x) \cdot \left(\left(\frac{x^2}{y^2}\right)^{\lg y} - (-x)^{\lg(-x)}\right) = 0$$

$$(y^2 - xy + \frac{x^2}{4}) - (y^2 - 8y + 16) = \left(\frac{5x^2}{4} + 4x + \frac{16}{5}\right) = \frac{16.6}{5}$$

$$2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot 2 = 4 \quad \left(\frac{\sqrt{5}x}{2} + \frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2$$

$$\sqrt{5}z = 4$$

$$z = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$(2y^2 - 8y + 8) - (x^2 + 4x + 4)$$

$$(\sqrt{2}y + 2\sqrt{2})^2 - (x+2)^2 - xy = 0$$

$$2(y+2)^2$$