

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР _

Бланк задания должен быть вложен в работ
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $16875 = 5^4 \cdot 3^3$. Т.к. 16875 - произведение цифр возмозначного числа, все множители должны быть $\leq 10, > 0$.
Первая неупорядоченная группа чисел, удов. условию:
5, 5, 5, 5, 3, 3, 3, 1. Вторая: 5, 5, 5, 5, 9, 3, 1, 1. Ясно, что других нет: произведение фиксированно, все числа ≤ 10 ; чтобы получить больше набор, надо перемножить какие-то два и добавить в набор 1. Но $5 \cdot 5 > 10$, $5 \cdot 3 > 10$, $9 \cdot 3 > 10$. Умножать нельзя, всего два набора. И считаем кол-во чисел, составленных из этих наборов

$$\frac{8!}{4!3!} + \frac{8!}{4!2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2} = 8 \cdot 7 \cdot 5 + 4 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 35 \cdot 8 + 840 = 280 + 840 = 1120$$

2. $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos x \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$

$$2 \cos 5x \cos 2x - 2 \sin 5x \cos 2x = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x)$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x) = 0$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) (2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)) = 0$$

$$\cos 5x - \sin 5x = 0;$$

$$\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x \right) = 0$$

$$\sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - 5x \right) = 0$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{4} - 5x \right) = 0;$$

$$\frac{\pi}{4} - 5x = 0 + \pi n$$

$$-5x = \pi n - \frac{\pi}{4}$$

$$-5x = \frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$x = -\frac{\pi}{20} - \frac{\pi n}{5}$$

$$x = -\frac{\pi}{20} - \frac{\pi n}{5}$$

$$2\cos 2x - \sqrt{2}(\cos 5x + \sin 5x) = 0$$

$$2\cos 2x - 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 5x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 5x\right) = 0$$

$$2\cos 2x - 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right) = 0$$

$$\cos 2x - \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0$$

$$2\sin\left(\frac{1}{2}\left(2x + \frac{\pi}{4} - x\right)\right)\sin\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - x - 2x\right)\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2}\right) = 0$$

$$\left[\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} = \pi n, n \in \mathbb{Z} \right.$$

$$\left[\frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2} = \pi n, n \in \mathbb{Z} \right.$$

$$\left[x + \frac{\pi}{4} = 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \right.$$

$$\left[-3x + \frac{\pi}{4} = 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \right.$$

$$\left[x = 2\pi n - \frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{Z} \right.$$

$$\left[-3x = 2\pi n - \frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{Z} \right.$$

$$\left[x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \right.$$

$$\left[x = -\frac{2\pi n}{3} + \frac{\pi}{12} \right.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{12} - \frac{\pi n}{3}; x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n; x = -\frac{2\pi n}{3} + \frac{\pi}{12}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos(x-y) - \cos(x+y) =$$

$$= 2\sin x \sin y$$

$$\alpha = x-y, \beta = x+y$$

$$x = \frac{\alpha+\beta}{2}, y = \frac{\beta-\alpha}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2\sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\beta-\alpha}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3 \quad \begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} & (1) \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 & (2) \end{cases}$$

Разложим (2) на множители:

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$(-2y - x)(x - y + 4) = 0$$

1. $x = -2y$; подставим в (1)

2. $x = y - 4$; подставим в (1)

$$\left(\frac{(-2y)^4}{y^2}\right)^{\lg y} = 2y^{\lg(2y^2)}$$

$$(16y^2)^{\lg y} = 2y^{\lg 2y^2}$$

$$(2^4 y^2)^{\lg y} = (2y)^{\lg 2 + \lg y^2}$$

$$(2^4 y^2)^{\lg y} = (2y)^{\lg 2} \cdot (2y)^{\lg y^2}$$

$$\left(\frac{2^4 y^2}{2y}\right)^{\lg y} = (2y)^{\lg 2}$$

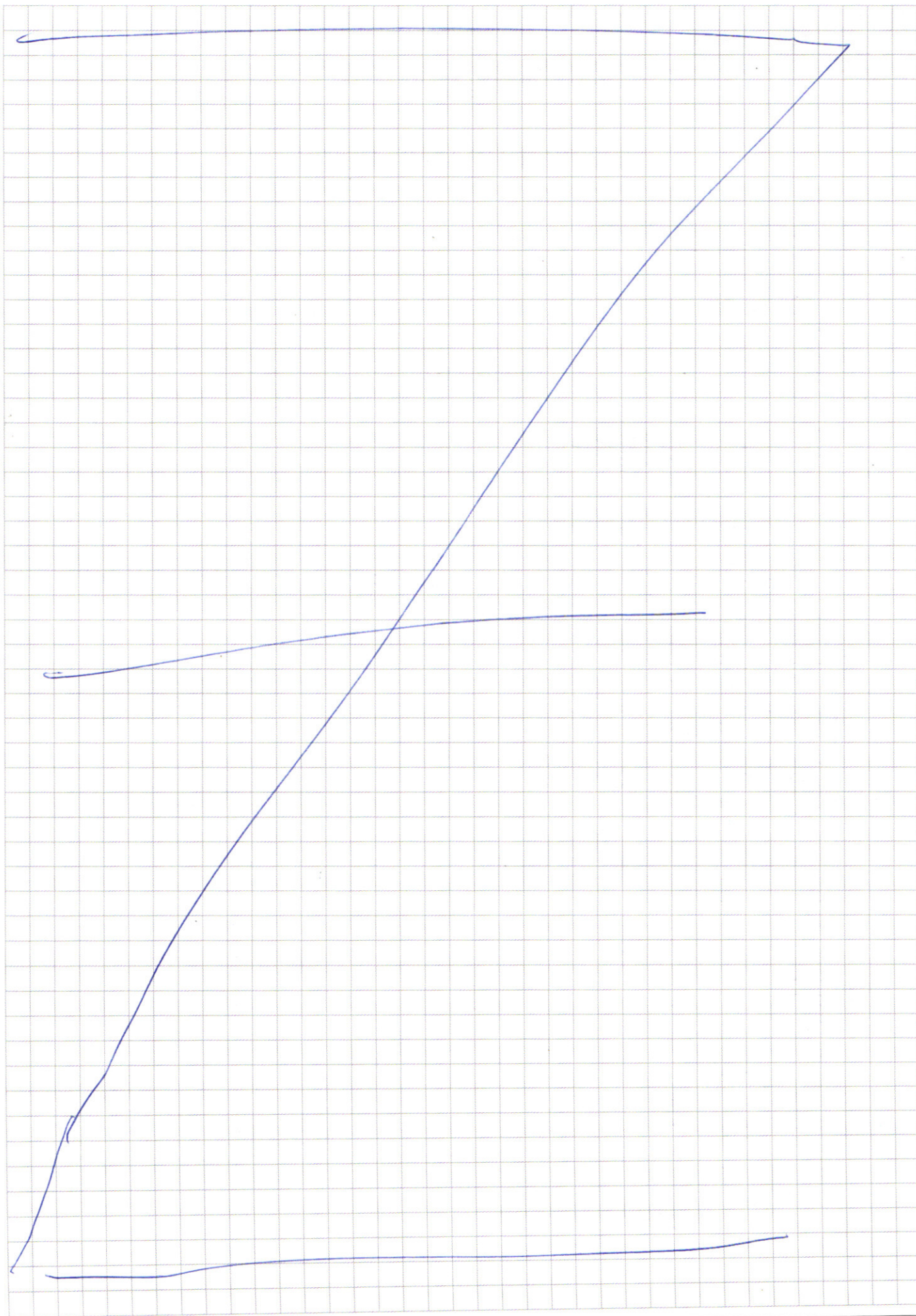
$$2^{\lg y^2} = 2y^{\lg 2}$$

$$(y^2)^{\lg 2} = 2y^{\lg 2}$$

$$y^2 = 2y$$

$$y = 0; y = 2$$

$y = 0$ — посторонний
корень.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7. График двух ~~в~~ функций ($f(x) = 3^x + 4 \cdot 3^{81}$, $g(x) = 85 + 3^{81-x}$) может выглядеть ~~по-разному~~, в зависимости от того, пересекает ли прямая показательную функцию



Решение у нас будет только если графики пересекаются.

проверим это.

Мы знаем $f(0) = 1 + 4 \cdot 3^{81}$; $g(0) = 85$. Если производная в 0 у $f(x)$ больше, то графики не пересекаются ($4 \cdot 3^{81}$ - ~~горизонтальная~~ асимптота $f(x)$; $g(x)$ не криве)

$$\frac{df}{dx} = 3^x \cdot \ln 3; \quad \frac{dg}{dx} = 3^{81-x} - 1; \quad \text{Очевидно, в точке } \frac{dg}{dx} \text{ больше}$$

Найдем момент, когда $\frac{df}{dx} = \frac{dg}{dx}$

$$3^x \cdot \ln 3 = 3^{81-x} - 1$$

$$\text{В } x=81 \quad 3^x \ln 3 < 3^{81-x} - 1, \text{ т.к. } \ln 3 \approx \frac{1}{2}, \ln 3 < \frac{1}{2}$$

$$\text{В } x=82 \quad 3^x \ln 3 > 3^{81-x} - 1, \text{ т.к. } \ln 3 \cdot 3 \approx 1.5$$

Найдем $f(81) \sim g(81)$

$$3^{81} + 4 \cdot 3^{81} \sim 85 + (3^{81} - 1) \cdot 81$$

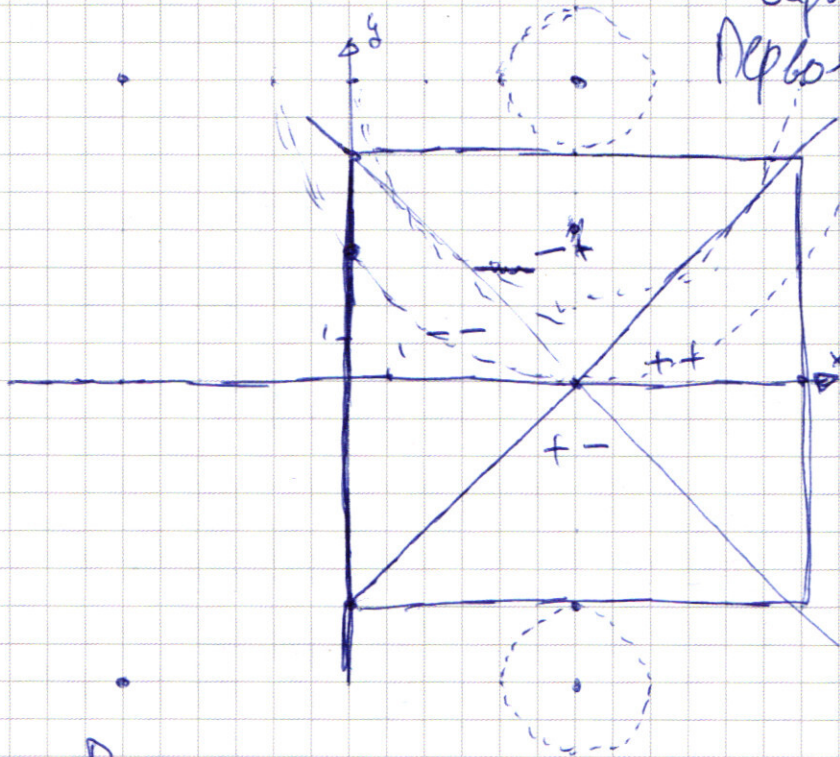
$$3^{81} + 4 \cdot 3^{81} \sim 85 + 3^{85} - 3^4$$

$$3^{91} \text{ (т.к.) } \ll 85 + 3^{85} - 3^4$$

$$5. \begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

Второе ур-е системы —
четыре окр. с центрами в
(6;8), (-6;8), (-6;-8), (6;-8)
с варьирующимся радиусом.

Первое построим, раскрыв
модуль.



Т.к. окружности,
лежащие в 2 и 3
четвертях пересекются
получившийся
квадрат только по
линии стороны окружности,
пересекается с ними

Раскроем модуль:

$$1. -x + 6 + y + x - 6 + y = 12 \\ y = 6$$

$$2. -x + 6 + y - x + 6 - y = 12 \\ -2x + 12 = 12 \\ x = 0$$

$$3. x - 6 - y + x - 6 + y = 12 \\ 2x - 12 = 12 \\ 2x = 24 \\ x = 12$$

$$4. x - 6 - y - x + 6 - y = 12 \\ -2y = 12; y = -6$$

Можно все учитывать

При $a = 4$ решений два;
далее ситуация не меняется
(в том плане, что будет решение только)
до тех пор, пока точка (0;0)
не начнет принадлежать окр.,

т.е. при $a = 100$. ~~Решение~~

~~будет одно — (0;0)~~

Решения два — (12;0) и (0;0)

После этого окружности
(их части) не будут пересекать
квадрат.

Ответ: $a = 4$; $a = 100$



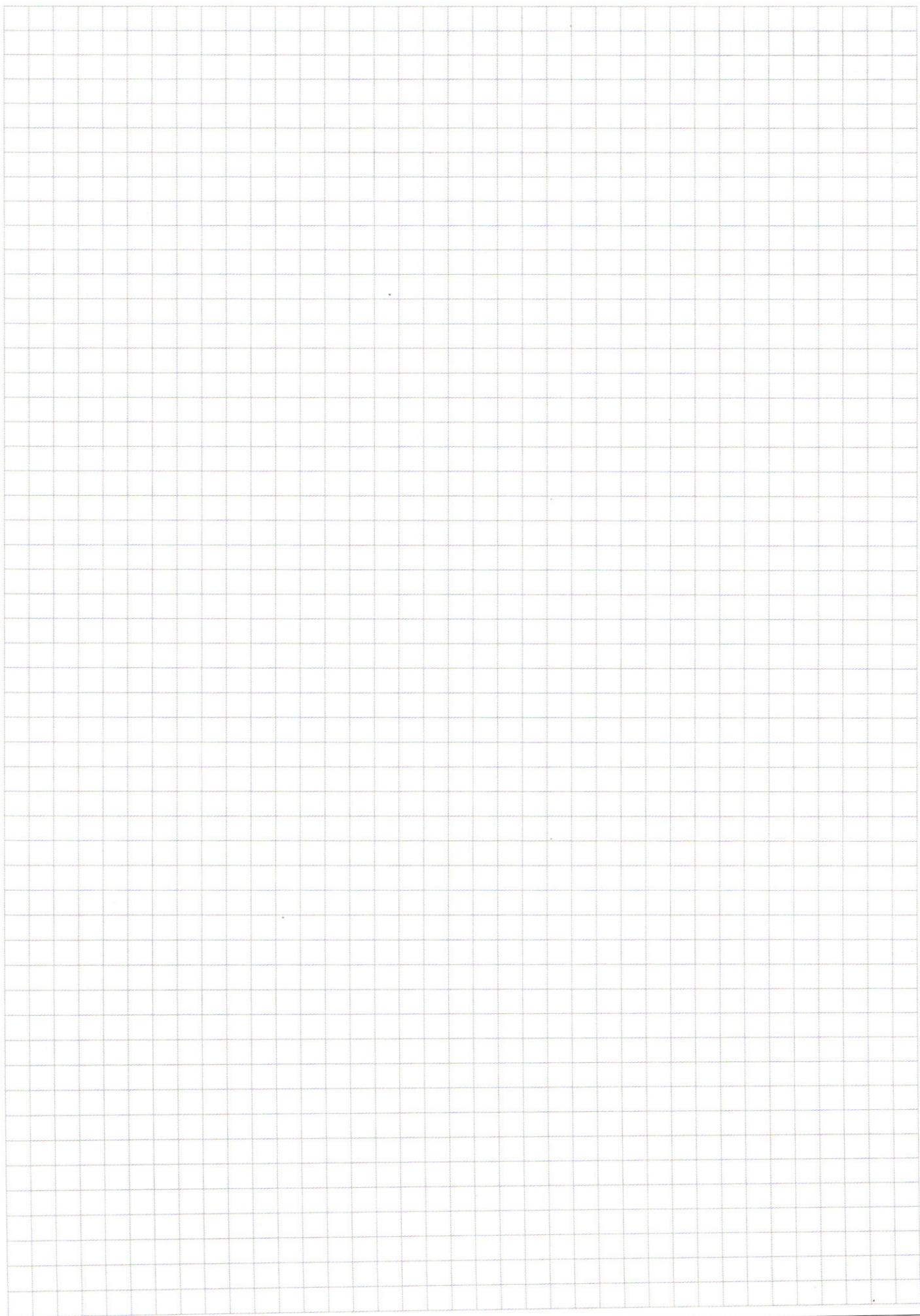
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

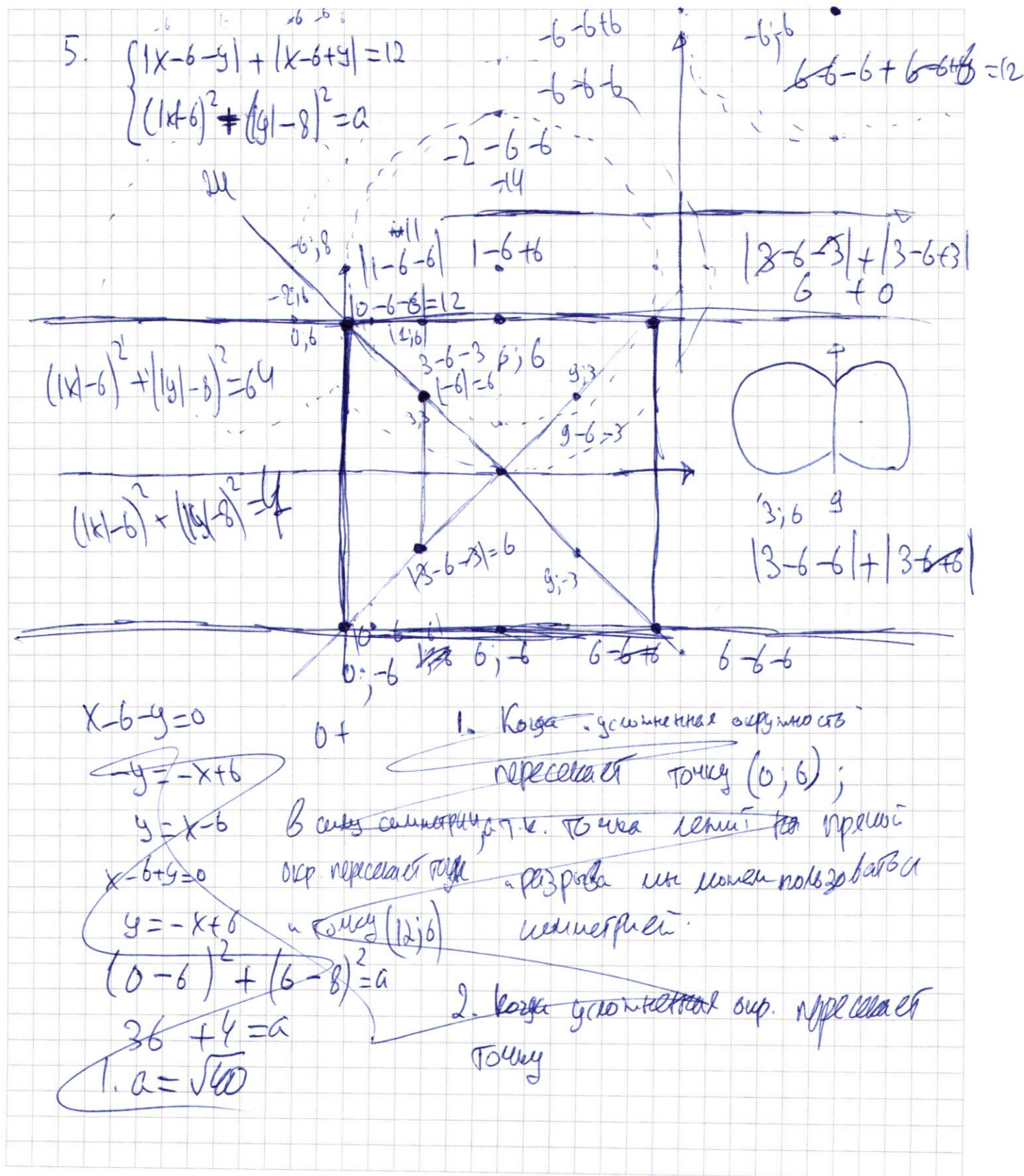
Страница №
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



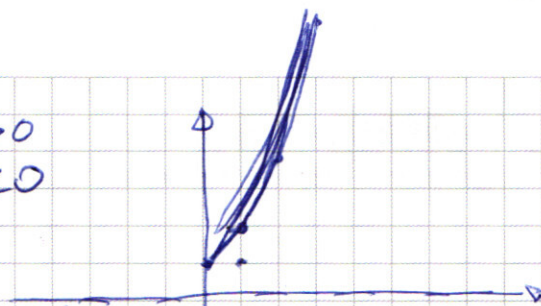
$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ (-2y-x)(x-y+4) = 0 \end{cases}$$

$$y > 0$$

$$-x > 0$$

$$x < 0$$

$$x < 0$$



$$1. x = -2y$$

$$\left(\frac{(-2y)^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (2y)^{\lg(2y^2)}$$

$$2. x = y - 4$$

$$\left(\frac{(y-4)^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (4-y)^{\lg(4-y)y}$$

$$\left(\frac{16y^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (2y)^{\lg 2y^2}$$

$$\log_a b = c \quad a^{\log_a c}$$

$$(16y^2)^{\lg y} = 2y^{\lg 2y^2}$$

$$c^{\log_a b} = b^{\log_a c}$$

$$(2^4 y^2)^{\lg y} = 2y^{\lg 2y^2}$$

$$\log_2 64 + \log_2 16 =$$

$$= 6 + 4 = 10$$

$$\log_2 64 \cdot 16 = \log_2 2^6 \cdot 2^4 = 12$$

~~2y~~

$$(2^2 y)^{\lg y^2} = 2y^{\lg 2y^2}$$

$$2^{6 \cdot \lg 2} = 2^{2 \cdot \lg 8} \quad 2^{2+2}$$

$$(2^2 y)^{\lg y^2} = (2y)^{\lg 2 + \lg 2y^2}$$

$$\lg y^2 = a$$

$$(2^2 y)^{\lg y^2} = (2y)^{\lg 2y^2} \cdot (2y)^{\lg 2}$$

$$2^{\log_4 2} = 4$$

$$(2^2 y)^a = (2y)^a \cdot 2y^{\lg 2}$$

$$3^{\log_3 3}$$

$$\left(\frac{2^2 y}{2y}\right)^a = 2y^{\lg 2}$$

$$(y^2)^{\lg 2} = 2y^{\lg 2}$$

$$y^2 = 2y$$

$$y(y-2) = 0$$

$$y \neq 0; y = 2$$

$$3^x - x(3^{81} - 1) - 85 + 4 \cdot 3^{81} = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

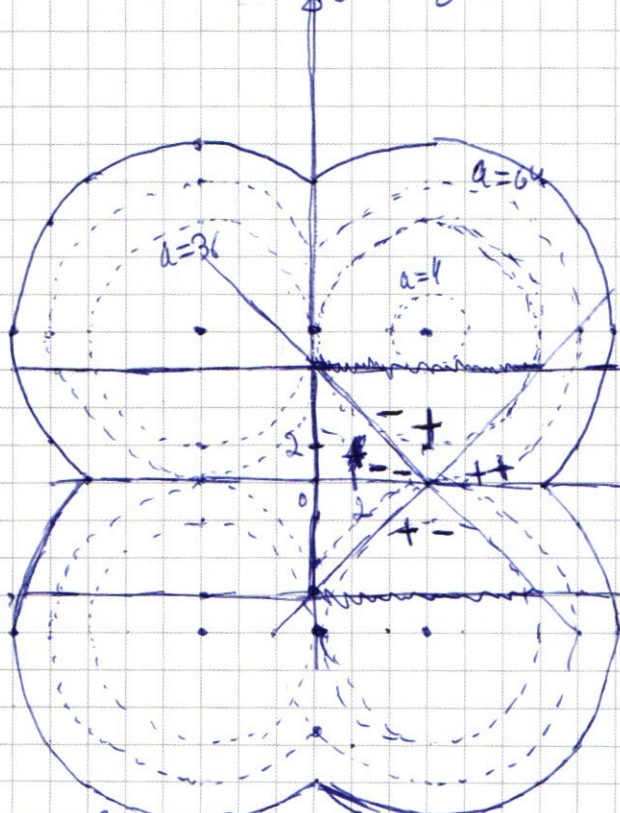
$$5. \begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

$$y \geq 3x + 4 \cdot 3^{81}$$

$$y < 85 + (3^{81} - 1)x$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{81} = 85 + (3^{81} - 1)x$$

$$3^x - 3^{81} \cdot x + x - 85 + 4 \cdot 3^{81} = 0$$



Варирующиеся радиусы. При $a \leq 4$ решений нет, при $a = 4$ решений всего 4 (каждая окр. касается прямой), дальше ($a > 4$) 8 решений, пока точка разлома окружностей не лежит на прямой (в силу симметрии это происходит

Первое ур-е системы можно интерпретировать, как две прямые, одна из которых — ограничитель другой относительно y , расстояние между которыми равно 12. (т.е. $y=6$, $y=-6$)

Второе ур-е — окружность с центром в $(6; 8)$ с варьирующимся радиусом, которая определяется относительно всех координат, когда их пересекает.

$$3^x - x(3^{81} - 1) - 85 + 4 \cdot 3^{81} = 0$$

При $a \leq 4$ решений нет
 $a = 4$ — 8 окружностей
 $a \in (4; 36)$

Второе ур-е — четыре окружности в $(6; 8)$, $(-6; 8)$, $(-6; -8)$, $(6; -8)$ с

одновременно. Найдём, при каком a происходит касание.
Точка $(0; 6)$ должна являться экстремумом.

$$(0-6)^2 + (6-8)^2 = a$$

$36 + 4 = a$, $a = 40$, При $a = 40$ решение 6

При $a \in (40; 64]$ решение 4 (При $a = 64$ окр. кас.
0x)

$$\left(\frac{(y-4)^4}{y^2}\right) \lg y = (y-4) \lg\left(\frac{(y-4)}{y}\right) \quad y-4=a$$

$$\left(\frac{a^4}{y^2}\right) \lg y = (-a) \lg(-ay)$$

$$x = y-4$$

$$a = x+4$$

$$y = a-2$$

$$x = a+2$$

8 4

$$T_{18}E = (x) \cdot 8$$

$$8 \cdot x^2 =$$

$$x^2 = (x) \cdot 8$$

$$-y = -x-4$$

$$y = x+4$$

$$\left(\frac{x^4}{(x+4)^2}\right) \lg(x+4) = (-x) \lg(-x(x+4))$$

$$\left(\frac{(a+2)^4}{(a-2)^2}\right) \lg(a-2) = (-a-2) \lg(-a-2)(a-2)$$

$$\left(\frac{x^4}{(x+4)^2}\right) \lg(x+4) = (-x) \lg(-x) \cdot (-x) \lg(x+4)$$

$$\left(\frac{(a+2)^4}{(a-2)^2}\right) \lg(a-2) = (-a-2) \lg(a^2-4)$$

$$\frac{\left(\frac{x^4}{(x+4)^2}\right) \lg(x+4)}{-x \lg(x+4)} = -x \lg(-x)$$

$$\left(\frac{x^4}{(x+4)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)\right) \lg(x+4) = -x \lg(-x)$$

$$\left(-\frac{x^3}{(x+4)^2}\right) \lg(x+4) = -x \lg(-x)$$



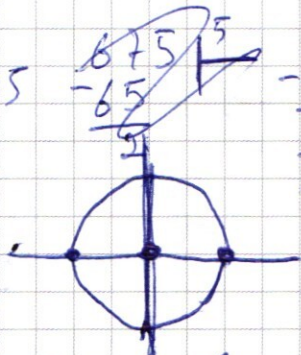
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $16875 = 5 \cdot 3375 = 5 \cdot 5 \cdot 675 = 5^3 \cdot 135 = 5^4 \cdot 27 = 5^4 \cdot 3^3$

$\alpha = x+y$
 $\beta = x+y$
 $\cos(x+y) + \cos(x+y) = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\beta-\alpha}{2}$

$$\begin{array}{r} 16875 \overline{) 5} \\ \underline{15} \\ 18 \\ \underline{15} \\ 37 \\ \underline{35} \\ 25 \\ \underline{25} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3375 \overline{) 5} \\ \underline{30} \\ 37 \\ \underline{35} \\ 25 \\ \underline{25} \\ 0 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 675 \overline{) 5} \\ \underline{5} \\ 17 \\ \underline{15} \\ 25 \\ \underline{25} \\ 0 \end{array}$$

$x = \frac{\alpha+\beta}{2}$
 $y = \frac{\beta-\alpha}{2}$
 $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$
 $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
 $\sin(x+y) = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x - y \right) =$
 $= \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cos y +$
 $\sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \sin y =$
 $= \sin x \cos y + \cos x \sin y$

5555 333 1 и переставив

5555 9311 и переставив

2. $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$

$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$
 $2 \sin 5x \cos 2x = \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{2}$

$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x$

$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} \cos 10x$

$2 \cos 2x \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} - 5x \right) = \sqrt{2} \cos 10x$

$\frac{2}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 5x - \sin 5x) \right) =$
 $\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x$
 $\sqrt{2} \left(\sin \left(\frac{\pi}{4} - 5x \right) \right)$

$2 \cos 2x \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} - 5x \right) = \cos 10x$

$\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$
 $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x + \cos^2 x + \sin^2 x - 1$

$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} / 2$

$81 = 27 - 3 = \sqrt{3}$
 $2 \cos^2 x - 1$

$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) / (\cos 5x + \sin 5x)$

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases}$$

$$(2y-x)(x-4) =$$

$$2yx - x^2 - 8y - 4x$$

$$(2y-x)(x-y-4) =$$

$$= 2yx - x^2 + xy - 2y^2$$

$$(2y-x)(x+y-4) =$$

$$= 2xy + 2y^2 - 8y - x^2 - xy - 4x =$$

$$= xy + 2y^2 - 8y - x^2 - 4x$$

$$(-2y-x)(x-y+4) =$$

$$= -2yx + 2y^2 - 8y - x^2 + xy - 4x =$$

$$= 2y^2 - xy - 8y - x^2 - 4x$$

$$(-2y-x)(x-y+4) = 0$$

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \end{cases}$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{2\lg y} = -x^{\lg(-xy)}$$

$$\frac{x^{4\lg y}}{y^{2\lg y}} = -x^{\lg(-xy)} \cdot y^{2\lg y}$$

$$a^{\lg b} = b^{\lg a}$$

$$y > 0$$

$$-xy > 0$$

$$xy < 0$$

$$x \neq 0$$

$$\lg a \cdot b = b$$

$$a \neq b$$

$$a = b$$

$$a^{\lg a b}$$

$$a^{\lg a \cdot a}$$

$$a^{\lg a c}$$

$$2^{\lg a b}$$

$$\log_2 8 = 3$$

$$2^{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{2}$$

$$2^{\lg a b} = b^{\lg a 2}$$

$$\begin{cases} -2y - x = 0 \\ x - y + 4 = 0 \end{cases}$$

$$y > 0$$

$$x = -2y$$

$$x = y - 4$$

$$\frac{(-2y)^{4\lg y}}{(2y)^{\lg(-xy)}} = \frac{(-2y)^{4\lg y}}{(2y)^{\lg(-xy)}} \cdot y^{2\lg y}$$

$$-x = a$$

$$a^{\lg a y}$$

$$(ay)^{\lg a}$$

$$\left(\frac{16y^2}{y^2}\right)^{\lg y} = \left(\frac{16y^2}{y^2}\right)^{\lg 2y^2}$$

$$\left(\frac{16y^2}{y^2}\right)^{\lg y} = \left(\frac{16y^2}{y^2}\right)^{\lg 2y^2}$$

$$x^{4\lg y} = -x^{\lg(-xy)} \cdot y^{2\lg y}$$

$$\left(\frac{16y^2}{y^2}\right)^{\lg y} = \left(\frac{16y^2}{y^2}\right)^{\lg 2y^2}$$