

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО М

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Числа имеют вид $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7}$, где $a_i \neq 0$

$16875 = 5^4 \cdot 3^3$. Т. к. это число получено произведением цифр, то возможны 2 варианта:

1. Это цифры 5, 5, 5, 5, 3, 3, 3, 1

2. Это цифры 5, 5, 5, 5, 3, 9, 1, 1

В первом случае вариантов: $= C_8^4 \cdot C_4^3$ („5“, „3“)

Во втором случае вариантов: $= C_8^4 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1$ („5“, „3“, „9“)

Пояснение: кол-во ^{способов} выбрать числа равные K из N элементов $= C_N^K$

$$C_8^4 \cdot C_4^3 = \frac{8!}{4! \cdot 4!} \cdot \frac{4!}{3! \cdot 1!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4} =$$

$$C_8^4 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1 = \frac{8!}{4! \cdot 4!} \cdot \frac{4!}{3! \cdot 1!} \cdot \frac{3!}{2! \cdot 1!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2} = 5 \cdot 7 \cdot 8 = 280$$

$$= \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2} = 840$$

$$\text{Всего} = 280 + 840 = 1120$$

Ответ: 1120

№3

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим второе ур-е

см. след. стр

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$(2y + x)(y - x - 4) = 0$$

$$\begin{cases} x = -2y \\ x = y - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^{4\lg y} \cdot y^{-2\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ \begin{cases} x = -2y \\ x = y - 4 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l} \text{I} \begin{cases} x^{4\lg y} \cdot y^{-2\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ x = -2y \end{cases} \\ \text{II} \begin{cases} x^{4\lg y} \cdot y^{-2\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ x = y - 4 \end{cases} \end{array}$$

$$\# \text{ I } (-2y)^{4\lg y} \cdot y^{-2\lg y} = (2y)^{\lg 2y^2}$$

прологарифм ↓

$$16^{\lg y} \cdot (y^4)^{\lg y} = 2^{\lg 2y^2} \cdot y^{2\lg y}$$

$$\lg(16^{\lg y} \cdot y^{4\lg y}) = \lg(2^{\lg 2y^2} \cdot y^{2\lg y})$$

$$\lg y \cdot \lg 16 + 4 \lg y \cdot \lg y = \lg 2y^2 \cdot \lg 2 + 2 \lg y \cdot \lg y$$

$$\lg 2y^2 \cdot \lg 2 = \lg 2 (\lg 2 + 2 \lg y)$$

$$\lg y \cdot 4 \lg 2 + 4 \lg^2 y = \lg^2 2 + 2 \lg y \lg 2 + 2 \lg y^2$$

$$\lg^2 2 = 2 (\lg y^2 + \lg y \lg 2)$$

продолж. $\lg(x^{4\lg y} \cdot y^{-2\lg y}) = \lg((-x)^{\lg(-xy)})$

$$4 \lg y \cdot \lg(-x) - 2 \lg y^2 = \lg^2(-x) + \lg(-x) \lg y$$

$$\lg^2(-x) - 3 \lg(-x) \lg y + 2 \lg^2 y = 0$$

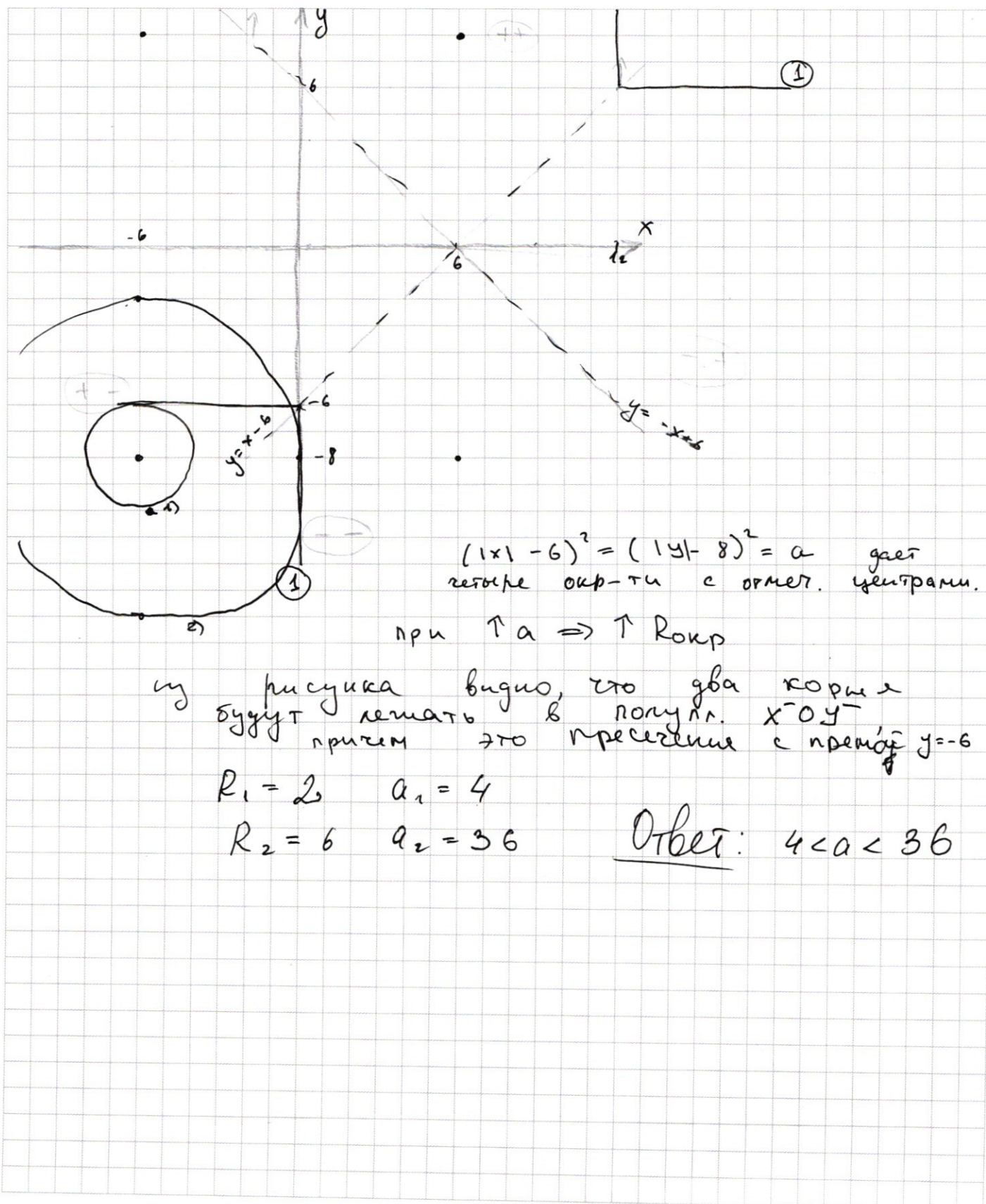
$$(\lg(-x) - \lg y)(\lg(-x) - 2 \lg y) = 0$$

$$\begin{cases} \lg(-x) = \lg y \\ \lg(-x) = 2 \lg y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lg(-x) = \lg y \\ \lg(-x) = 2 \lg y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ -x = y^2 \\ x = -2y \\ x = y - 4 \end{cases}$$

след. стр.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\begin{cases} x = -y & (1) \\ y = -y^2 & (2) \\ x = -2y & (3) \\ x = y - 4 & (4) \end{cases}$$

(1) $\cap$ (3):

$$\begin{cases} x = -y \\ x = -2y \end{cases}$$

$$-y = -2y \quad y = 0, \text{ не подходит}$$

$$\begin{cases} y > 0 & y \neq 1 \\ x < 0 & x \neq 1 \end{cases}$$

(1) $\cap$ (4):

$$\begin{cases} x = -y \\ x = y - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -y = y - 4 \\ y = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

(2) $\cap$ (3):

$$\begin{cases} x = -2y \\ y = -y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 = 2y \\ y = 2 \\ x = -4 \end{cases}$$

(2) $\cap$ (4):

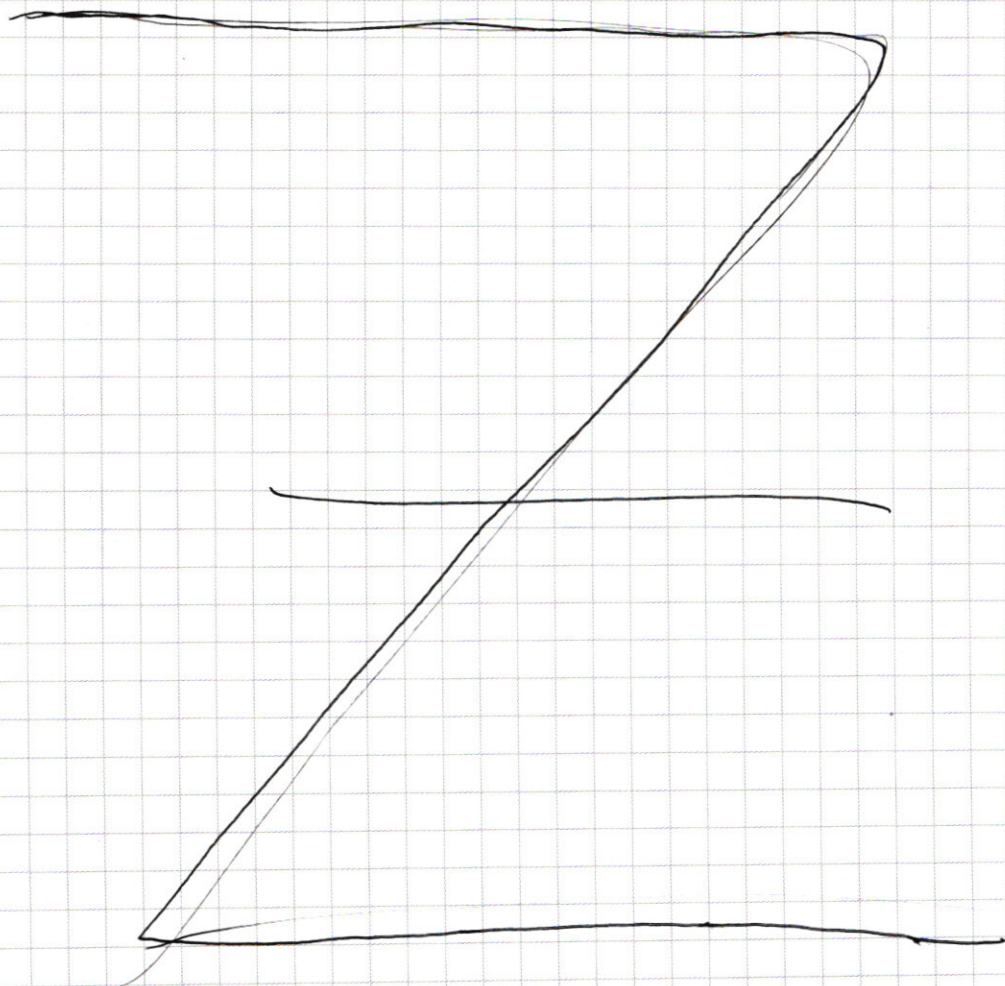
$$\begin{cases} x = -y^2 \\ x = y - 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x = -y^2 &= y - 4 \\ y^2 + y - 4 &= 0 \\ D &= 17 \end{aligned}$$

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

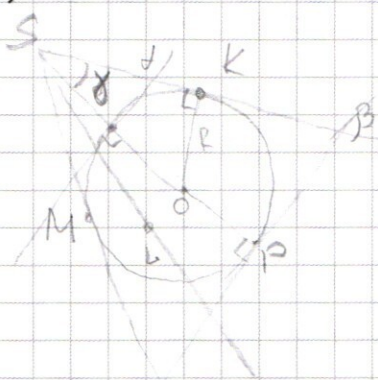
$$\begin{cases} y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \\ x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} - 4 \end{cases}$$

Ответ: $(-2; 2), (-4, 2),$
 $\left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}, -4, \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \right)$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N4



Пробегем прямою SO
 $\alpha \perp SO$, α - касат $\Rightarrow$
 $\beta \perp SO$, β - касат

$\Rightarrow$ прямая SO пересекает сферу в точках касания этой сферы с пл.-мид. B .

Рассмотрим ~~ΔSPB~~ тр-ки, высекаемые углом ка пл-тых α' и β :

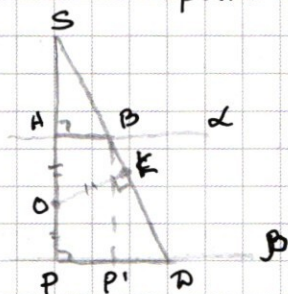
$$S_{A \downarrow} = 4, S_{A \uparrow} = 9$$

$$\Delta \alpha \sim \Delta \beta$$

$$\frac{S_{\Delta\alpha}}{S_{\Delta\beta}} = k^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

k - коэф. подобия.

Рассмотрим ΔSBP



Сфера касается: $\begin{cases} SK \in \text{точка } K \\ \pi_1 - \text{тб } \angle \delta \quad (\cdot) A \\ \pi_2 - \text{тб } \beta \quad (\cdot) P \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow AO = OK = OP = R$$

$$\frac{AB}{PD} = k = \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{matrix} AB = 2x \\ PD = 3x \end{matrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} AB = BK \\ KD = DP \end{array} \right\} \text{ как отрезки касат.}$$

$$BD = BK + KD = 5x$$

Проведем $BP' \parallel AP \Rightarrow AP = BP'$

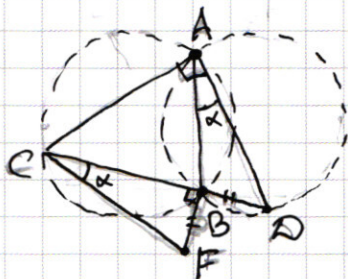
$$\angle KSO = \angle OKP'$$

$$P'D = PD - AB = x$$

$$\sin \angle DBP' = \sin \angle KSO = \frac{P'D}{BD} = \frac{1}{5} = \frac{P'D}{BP}$$

Ответ: $\angle KSO = \arcsin \frac{1}{5}$

N6



$$R_1 = R_2 = R = 13$$

CF - ?
Периметр

$$1. AB = 2R \sin \angle ADB = 2R \sin \angle ACB \Rightarrow \angle ACB = \angle ADC \Rightarrow AC = AD; \angle ACD = \angle ADC = 45^\circ$$

$$2. FB = BD = 2R \sin \alpha$$

$$CB = 2R \sin(90^\circ - \alpha) = 2R \cos \alpha$$

$$CF = \sqrt{FB^2 + BC^2} = 2R \sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = 2R = \underline{26}$$

$$BC = 10 = 26 \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{10}{26}$$

$$2R \sin(90^\circ - \alpha)$$

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{26^2 - 10^2}{26^2}} = \sqrt{\frac{36^2 - 46}{26^2}} = \frac{24}{26}$$

$$\sin \angle BCF = \frac{BF}{CF} = \frac{2R \sin \alpha}{2R} = \sin \alpha \Rightarrow \angle BCF = \alpha$$

$$\angle ABC = 45^\circ + \alpha = \angle ACF$$

$$\sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) = \sin \alpha \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \cos \alpha \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{34}{26} = \frac{17\sqrt{2}}{26}$$

$$\cos(\alpha + \frac{\pi}{4}) =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} (\sin \alpha + \cos \alpha)$$

$$AC = 2R \sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) = 17\sqrt{2}$$

$$S_{ACF} = \frac{1}{2} AC \cdot CF \cdot \sin \angle ACF = \frac{1}{2} \cdot 17\sqrt{2} \cdot 26 \cdot \frac{17\sqrt{2}}{26} = 17^2$$

Ответ: CF = 26
S_{ACF} = 289

N5

$$\begin{cases} I & II \\ |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

$$I - y = x - 6$$

$$II - y = -x + 6$$

/ мулч

$$\begin{pmatrix} + & + \end{pmatrix} \begin{cases} 2x - 12 = 12 \\ x = 12 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} + & - \end{pmatrix} \begin{cases} -2y = 12 \\ y = -6 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} - & + \end{pmatrix} \begin{cases} 2y = 12 \\ y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} - & - \end{pmatrix} \begin{cases} -2x + 6 \cdot 2 = 12 \\ x = 0 \end{cases}$$

Графики на след. стр

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x = -y & (1) \\ x = -y^2 & (2) \\ x = -2y & (3) \\ x = y - 4 & (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y > 0 & y \neq 1 \\ x \neq 0 & x \neq -1 \end{cases}$$

$$(1) \cap (3):$$

$$\begin{cases} x = -y \\ x = -2y \end{cases}$$

$$-y = -2y$$

$y = 0$, нет корней

$$(1) \cap (4):$$

$$\begin{cases} x = -y \\ x = y - 4 \end{cases}$$

$$-y = y - 4$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$(2) \cap (3):$$

$$\begin{cases} x = -2y \\ x = -y^2 \end{cases}$$

$$y^2 = 2y$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ x = -4 \end{cases}$$

$$(2) \cap (4):$$

$$\begin{cases} x = -y^2 \\ x = y - 4 \end{cases}$$

$$-x = y^2 = 4 - y$$

$$y^2 + y - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} - 4$$

Ответ: $(-2; 2), (-4, 2)$

$$\left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{2} - 4; \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \right)$$

Черновик



Черновик

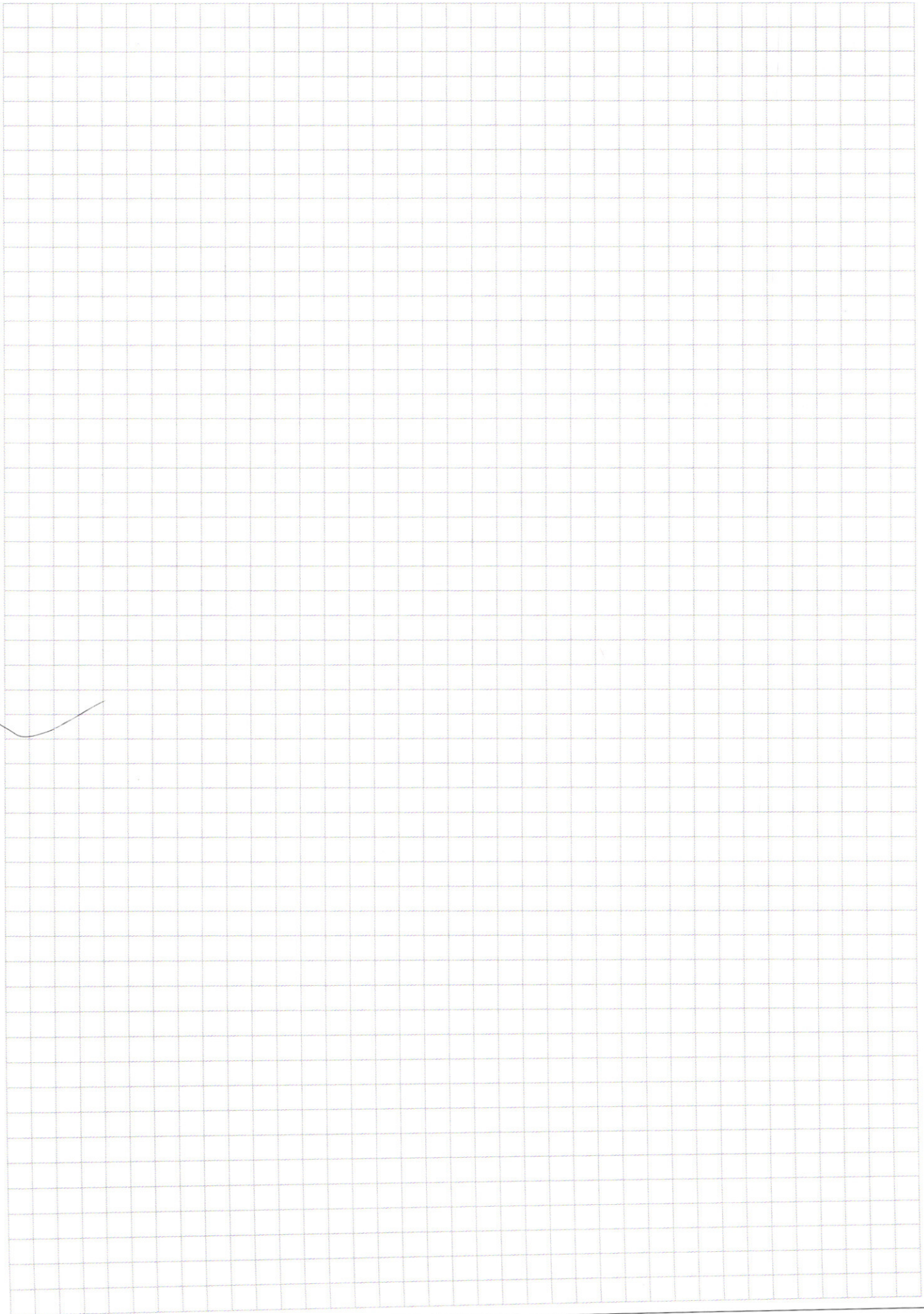


Чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

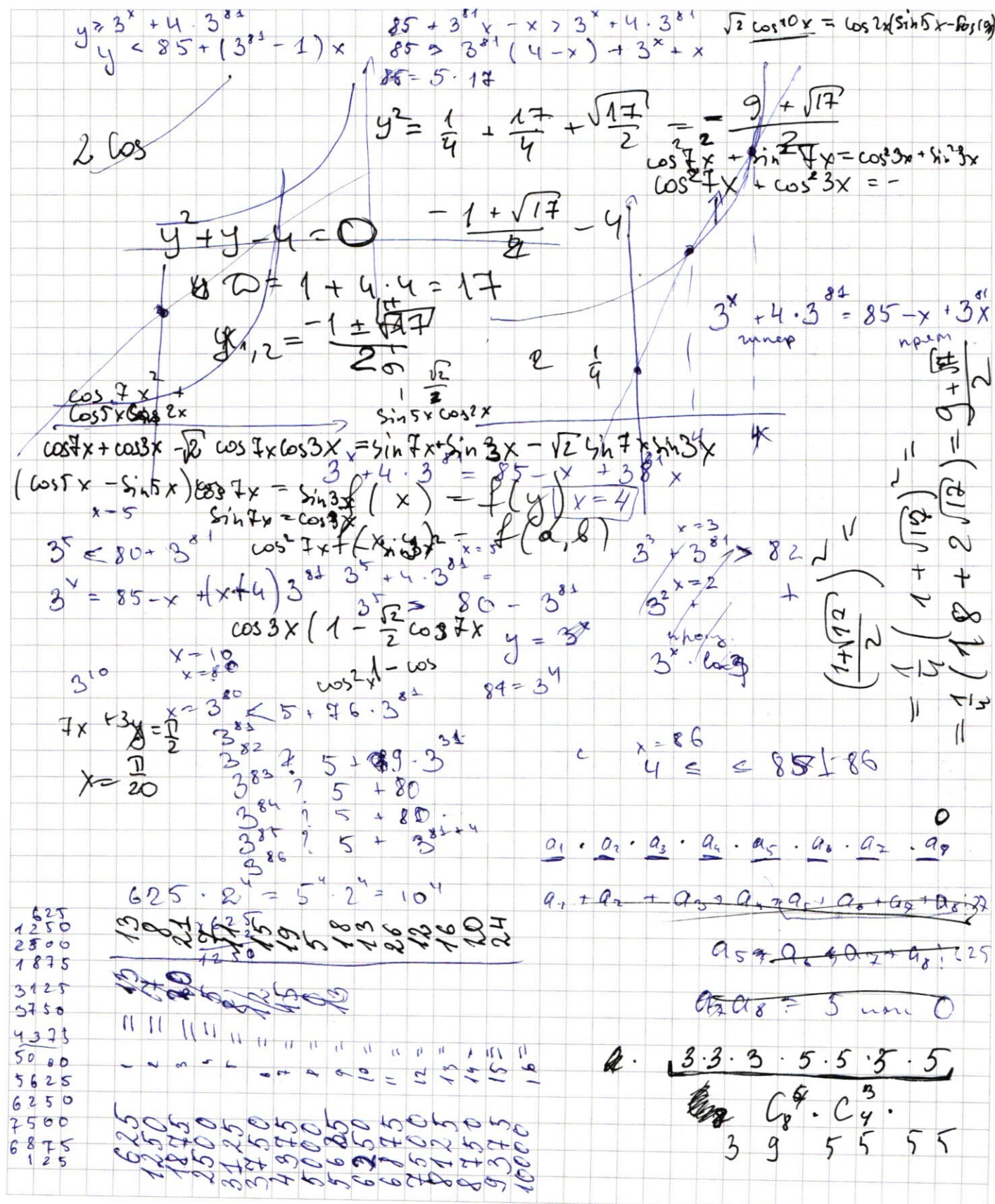
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$(4) \lg y = (2y)^{\lg 2y^2}$$

$$(2y)^{4\lg y} \cdot y^{-2\lg 2} = (2y)^{2\lg 2y^2}$$

$$16^{\lg y} \cdot y^{2\lg y} = 4^{\lg 2y^2} \cdot y^{4\lg y}$$

$$(1-x)^{4\lg y - \lg(1-x)} = y^{2\lg y}$$

$$\lg(16^{\lg y} \cdot y^{2\lg y} \cdot y^{-2\lg 2}) = \lg(y^{\lg 2y^2})$$

$$\lg 16^{\lg y} + \lg y^{4\lg y} + \lg y^{-2\lg 2} = \lg y^{\lg 2y^2}$$

$$\lg y \cdot \lg 16 + 2\lg^2 y = \lg y \lg 2y$$

$$\lg 16 + 2\lg y = \lg 2 + \lg y$$

$$\lg y = \lg 2 - 4\lg 16 = -3\lg 2$$

$$y = 2^{-3}$$

$$2\lg^2 y + 4\lg 16$$

$$2\lg^2 y + 4\lg 2 \lg y = \lg^2 2 + 2\lg 2 \lg y$$

$$\lg 2 (\lg^2 2 + 2\lg y)$$

$$2\lg y (\lg y + 2\lg 2)$$

$$4xa + 4x^2 = a^2 + 2ax + 2x^2$$

$$\lg 2 = a$$

$$\lg y = x$$

$$\lg y (4\lg x - 2\lg y) = \lg^2 2 + 2\lg 2 \lg y$$

$$= \lg(-x) + \lg(-x) \lg y$$

$$\lg y (4\lg 2y - 2\lg y) =$$

$$2\lg 2 + 2\lg y$$

$$y=2 \quad \lg y=1$$

$$4 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 2$$

$$2 + 2 \cdot 1 = 4$$

$$x(1 - \lg 2) + \lg 2 > 0 \Rightarrow \lg 2 < 1$$

$$x < 1$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Handwritten mathematical work on grid paper, including calculations, trigonometric identities, and geometric diagrams.

Top Left: Long division of 16875 by 125, resulting in 135.

Top Middle: Trigonometric identity: $(\cos 7x - \sin 7x) + (\cos 3x - \sin 3x) = \sqrt{2} \cos 10x$

Top Right: Long division of 1675 by 125, resulting in 13.5.

Middle Left: Long division of 1675 by 125, resulting in 13.5.

Middle: Trigonometric identities and simplifications:

$$2 - \sin 14x - \sin 6x + \cos 10x + \cos 4x = 2 \cos 10x + \cos 4x$$

$$2 - \sin 14x - \sin 6x - 2 \sin 10x + 2 \cos 4x = 2 \cos^2 10x$$

$$2 \cos 7x \cos 3x = \cos 10x + \cos 4x$$

$$2 \cos 7x \sin 3x = \sin 10x + \sin 4x$$

$$2 \sin 7x \cos 3x = \sin 10x + \sin 4x$$

$$2 \sin 7x \sin 3x = \cos 10x - \cos 4x$$

$$-2 \sin 10x + 2 \cos 4x$$

Bottom Left: Geometric diagrams showing triangles and circles with various labels and angles.

Bottom Middle: Algebraic expressions and identities:

$$y^2 - xy - x^2 + y^2 - 4x - 8y$$

$$g(y-x) - (x-y)(x+y) = 4x + 8y$$

$$(y-x)(2y+x) = 4x + 8y$$

$$(y-x)(2y+x) - 4(2y+x) = 0$$

$$(y-x)(2y+x) - 4(2y+x) = 0$$

Bottom Right: A table of numbers and a final statement:

3	3	3	5	5	5	5
3	9	5	5	5	5	5
3	3	6	5	.	.	.
3	6	6				
6	9					

 ост — единицы

$$\begin{aligned} \cos 7x + \cos 3x &= \sqrt{2} \cos 5x = \sin 7x + \sin 3x \\ 2 \cos 5x \cos 2x &= \sqrt{2} \cos 5x + \sqrt{2} = 2 \\ \cos 5x \cos 2x &= \cos 5x + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 5x \cos 2x \\ \cos 10x &= \cos 7x \cos 3x - \sin 7x \sin 3x \\ &= \cos 7x \cos 3x - \frac{1}{2} \cos 4x + \cos 4x \\ &= \cos 7x \cos 3x - \frac{1}{2} \cos 7x \cos 3x \\ &= \frac{1}{2} \cos 7x \cos 3x \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 4375 \\ 1250 \\ \hline 16225 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 117 \\ 119 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$(20-3) \cdot 10 \cdot 1$$

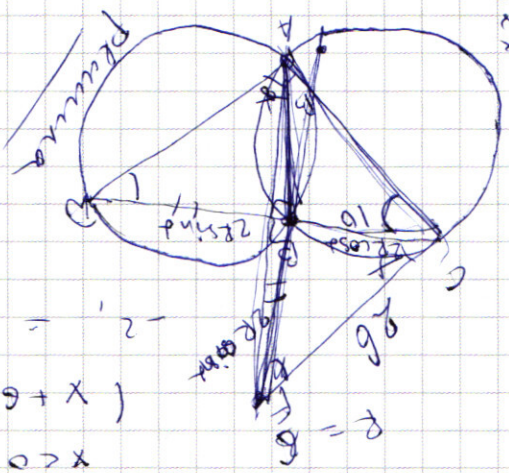
$$R \sin d = 2R \cos B$$

$$2R \cos d = 10 \Rightarrow \cos d = \frac{10}{26} \Rightarrow \sin d = \frac{36 \cdot 16}{26} = \frac{24}{26}$$

$$CF = \sqrt{2R^2 (\cos^2 d + \sin^2 d)} = 2R$$



$$CF = 26$$

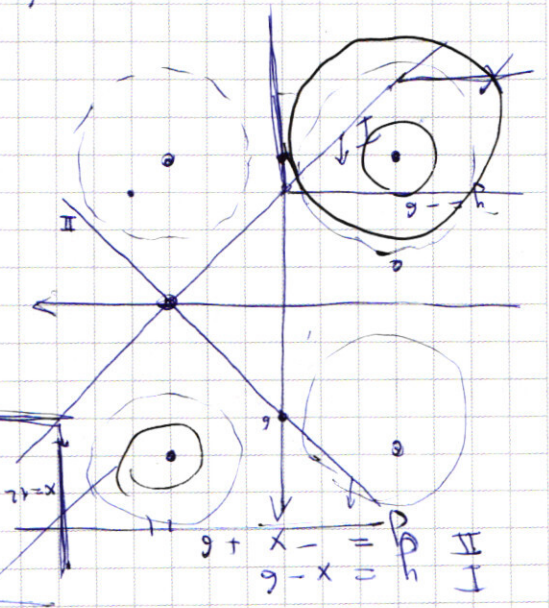
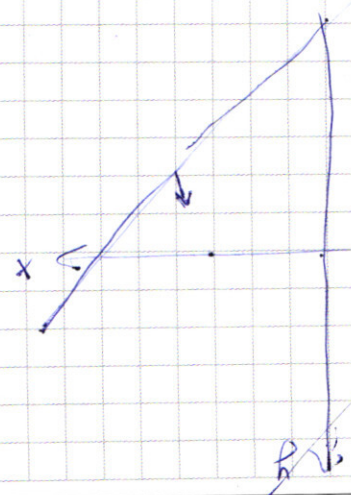


$$\begin{aligned} (x+6)^2 + (y-8)^2 &= 0 \\ x < 0 \\ y < 0 \\ (1 \cdot 1 - 6)^2 + (1 \cdot 1 - 8)^2 &= 2 \\ 24 = 12 \cdot y = 6 \\ x = 0 \\ 24 = 12 \cdot y = 6 \end{aligned}$$

$$\frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 1} = 840$$

$$\begin{aligned} + + : 2x - 12 = 12 \\ x = 12 \\ + - : 2y - 12 = 12 \\ y = 12 \end{aligned}$$

$$\frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 3$$



$$\begin{aligned} |x-6-y| + |x-6+y| &= 12 \\ (x, y) &= (x, -y) \end{aligned}$$