

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р;
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание 1

$3375 = 3^3 \cdot 5^3$. Т.к. произведение цифр равно 3375, то в числе могут быть только цифры 1, 3, 5, 9, иначе в произведении появится 'новый' простой множитель.

Чтобы получить 5^3 в числе должно быть ровно три цифры "5". Чтобы получить 3^3 в числе должно быть либо три цифры "3", либо одна "3" и одна "9". Все остальные цифры в числе - "1".

Когда всего таких чисел:

$$\begin{aligned} C_8^3 \cdot C_5^3 + C_8^3 \cdot C_5^1 \cdot C_4^1 &= C_8^3 (C_5^3 + C_5^1 \cdot C_4^1) = C_8^3 \left(\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 1} \right) = \\ &= C_8^3 \cdot 5 \cdot 2 (1 + 2) = C_8^3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = \\ &= 8 \cdot 210 = 1680 \end{aligned}$$

(C_8^3 - варианты выбора шест, где стоит "5", C_5^3 - где стоит три "3", остальные места займут "1"; C_5^1 - где стоит "3", C_4^1 - где "9", остальные "1")

Ответ: 1680

Задание 6

Две ~~внутренние~~ дуги АВ двух окружностей равны, т.к. равны сами окружности (если O_1, O_2 - центры, то $\triangle O_1 A O_2$ - $\triangle O_2 A O_1$ ($O_1 A = O_2 A = R$ - радиусы) $\Rightarrow \angle O_2 O_1 A = \angle O_1 O_2 A \Rightarrow \angle A O_1 B = \angle A O_2 B \Rightarrow \angle A B = \angle A B$, где $\angle A B$ - ~~внутренний~~ дуга первой окружности, $\angle A B$ - второй).

$$\Rightarrow \angle A C B = \frac{1}{2} \angle A B = \frac{1}{2} \angle A B = \angle A D B$$

$$\angle A C B + \angle A D B + \angle C A D = 180^\circ \quad (\triangle A C D), \text{ по условию } \angle C A D = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle A C B + \angle A D B = 90^\circ \Rightarrow \angle A C B = \angle A D B = 45^\circ$$

Обозначим радиус окружностей за R ($R=5$).

Пусть $\angle C A B = \alpha$, тогда $\angle D A B = 90^\circ - \alpha$

$\Rightarrow \angle CO_1B = 2\alpha$, $\angle BO_2D = 180^\circ - 2\alpha$ (центральный угол)
(где O_1, O_2 — центры сферических)

По теореме косинусов в $\triangle CO_1B$

$$CB = \sqrt{R^2 + R^2 - 2R^2 \cos 2\alpha} = R \sqrt{2 - 2\cos 2\alpha}$$

в $\triangle BO_2D$ $BD = \sqrt{R^2 + R^2 - 2R^2 \cos(180^\circ - 2\alpha)} = \sqrt{2R^2 + 2R^2 \cos 2\alpha} =$

$$= R \sqrt{2 + 2\cos 2\alpha}, \text{ по условию } BF = BD = R \sqrt{2 + 2\cos 2\alpha}$$

По теореме Пифагора в $\triangle CBF$ $CF = \sqrt{CB^2 + BF^2} =$

$$= \sqrt{2R^2 - 2R^2 \cos 2\alpha + 2R^2 + 2R^2 \cos 2\alpha} = \sqrt{4R^2} = 2R \text{ (т.к. } R=5\text{)}$$

$$\Rightarrow CF = 10$$

Если $BC = 6$, $CF = 10$, то $BF = 8$ (Пифагорова тройка)

$$\Rightarrow BD = BF = 8 \Rightarrow CD = CB + BD = 6 + 8 = 14$$

$\triangle CAD$ — $\pi/8$, прямоугольный $\Rightarrow AC = \frac{CD}{\sqrt{2}} = 7\sqrt{2}$

$$\Rightarrow S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} AC \cdot CF \cdot \sin \angle ACF = \frac{1}{2} \cdot 7\sqrt{2} \cdot 10 \cdot \sin(45^\circ + \angle BCF) =$$

$$= 35\sqrt{2} (\sin 45^\circ \cos \angle BCF + \sin \angle BCF \cos 45^\circ) = 35\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) =$$

$$= 35\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{7}{5} = 49 \quad / \sin \text{ и } \cos \angle BCF \text{ равны}$$

$\frac{4}{5}$ и $\frac{3}{5}$ по определению синуса и косинуса острого угла прямоугольного $\triangle CBF$)

Ответ: $CF = 10$, $S_{\triangle ACF} = 49$.

Задание 4

Пусть сечение меньшей площади, образованное касательной, перпендикулярной SO , касается сферы в точке B , а сечение большей площади — в точке A .

Большее сечение получается из меньшего поворотом с центром в точке S и коэффициентом

$$\frac{SA}{SB} \Rightarrow \text{их площади относятся, как } \frac{SA^2}{SB^2} \Rightarrow \text{по условию их отношение равно } 4 \Rightarrow \frac{SA^2}{SB^2} = 4$$

$$\Rightarrow SA = 2SB \quad (SA > 0, SB > 0)$$

Пусть R — радиус сферы, тогда $AO = BO = R, \Rightarrow AB = 2R$.

$$SA - SB = SB \Rightarrow AB = SB = 2R, SO = SB + BO = 3R$$

$\triangle KSO$ — прямоугольный, т.к. K — точка касания грани трехгранного угла со сферой.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\Rightarrow$ по определению синуса острого угла прямоугольного $\triangle KSO$ $\sin \angle KSO = \frac{KO}{SO} = \frac{R}{3R} = \frac{1}{3}$ (KO - радиус сферы)

$\Rightarrow \angle KSO = \arcsin \frac{1}{3}$ (т.к. угол острый).

$SK = SL = SM$ - касательные.

Опустим перпендикуляр из O на (KLM) , его основание точка I .

Пусть $\triangle XYZ$ - сечение угла плоскостью (KLM) , $K \in XZ$.

$OK \perp XZ$ (касательная и радиус), $OI \perp IK$, т.к. $OI \perp (KLM)$

$\Rightarrow$ по теореме о трех перпендикулярах $IK \perp XZ$, аналогично для L и M , $IK = \sqrt{OK^2 - OI^2} = \sqrt{R^2 - IO^2} \Rightarrow IK = IL = IM \Rightarrow I$ - центр $\triangle XYZ$.

из I восстановим перпендикуляр $S'I$ (KLM) (S' и O по разные стороны от плоскости) так, что $S'I = \sqrt{SK^2 - KI^2}$, тогда $S'I = S'L = S'M \Rightarrow S \equiv S'$

$\Rightarrow I \in SO$, $(KLM) \perp SO$

$\Rightarrow \triangle XYZ$ получается из меньшего сечения рассматриваемого $\odot$ кагане сечение гомотетическое с центром S и коэффициентом $\frac{SI}{SB}$.

В $\triangle KSO$ KI - высота $\Rightarrow \angle KSO = \angle IKO \Rightarrow IO = \frac{KO}{3} = \frac{R}{3}$

$\Rightarrow SI = SO - IO = 3R - \frac{R}{3} = \frac{8}{3}R$

$\Rightarrow \frac{SI}{SB} = \frac{\frac{8}{3}R}{2R} = \frac{4}{3}$

Площади гомотетических треугольников относятся как $\frac{16}{9} \Rightarrow S_{\triangle XYZ} = \frac{16}{9} \cdot 1 = \frac{16}{9}$

Ответ: $\angle KSO = \arcsin \frac{1}{3}$, $S = \frac{16}{9}$

$S \in \mathbb{R}$

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} &= y^{2 \lg xy} \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y &= 0 \end{aligned} \right.$$

ОДЗ: $x \neq 0$, $x > 0$, $y > 0$
($x > 0$, $xy > 0 \Rightarrow y > 0$)

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

Решим второе уравнение относительно x

$$x^2 + x(-2y - 4) + (12y - 3y^2) = 0$$

$$\Delta = 4y^2 + 16 + 16y - 48y + 12y^2 = 16y^2 - 32y + 16 = 16(y^2 - 2y + 1) = 16(y-1)^2$$

$$x = \frac{2y+4 \pm 4(y-1)}{2} = y+2 \pm 2y-1$$

$$x_1 = y+2+2y-2 \quad \text{или} \quad x_2 = y+2-2y+2$$

$$x_1 = 3y$$

$$x_2 = 4-y$$

Теперь решим первое уравнение относительно x .

$$\frac{y^{5\lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2\lg xy} \quad | \cdot x^{\lg x} \neq 0$$

$$y^{5\lg x} = y^{2\lg xy} \cdot x^{\lg x}$$

$$\log_y y^{5\lg x} = \log_y (y^{2\lg xy} \cdot x^{\lg x}) \quad (\text{если } y \neq 1)$$

$$5 \lg x = 2 \lg xy + \log_y x^{\lg x}$$

$$5 \lg x = 2 \lg x + 2 \lg y + \lg x \cdot \log_y x$$

$$3 \lg x = 2 \lg y + \lg x \cdot \log_y x$$

$$3 \lg x = 2 \lg y + \lg x \cdot \frac{\lg x}{\lg y} \quad | \cdot \lg y \neq 0, \text{ т.к. } y \neq 1$$

$$3 \lg x \lg y = 2 \lg^2 y + \lg^2 x$$

$$\lg^2 x - 3 \lg y \cdot \lg x + 2 \lg^2 y = 0$$

$$\Delta = 9 \lg^2 y - 8 \lg^2 y = \lg^2 y$$

$$\lg x = \frac{3 \lg y \pm \lg y}{2}$$

$$\lg x = 2 \lg y$$

или

$$\lg x = \lg y$$

$$\Downarrow$$

$$x = y$$

$$\lg x = \lg y^2$$

$$\Downarrow$$

$$x = y^2$$

Рассмотрим 4 случая:

$$1) \begin{cases} x = 3y \\ x = y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 9 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x = 3y \\ x = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ не удовлетворяет ОДЗ.}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3) \begin{cases} x = 4 - y \\ x = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x = 4 - y \\ x = y^2 \end{cases}; \quad 4 - y = y^2; \quad y^2 + y - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17 \Rightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}, \quad y = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \text{ не удовлет-} \\ \Rightarrow y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \text{ ворнет 013}$$

$$x = 4 + \frac{1 - \sqrt{17}}{2} \Rightarrow x = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}, \text{ т.е. } \begin{cases} x = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

Остаточное рассмотрим случай $y = 1$

Подставим в первое уравнение:

$\left(\frac{1}{x}\right)^{\lg x} =$ Подставив в любое из корней второго уравнение, получим $x = 3$.

Подставим в первое уравнение

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\lg 3} = 1^{2 \lg 3} \text{ неверно, т.к. } \left(\frac{1}{3}\right)^{\lg 3} \neq 1, \\ 1^{2 \lg 3} = 1.$$

Ответ: $(3; 3), (2; 2), \left(\frac{9 - \sqrt{17}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}\right).$

$$\sin^2 x = 2$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} (\cos 11x \cos 3x - \sin 11x \sin 3x)$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sqrt{2} \cos 11x \cos 3x = \sin 11x - \sin 3x - \sqrt{2} \sin 11x \sin 3x \quad | : \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} \cos 11x - \sqrt{2} \cos 3x - 2 \cos 11x \cos 3x = \sqrt{2} \sin 11x - \sqrt{2} \sin 3x - 2 \sin 11x \sin 3x$$

$$\sqrt{2} \cos 11x - \sqrt{2} \cos 3x - 2 \cos 11x \cos 3x + 1 = \sqrt{2} \sin 11x - \sqrt{2} \sin 3x - 2 \sin 11x \sin 3x + 1$$

$$(1 - \sqrt{2} \cos 3x)(\sqrt{2} \cos 11x + 1) = (1 - \sqrt{2} \sin 3x)(\sqrt{2} \sin 11x + 1)$$

$$\frac{1 - \sqrt{2} \cos 3x}{1 - \sqrt{2} \sin 3x} = \frac{\sqrt{2} \sin 11x + 1}{\sqrt{2} \cos 11x + 1}$$

Этому условию удовлетворяют все x вида $x = \frac{\pi}{4} \cdot k$, где $k \in \mathbb{Z}$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} \cdot k$, $k \in \mathbb{Z}$

5.5

Рассмотрим первое равенство.

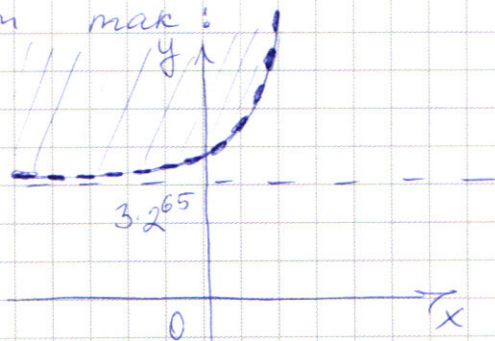
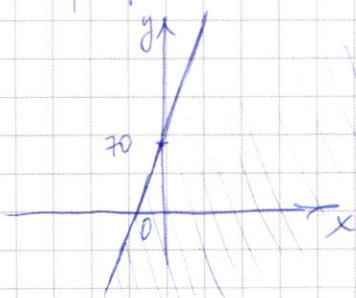
$$|y - 3 - x| = \begin{cases} y - 3 - x, & y - 3 - x \geq 0 \\ x + 3 - y, & y - 3 - x < 0 \end{cases} \quad |y - 3 + x| = \begin{cases} y - 3 + x, & y - 3 + x \geq 0 \\ 3 - x - y, & y - 3 + x < 0 \end{cases}$$

Таким образом при $3 - |x| \leq y \leq 3 + |x|$ $|x| = 3$,
 при $y > 3 + |x|$ $y - 3 - x + y - 3 + x = 6$, $2y - 6 = 6$, $y = 6$,
 при $y < 3 - |x|$ $-y + 3 + x - y + 3 - x = 6$, $-2y = 0$, $y = 0$.

5.7

$$(2^x + 3 \cdot 2^{65})' = 2^x \cdot \ln 2, \quad (70 + (2^{64} - 1)x)' = 2^{64} - 1$$

Графики выйдут так:



Решением системы будет некоторая область — пересечение заштрихованных частей.

Графики функций пересекаются в двух точках, т.к. после первого пересечения производная $2^x \ln 2$ растет быстрее $\Rightarrow$ функции тоже $\Rightarrow$ после второго пересечения они больше не пересекутся, т.к. одна растет сильно быстрее другой.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

8 цифровые
преобразование цифр

3375 | 5 3375 = 3^3 * 5^3

675 | 5

135 | 5

27 | 3

9 | 3

3

1, 3, 5, 9

коэффициенты

мфм "5"

мфм "3"

мфм "1"

одна "3"

одна "9"

мфм "1"

210

8

1680

1) $C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^2 = 8 \cdot 10 \cdot 1 = 80$

2) $C_8^3 \cdot C_5^2 \cdot C_3^3 = 8 \cdot 10 \cdot 1 = 80$

$C_8^3 (C_5^3 + C_5^2) = C_8^3 \cdot 2C_5^2 = 8 \cdot 10 \cdot 2 = 160$

$40 \cdot 28 = 1120$

$\sqrt{2}$

$\sqrt{2} \cdot 5 \cdot 4 = 20\sqrt{2}$

$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$

$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} (\cos 11x \cos 3x - \sin 11x \sin 3x)$

$\cos 11x - \cos 3x - \sqrt{2} \cos 11x \cos 3x = \sin 11x - \sin 3x - \sqrt{2} \sin 11x \sin 3x$

$\cos 11x (1 - \sqrt{2} \cos 3x) - \cos 3x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} = \sin 11x (1 - \sqrt{2} \sin 3x) - \sin 3x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}$

$(1 - \sqrt{2} \cos 3x) (\cos 11x + \frac{1}{\sqrt{2}}) = (1 - \sqrt{2} \sin 3x) (\sin 11x + \frac{1}{\sqrt{2}})$

$\frac{1 - \sqrt{2} \cos 3x}{1 - \sqrt{2} \sin 3x} = \frac{\sqrt{2} \sin 11x + 1}{\sqrt{2} \cos 11x + 1}$

$\cos x + \sin y$

$\cos x - \cos y$

$\cos x + \sin x$

$25 \sqrt{2 + \frac{\sqrt{2}}{5}} \cdot \frac{7}{5\sqrt{2}} = 5 \cdot 7 \cdot \sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{2}}} = 35 \sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{10}}$

$1 + \frac{\sqrt{2}}{10} = (a+b)^2$

$1 + \frac{\sqrt{2}}{10} = a^2 + 2ab + b^2$

$2ab = \frac{\sqrt{2}}{10}$

$1 = a^2 + b^2$

$ab = \frac{\sqrt{2}}{20}$

$1 = a^2 + b^2$

$400a^2 = 400a^4 + 2$

$200a^4 - 200a^2 + 1 = 0$

$\Delta = 40000 - 800 = 39200$

$a = \frac{10 + \sqrt{2}}{10} = \frac{100 + 10\sqrt{2}}{100}$

$2 \cdot 5 \cdot \sqrt{2}$

$35 \sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{10}} = 3,5 \sqrt{100 + 10\sqrt{2}}$

$a = \frac{200 \pm \sqrt{39200}}{400}$

$a = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{392}}{40}$

$a = \frac{1}{2} + \frac{14\sqrt{2}}{40} = \frac{1}{2} + \frac{7\sqrt{2}}{20}$

$392 \div 2 = 196$

$196 \div 2 = 98$

$98 \div 2 = 49$

$49 \div 7 = 7$

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{y}{x}\right)^5 \lg x &= y^2 \lg xy \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$\lg xy = \lg x + \lg y$$



$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^5 \lg x = y^2 \lg x \cdot y^2 \lg y$$

$$x^2 + x(-2y-4) + (-3y^2+12y) = 0$$

$$\begin{aligned} D &= (2y+4)^2 - 4(-3y^2+12y) = \\ &= 4y^2 + 16 + 12y - 48y + 12y^2 = \\ &= 16y^2 - 32y + 16 = \\ &= 16(y^2 - 2y + 1) = 4^2(y-1)^2 \end{aligned}$$

$$y^5 \lg x = y^2 \lg x \cdot y^2 \lg y \cdot x \lg x$$

$$x = \frac{2y+4 \pm 4(y-1)}{2} = y+2 \pm 2(y-1)$$

$$5 \lg x = 2 \lg x + 2 \lg y + \lg y \cdot x \lg x$$

$$3 \lg x = 2 \lg y + \lg y \cdot x \lg x$$

$$x_1 = y+2+2y-2 \quad x_2 = y+2-2y+2$$

$$1) x = 3y$$

$$x_1 = 3y \quad x_2 = 4-y$$

$$3 \lg(3y) = 2 \lg y + \lg y (3y) \lg(3y)$$

$$3 \lg 3 + 3 \lg y = 2 \lg y + \lg y (3y) \lg(3y)$$

$$3 \lg 3 + \lg y = \lg y (3y) \lg(3y)$$

$$\dots = \lg(3y) \cdot \lg y (3y)$$

$$\dots = (\lg 3 + \lg y)(\lg 3 + \lg y)$$

$$3 \lg 3 + \lg y = (\lg 3 + \lg y)(\lg 3 + \lg y)$$

$$2 \lg 3 = \lg 3 \lg y + \lg y \lg 3$$

$$2 \lg 3 = \lg 3 \lg y + \lg y \lg 3$$

$$2 \lg 3 = \lg 3 \lg y + \lg y \lg 3$$

$$2 \lg 3 = \lg 3 \lg y + \lg y \lg 3$$

$$2 \lg 3 = \lg 3 \lg y + \lg y \lg 3$$

$$2 \lg 3 = \lg 3 \lg y + \lg y \lg 3$$

$$2 \lg 3 = \lg 3 \lg y + \lg y \lg 3$$

$$2 \lg 3 = \lg 3 \lg y + \lg y \lg 3$$

$$2 \lg 3 = \lg 3 \lg y + \lg y \lg 3$$

$$2 \lg 3 = \lg 3 \lg y + \lg y \lg 3$$

$$2 \lg 3 = \lg 3 \lg y + \lg y \lg 3$$

$$2 \lg 3 = \lg 3 \lg y + \lg y \lg 3$$

$$2 \lg 3 = \lg 3 \lg y + \lg y \lg 3$$

$$2 \lg 3 = \lg 3 \lg y + \lg y \lg 3$$

$$2 \lg 3 = \lg 3 \lg y + \lg y \lg 3$$

$$2) x = 4-y$$

$$3 \lg(4-y) = 2 \lg y + \lg y (4-y) \lg(4-y)$$

$$\lg^2 x - 3 \lg y \lg x + 2 \lg^2 y = 0$$

$$D = 9 \lg^2 y - 8 \lg^2 y = \lg^2 y$$

$$\lg x = \frac{3 \lg y \pm \lg y}{2}$$

$$\lg x = 2 \lg y \quad \lg x = \lg y$$

$$1) \lg 3y = 2 \lg y \quad 2) \lg 3y = \lg y \cdot x$$

$$3) \lg(4-y) = 2 \lg y \quad 4) \lg(4-y) = \lg y$$

$$4-y = y^2 \quad y^2 + y - 4 = 0$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$y = 3 \quad x = 1$$

$$y = 2 \quad x = 2$$

$$y \neq 0$$

$$y = 2 \quad x = 2$$

$$y = 2 \quad x = 2$$

$$y = 2 \quad x = 2$$

$$y = 2 \quad x = 2$$

$$y = 2 \quad x = 2$$

$$y = 2 \quad x = 2$$

$$y = 2 \quad x = 2$$

$$y = 2 \quad x = 2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$R=5$

а) $CF=?$
б) $BC=6, S_{ACF}=?$

$\alpha=45^\circ$
 $2\alpha=90^\circ$

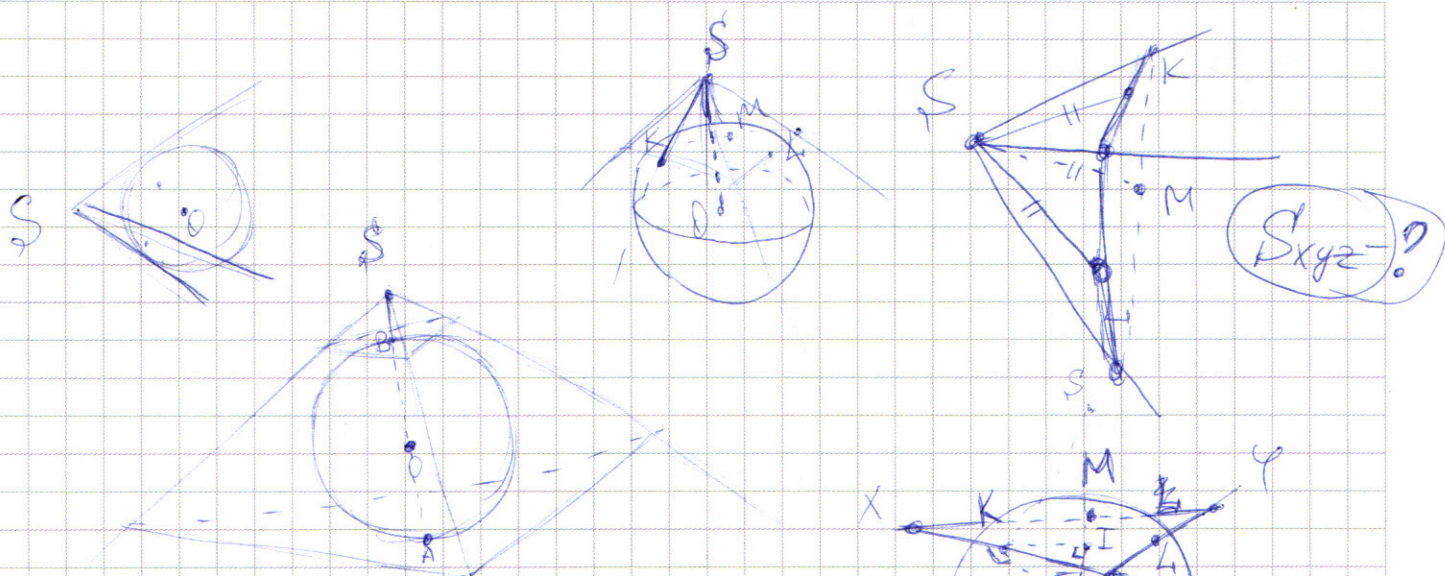
$BD = \sqrt{R^2 + R^2 - 2R^2 \cos(180^\circ - 2\alpha)} =$
 $= \sqrt{2R^2 + 2R^2 \cos 2\alpha} =$
 $= R \sqrt{2 + 2\cos 2\alpha}$
 $BD = 5\sqrt{2 + 2\cos 2\alpha}$

$BF = BD\sqrt{2} = 10\sqrt{1 + \cos 2\alpha}$
 $AC = AB = \sqrt{R^2 + R^2 - 2R^2 \cos(90^\circ + 2\alpha)} =$
 $= 5\sqrt{2 - 2\cos(90^\circ + 2\alpha)}$
 $CD = AC\sqrt{2} = 10\sqrt{1 - \cos(90^\circ + 2\alpha)}$
 $BC = \sqrt{R^2 + R^2 - 2R^2 \cos 2\alpha} =$
 $= 5\sqrt{2 - 2\cos 2\alpha}$

а) $CF = \sqrt{BC^2 + BF^2} = \sqrt{2R^2 - 2R^2 \cos 2\alpha + 2R^2 + 2R^2 \cos 2\alpha} = 2R = 10$

б) $BC = 6$ $CF = 10$ $BF = 8$ $BD = 8$ $R = 5$ $\gamma = 90^\circ - \alpha$

$S_{ACF} = \frac{1}{2} AC \cdot CF \cdot \sin(45^\circ + \gamma) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2R^2 - 2R^2 \cos(135^\circ - \alpha)} \cdot CF \cdot \sin$
 $= \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2 - 2\cos(135^\circ - \alpha)} \cdot 10 \cdot \sin(45^\circ + \gamma) =$
 $= 25\sqrt{2 - 2(\cos 135^\circ \cos \alpha + \sin 135^\circ \sin \alpha)} \cdot (\sin 45^\circ \cos \gamma + \sin \gamma \cos 45^\circ) =$
 $= 25\sqrt{2 - 2(-\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{5})} \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4}{5}) =$
 $= 25\sqrt{2 + \frac{4}{5}\sqrt{2} - \frac{3}{5}\sqrt{2}} \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4}{5}) = 25\sqrt{2 + \frac{\sqrt{2}}{5}} \cdot \frac{7}{5\sqrt{2}}$



метражи показаны пометками



$$\frac{SA}{SB}$$

$$\Rightarrow \frac{SA}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = 4$$

$$SA = 2SB$$

$$\text{m.e. } SB = AB = 2R$$

$$\triangle SKO : SK^2 = SO^2 - KO^2$$

$$SK^2 = (3R)^2 - R^2 = 8R^2$$

$$\sin \angle KSO = \frac{R}{3R} = \frac{1}{3}$$

$$SK = 2\sqrt{2}R = SM = SL$$

$$\angle KSO = \arcsin \frac{1}{3}$$

$\triangle XYZ$ тоже получен пометками
надо найти коэффициенты.

$$\frac{SI}{SB} = \frac{\frac{8}{3}R}{2R} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{SI}{SA} = \frac{\frac{8}{3}R}{4R} = \frac{2}{3}$$

$$S = \frac{4}{9} \cdot 4 = \frac{16}{9}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle XYZ} = \frac{16}{9} \cdot 1$$

$$3 \lg x = \lg y + \lg x \cdot \lg y x$$

$$3 \lg x = \lg y + \lg x \cdot \frac{\lg x}{\lg y}$$

$$3 \lg x \lg y = \lg^2 y + \lg^2 x$$

Известно $\triangle XYZ$

$(SIO - \text{прямая})$

$$KI = r = \frac{2\sqrt{2}}{3}R$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases} \quad \text{при каких } a \text{ ровно два решения}$$

$$|y-3-x| = \begin{cases} y-3-x, & y-3-x \geq 0 \\ x+3-y, & y-3-x < 0 \end{cases}$$

$$|y-3+x| = \begin{cases} y-3+x, & y-3+x \geq 0 \\ & y \geq 3-x \\ 3-x-y, & y-3+x < 0 \\ & y < 3-x \end{cases}$$

~~$$x^2 - 8|x| + 16 + y^2 - 6|y| + 9 = 0$$~~

1) $|x| = 3, 0 \leq y \leq 6$

2) $y=0$, $3-|x| \geq 0$

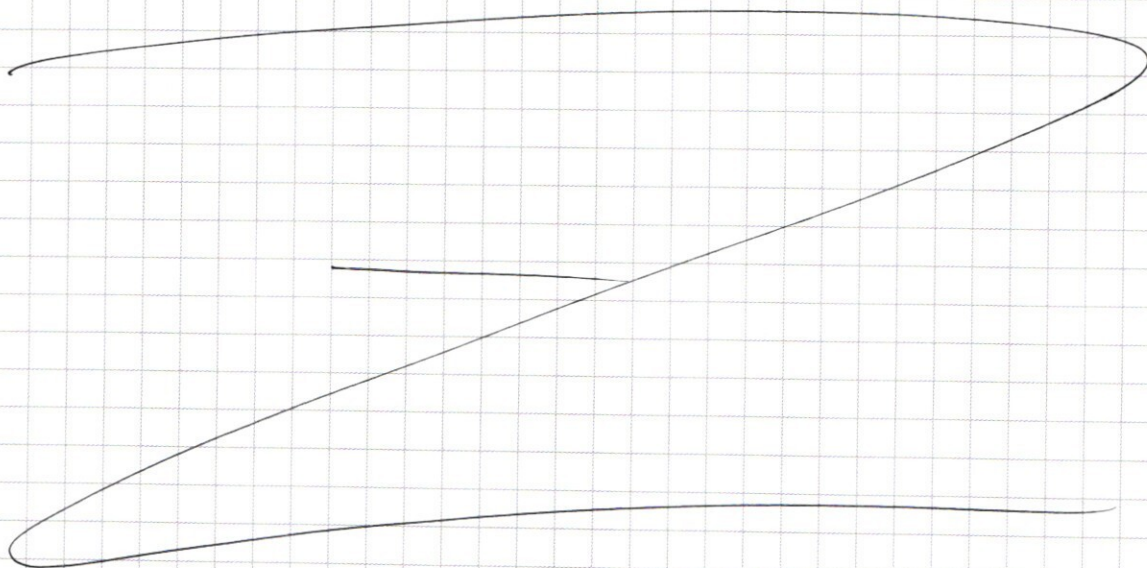
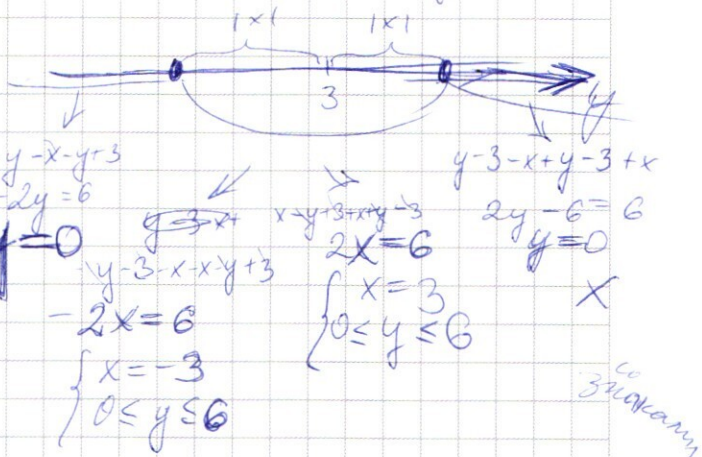
$$y=0 \quad \begin{aligned} &1-3-x+|x-3|=6 \\ &|x+3|+|x-3|=6 \end{aligned}$$

$$x^2 - 8|x| + 16 \neq 9 = a$$

$$x^2 - 8|x| + (25 - a) = 0$$

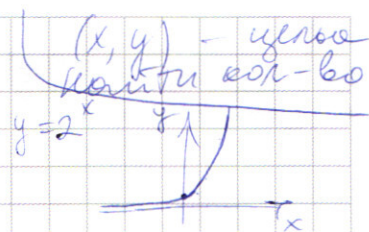
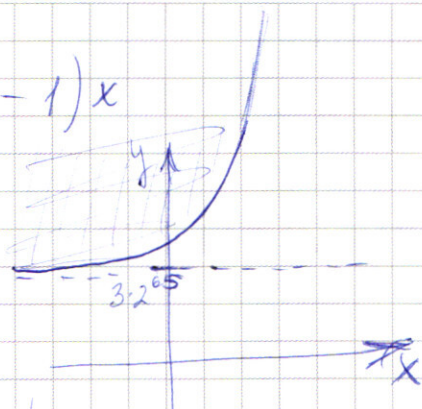
$$Z = 64 - 100 + 4a = 4a - 36$$

$$|x| = \frac{8 \pm 2\sqrt{9-6}}{2} = 4 \pm \sqrt{3}$$



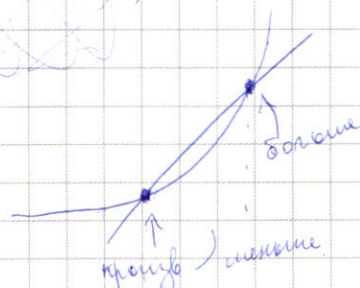
$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

$$y \leq 70 + (2^{64} - 1)x$$



$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

$$(2^x)' = 2^x \ln 2$$



$$2^x + 3 \cdot 2^{65} < 70 + (2^{64} - 1)x$$

решить
в целых
числах

$$\begin{aligned} 2^{64} + 3 \cdot 2^{65} &< 70 + (2^{64} - 1)x \\ 2^{64} + 6 \cdot 2^{64} &< 70 + 2^{64}x - 2^{64} \\ 7 \cdot 2^{64} &< 70 + 2^{64}x - 2^{64} \end{aligned}$$

$$2^x < 70 + 2^{64}(x-6) - x$$

$$\begin{aligned} 2^2 + 3 \cdot 2^{65} &< 70 + (2^{64} - 1) \cdot 2 \\ 2^4 + 3 \cdot 2^{65} &< 70 + (2^{64} - 1) \cdot 4 \end{aligned}$$

$$2^2 + 3 \cdot 2^{65}$$

$$2^4 + 3 \cdot 2^{65}$$

$$16 + 2^{66} + 2^{65}$$

$$2^8 + 3 \cdot 2^{65}$$

$$256 + 2^{66} + 2^{65}$$

$$2^{16} + 3 \cdot 2^{65}$$

$$70 + 2^{65} - 2$$

$$70 + 2^{66} - 2^2$$

$$70 + 2^{66} - 4$$

$$70 + 2^{67} - 8$$

$$70 + 2^{66} + 2^{65} + 2^{65} - 8$$

$$70 + 2^{68} - 16$$

