МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6 ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 4 и 9.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12, \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90°$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)\,x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

© МФТИ, 2020

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Разложим число 16875 на простые множители

$16875 = 3^3 \cdot 5^4$

Значит у числа 16875 7 простых множителей, а числа должны быть восьми значными. Значит одно из них, как минимум, будет единицей

Будет одна единица, если в числе еще 3 тройки и 4 пятерки. Или две единицы, если в числе одна тройка, одна девятка и 4 пятерки.

Первый случай: 1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5

Всего способов расставить 8 разных цифр $n = 8!$. Но у нас повторяются тройки и пятерки.

Значит $n = \frac{8!}{3!\cdot 4!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{6} = 40\cdot 7 = 280$.

Второй случай: 1, 1, 3, 9, 5, 5, 5, 5.

$m = \frac{8!}{2!\cdot 4!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{2} = 280\cdot 3 = 600+240 = 840$.

Значит всего способов $n + m = 1120$.

Ответ: 1120.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№2

$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$

$2\cos 5x \cos 2x - 2\sin 5x \cos 2x = \sqrt{2}\cos 10x$

$2\cos 2x(\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2}\cos 10x$

$\sqrt{2}\cos 2x(\cos 5x - \sin 5x) = \cos^2 5x - \sin^2 5x.$

$\sqrt{2}\cos 2x(\cos 5x - \sin 5x) = (\cos 5x - \sin 5x)(\cos 5x + \sin 5x)$

$(\cos 5x - \sin 5x)(\sqrt{2}\cos 2x - (\cos 5x + \sin 5x)) = 0.$

① $\cos 5x - \sin 5x = 0.$

$\operatorname{tg} 5x = 1$

$5x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$

$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}, n \in Z.$

② $\sqrt{2}\cos 2x - (\cos 5x + \sin 5x) = 0.$

$\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 5x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 5x = \sin(\frac{\pi}{4} + 5x).$

$\sin(5x + \frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{2} - (5x + \frac{\pi}{4})) = \cos(\frac{\pi}{4} - 5x)$

$\cos 2x = \cos(\frac{\pi}{4} - 5x).$

$2x = \frac{\pi}{4} - 5x + 2\pi k, k \in Z.$

$7x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z.$

$x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7}$

Ответ: $x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}$ или $x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7}$; $n, k \in Z$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} & (1) \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 & (2) \end{cases}$$

(2) $2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = (y - x - 4)(2y + x) = 0.$

1) $y = -\frac{x}{2} \to (1):$

$$\left(\frac{4x^4}{x^2}\right)^{\lg(-\frac{x}{2})} = (-x)^{\lg(\frac{x^2}{2})}$$

$$(2x^2)^{\lg(-\frac{x}{2})} = (-x)^{\lg(\frac{x^2}{2})}$$

$$\lg\left((2x^2)^{\lg(-\frac{x}{2})}\right) = \lg\left((-x)^{\lg(\frac{x^2}{2})}\right)$$

$$\lg(-\tfrac{x}{2}) \cdot \lg(2x^2) = \lg(\tfrac{x^2}{2}) \cdot \lg(-x)$$

$$(\lg(-x) - \lg 2)(\lg 2 + \lg x^2) = (\lg x^2 - \lg 2)\lg(-x)$$

$$\lg(-x) \cdot \lg(2) + \lg(-x) \cdot \lg x^2 - \lg^2 2 - \lg 2 \cdot \lg x^2 =$$
$$= \lg x^2 \cdot \lg(-x) - \lg 2 \cdot \lg(-x)$$

$$2\lg(-x) \cdot \lg(2) - \lg 2 \cdot \lg x^2 - \lg^2 2 = 0$$

$$\lg x^2 \lg(2) - \lg x^2 \lg 2 - \lg^2 2 = 0$$

$$-\lg^2 2 = 0$$

2) $y = x + 4.$

$$\left(\frac{x^4}{(x+4)^2}\right)^{\lg(x+4)} = (-x)^{\lg(-x(x+4))}$$

$\lg(x+4)\cdot\lg\left(\frac{x^4}{(x+4)^2}\right)=\lg(-x(x+4))\cdot\lg(-x)$.

$\lg(x+4)\cdot\left(2\lg x^2-\lg(x+4)^2\right)=(\lg(-x)+\lg(x+4))\lg(-x)$.

ОДЗ: $\begin{cases} y\neq 0 \\ y>0 \\ -xy>0 \end{cases}$ $\begin{cases} y>0 \\ x<0 \end{cases}$

$y=x+4$ $\quad x+4>0$

$x>-4$

$\lg(x+4)(2\lg x^2-2\lg(x+4))=(\lg(-x)+\lg(x+4))\lg(-x)$.

$2\lg x^2=4\lg(-x)$.

$4\lg(-x)\lg(x+4)-2\lg^2(x+4)=\lg^2(-x)+\lg(-x)\lg(x+4)$

$\lg^2(-x)+\lg(-x)\lg(x+4)-4\lg(-x)\lg(x+4)+2\lg^2(x+4)=0$.

$\lg^2(-x)\ \cancel{+\lg}\ -3\lg(-x)\lg(x+4)+2\lg^2(x+4)=0$.

$D=(9-8)\lg^2(x+4)=\lg^2(x+4)$.

$\lg(-x)=\frac{3\lg(x+4)\pm\lg(x+4)}{2}$.

$\left[\begin{array}{l}\lg(-x)=2\lg(x+4)\\ \lg(-x)=\lg(x+4)\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}-x=x^2+8x+16\\ -x=x+4\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}x^2+9x+16=0\\ x=-2\in ОДЗ\end{array}\right.$ $D=81-64=17$ $x=\frac{-9\pm\sqrt{17}}{2}$

$x=\frac{-9-\sqrt{17}}{2}<-4\notin ОДЗ$.

$x=\frac{-9+\sqrt{17}}{2}\in ОДЗ$.

$\left[\begin{array}{l}x=-2 \quad y=2\\ x=\frac{-9+\sqrt{17}}{2} \quad y=\frac{\sqrt{17}-1}{2}\end{array}\right.$

Ответ: $(-2;2)$; $\left(\frac{\sqrt{17}-9}{2};\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$\cancel{2\cos 2x(\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2}\cos 10x}$

$\cancel{2\cos 2x(\cos(5x+\frac{\pi}{4}) = \cos 10x}$

$\cancel{\cos 7x - \sin 7x + \cos 3x - \sin 3x = \sqrt{2}\cos 10x}$

$\cancel{\cos(7x+\frac{\pi}{4}) + \cos(3x+\frac{\pi}{4}) = \cos 10x}$

$\cancel{2\cos(5x+\frac{\pi}{2})\cos 2x = \cos 10x}$

$\cancel{-2\sin 5x\cos 2x = 1-2\sin^2 5x}$

$\cancel{2\sin 5x(\cos 2x + \sin 5x) = 1}$

$\cancel{\cos^2 5x - \sin^2 5x = 2\sin 5x\cos 2x}$

$\cancel{\cos^2 5x + \sin 5x(2\cos 2x - \sin 5x) = 0}$

$\cancel{-2\cos 5}$ $\cancel{-2\sin 5x\cos 2x = \cos 10x}$

$\cancel{-2}$ $1-2\sin^2 5x$

$\cancel{2\sin 5x(\cos 2x + \sin 5x) = 1}$

$\cancel{\sin 5x - \cos 2x)}$

$2\cos 5x\cos 2x - 2\sin 5x\cos 2x = \sqrt{2}\cos 10x$

$2\cos 2x(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 5x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 5x) = \cos 10x$

$2\cos 2x \cdot \sin(\frac{\pi}{4} - 5x) = \cos 10x$

$\cancel{\sqrt{\frac{1-\cos(\frac{\pi}{2}-10x)}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1-\cos 10x}{2}}}$

$\cancel{\cos^2 2x \cdot (1-\cos 10x) = \cos^2 10x}$

$2\cos 2x(\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2}\cos 10x$

$\sqrt{2}\cos 2x(\cos 5x - \sin 5x) = (\cos 5x - \sin 5x)(\cos 5x + \sin 5x)$

$(\cos 5x - \sin 5x)(\sqrt{2}\cos 2x - \cos 5x - \sin 5x) = 0$

$\sqrt{2}\cos 2x = \cos 5x + \sin 5x$ $\cancel{\cos 2x = \sin(5x+\frac{\pi}{4})}$

$\cos 2x = \sin(5x+\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{2} - (5x+\frac{\pi}{4})) = \cos(\frac{\pi}{4} - 5x)$

$\cancel{2-4\sin^2 x}$ $2x = \frac{\pi}{4} - 5x + 2\pi n$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$16875 / 5$
-15
18
-15
34
-35
25

$3375 / 5$
-30
37
-35
25

$675 / 5$
-15
15
-15
25

$135 / 5$
-10
35

$27 = 3 \cdot 3 \cdot 3$

$$\begin{array}{r} 125 \\ \times\ 27 \\ \hline 875 \\ +\ 250 \\ \hline 3375 \\ \times\ 5 \\ \hline 16875 \end{array}$$

0011
0101
1001
0110
1100
1010
} 6

$16875 = 3^3 \cdot 5^4$

~~3 3 3~~

~~3 4~~
~~25~~
~~8~~

3355551

~~8 · 7 · 6~~

$\frac{8!}{3! \cdot 5!} =$

$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{6} = 8 \cdot 7 \cdot 5 = 56 \cdot 5 =$

~~3355~~
~~3535~~
~~5335~~
~~5353~~
~~5533~~

$\frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{2 \cdot 2} = 6.$

№2.

$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$

$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x$

~~$2(\cos 5x \cos 2x - \sin 5x \cos$~~

$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} \cos 10x$

$2 \cos 2x \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x \right) = \cos 10x$

$\sin \frac{\pi}{4}$ $\cos \frac{\pi}{4}$

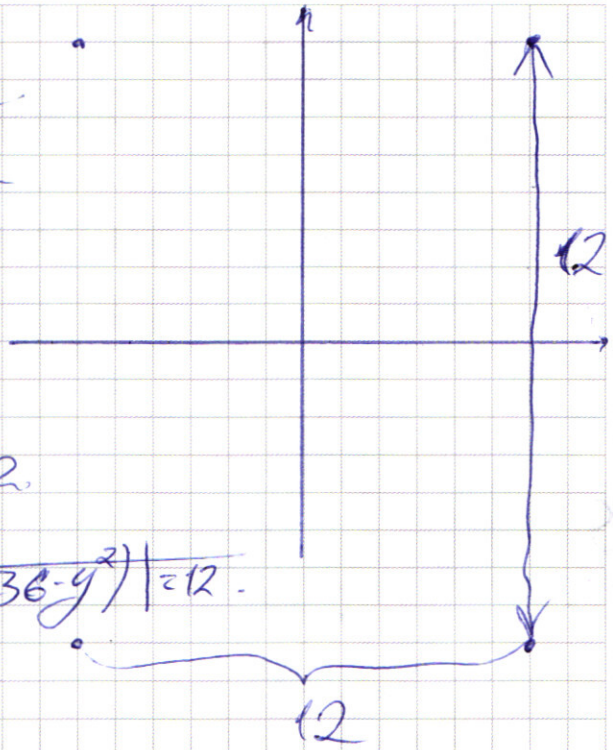
$\cos \left(\frac{\pi}{4} + 5x \right)$

$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} (2 \cos^2 5x - 1) = 2 \sin 5x \cos 2x$

~~$2 \cos 5x (\cos 2x - \sqrt{2}) = \sin 5x \cos 2x$~~

№5.

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$



$(x-6)^2 - 2y(x-6) + y^2 +$

$+ (x-6)^2 + 2y(x-6) + y^2 +$

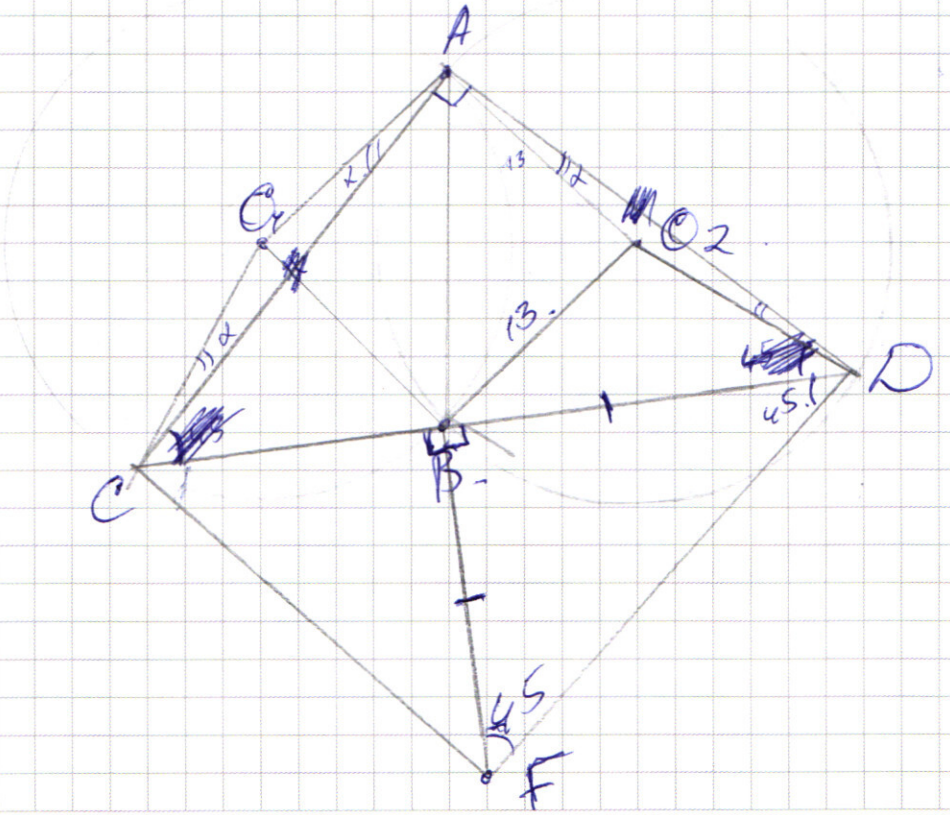
$+ 2|(x-6-y)(x-6+y)| = 12.$

$\cancel{2(x-6)^2 + 2y^2 + |(x^2 - 36 + 36 - y^2)| = 12.}$ $12x$

$x - 6 - y < 0.$

$y > x - 6.$

№6



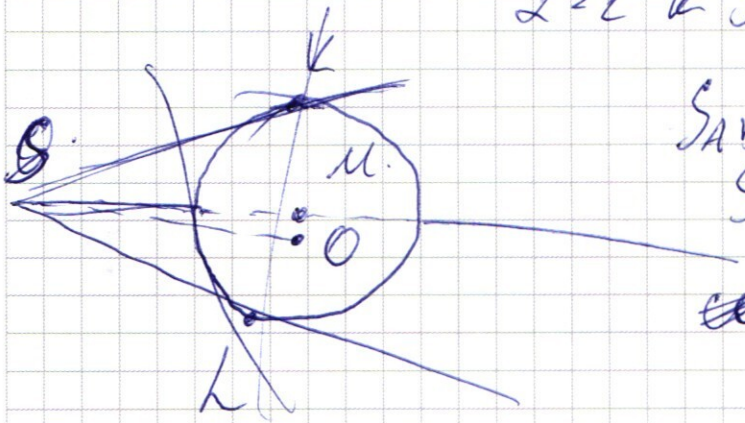
☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.

$\alpha = \angle KSO$ — ? S_{KLM} — ?

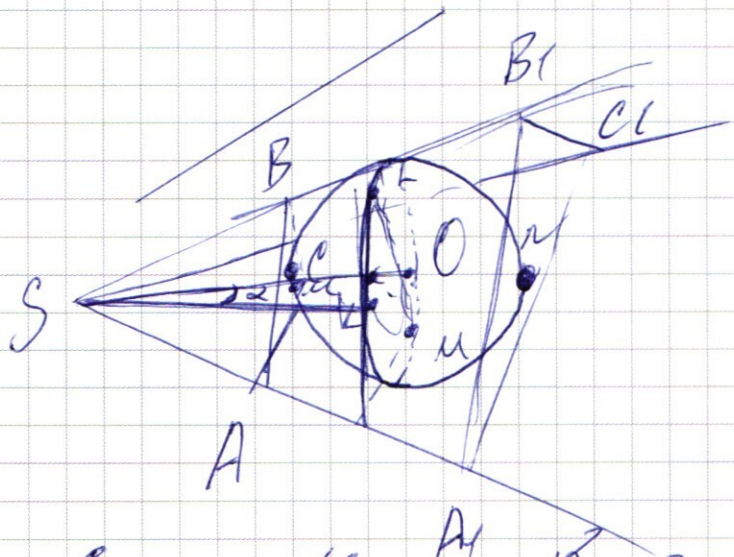


$S_{ABC} = 4$.

$S_{A_1B_1C_1} = 9$.

$\sin KSO = \frac{R}{R+SM}$.

$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{SN^2}{SM^2} = \frac{9}{4}$.



$\frac{SN}{SM} = \frac{3}{2}$.

$\frac{SM+2R}{SM} = \frac{3}{2}$.

$2SM + 4R = 3SM$.

$SM = 4R$.

$\frac{S_{KLM}}{S_{ABC}} = \left(\frac{SM+R}{SM}\right)^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2$.

$\sin KSO = \frac{R}{R+SM} = \frac{1}{5}$

$S_{KLM} = 25/4 = 6{,}25$.

$KSO = \arcsin\frac{1}{5}$.

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

① $y = x + 4.$

$\lg(x+4) - \lg\frac{x^4}{(x+4)^2} = \lg(-x(x+4))\lg(-x).$

$\lg(x+4)(\lg x^4 - \lg(x+4)^2) = (\lg(-x) + \lg(x+4))\lg(-x).$

$2\lg(x+4)\lg x^2 - 2\lg^2(x+4)\cdot\cancel{\lg(x+4)} + 8\lg x^2 - 4\lg(x+4)^2 =$

$= \lg^2(-x) + \lg(x+4)\lg(-x)$

$2\lg x^2\lg(x+4) - 2\lg^2(x+4) + 8\lg x^2 - 4\lg(x+4)^2 -$

$- \lg^2(-x) - \lg(-x)\lg(x+4) = 0.$

$\lg(x+4)\cdot(2\lg x^2 - 2\lg(x+4)) = (\lg(-x) + \lg(x+4))\lg(-x).$

$(y - x - 4)(2y + x) = 2y^2 + xy - 2xy - x^2 - 8y - 4x.$

$\lg(x+4)(4\lg(-x) - 2\lg(x+4)) = (\lg(-x) + \lg(x+4))\lg(-x)$

$4\lg(-x)\lg(x+4) - 2\lg^2(x+4) = \lg^2(-x) + \lg(-x)\lg(x+4).$

$\lg^2(-x) + 2\lg^2(x+4) - 3\lg(-x)\lg(x+4) = 0.$

$D = 9\lg^2(x+4) - 8\lg^2(x+4) = \lg^2(x+4).$

$\lg(-x) = \frac{3\lg(x+4) \pm \lg(x+4)}{2} =$

$= \left[\begin{array}{l} 2\lg(x+4) \\ \lg(x+4) \end{array}\right.$

$x^2 + 8x + 16 = -x.$

$x + 4 = -x.\ 2x = -4\ x = -2.$

$x^2 + 19x + 16 = 0.$

$D = 361 - 64 = 294.$

$x = \frac{-19 \pm \sqrt{294}}{2}.$

6.

8
$\times 19$
$\overline{171}$
$+ 19$
$\overline{361}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x^4+7x^3+34x^2+64x+32 \;\big|\; x+2$$
$$-\underline{x^4+2x^3} \qquad\qquad x^3+5x^2+24x+16$$
$$5x^3+34x^2$$
$$-\underline{5x^3+10x^2}$$
$$24x^2+64x$$
$$-\underline{24x^2+48x}$$
$$16x+32$$
$$-\underline{16x+32}$$
$$0$$

$$(x+2)(x^3+5x^2+24x+16)=0.$$

$$\cancel{-8+20-48+16}$$
$$\cancel{-1+5-24+16}$$

$$\frac{x^4}{(x+4)^2}+x^2+4x=-2x-4.$$

$$\frac{x^4}{(x+4)^2}=-x^2-6x-4.$$

$$x^4=-(x^2+6x+4)(x^2+8x+16)=$$
$$=-(x^4+8x^3+16x^2+6x^3+48x^2+96x+4x^2+32x+64)=$$
$$=-(x^4+14x^3+68x^2+128x+64).$$

$$x^4+7x^3+34x^2+64x+32=0.$$

② $y=-\frac{x}{2}$. $\left(\frac{4x^4}{x^2}\right)^{\lg\left(-\frac{x}{2}\right)}=(2x^2)^{\lg\left(-\frac{x}{2}\right)}=(-x)^{\lg\left(\frac{x^2}{2}\right)}$

$$\lg\left(-\frac{x}{2}\right)\lg(2x^2)=\lg\left(\frac{x^2}{2}\right)\lg(-x).$$

$$\lg 2\cdot\lg(-x)-\lg^2 2+\lg x^2\cdot\lg(-x)-\lg 2\cdot\lg x^2=$$
$$=\lg x^2\cdot\lg(-x)-\lg 2\cdot\lg(-x)$$

$$(\lg(-x)-\lg 2)(\lg 2+\lg x^2)=$$
$$=(\lg x^2-\lg 2)(\lg(-x))$$

$$2\lg(-x)\cdot\lg 2-\lg 2\cdot\lg x^2-\lg^2 2=0.$$
$$\lg x^2\cdot\lg 2-\lg 2\cdot\lg x^2-\lg^2 2=0.$$

$2y^2 - y(x+8) - x^2 - 4x = 0.$

$D = x^2 + 16x + 64 + 8x^2 + 32x = 9x^2 + 48x + 64 =$

$= (3x+8)^2.$

$y = \frac{x+8 \pm (3x+8)}{4} =$ $\frac{x+8+3x+8}{4} = x+4.$

$\frac{x+8-3x-8}{4} = -\frac{x}{2}.$

$2\cancel{(x-y)}(y+\frac{x}{2}) = 0.$ $(y-x-4)(2y+x)=0.$

$y-x-4$

$\cancel{y = x+4, \text{ т.к. } y > 0, x}$

(1). $y = x+4.$

$\left(\frac{x^4}{(x+4)^2}\right)^{\lg(x+4)} = (-x)^{\lg(-x(x+4))}$

$\lg(x+4) \cdot \lg\frac{x^4}{(x+4)^2} = \lg(-x^2-4x) \cdot \lg(-x).$

$\lg\left(\frac{x^4}{(x+4)^2} + x\right) = \lg(-x^2-4x-x-4).$

$\frac{x^4}{(x+4)^2} + x = -x^2-5x-4.$ $\frac{x^4}{(x+4)^2} = -x^2-6x-4.$

$x^4 = -(x^2+6x+4)(x^2+8x+16) =$

$= -(x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 6x^3 + 48x^2 + 96x + 4x^2 + 32x + 64).$

$= -x^4 - 14x^3 - \cancel{20x^2} - 68x^2 - 128x - 64.$

$\cancel{2x^4}\ x^4 + 7x^3 + 34x^2 + 64x + 32 = 0.$

$\times\ 34$ $\cancel{35+32-7-64}.$ $16 - 56 + 136 - 128 + 32 =$

$\times\ 4$

136 $x^4 + 7x^3 + 34x^2 + 64x + 32 \mid x+2$ $= -40 + 8 + 32 = 0.$

$-x^3 + 2x^3$ $x^3 + 9x^2 + 52x$

$-9x^3$

$9x^3 - 18x^2$

$52x^2$

$-52x^2 - 104x$

$168x$

$2y^2 + xy - 2xy - x^2 - 4x - 8y.$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3.

$\cancel{2y^2+yx-8y+2xy-x^2+8x=}$
$\cancel{=2y^2-xy-8y+8x.}$

$$\begin{cases}\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y}=(-x)^{\lg(-xy)}\\ 2y^2-xy-x^2-4x-8y=0\end{cases}$$

$2y^2-y(x+8)-x^2-4x=0.$

$D=x^2+\cancel{64}\,16x-64+8x^2+32x=$

$=9x^2+48x+64=(3x-8)^2.$

$y=\frac{x+8\pm(3x-8)}{4}=$ $\frac{x+8+3x-8}{4}=x$; $\frac{x+8-3x+8}{4}=4-\frac{x}{2}.$

$$\begin{cases}\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y}=(-x)^{\lg(-xy)}\\ (y-x)(y-(8-x))=0.\end{cases}$$ $(y-x)(2y+x-8)=0.$

① $y=x.$ $\quad x\neq 0$

$(x^2)^{\lg x}=(-x)^{\lg(-x^2)}$ ⊘.

② $y=4-\frac{x}{2}.$ $\quad x=\cancel{2y-8}\cdot\cancel{8-2y}.$

$\left(\frac{x^4}{(4-\frac{x}{2})^2}\right)^{\lg(4-\frac{x}{2})}=(-x)^{\lg(-x(4-\frac{x}{2}))}=(-x)^{\lg(\frac{x^2}{2}-4x)}.$

$\lg(4-\frac{x}{2})\lg\frac{x^4}{(4-\frac{x}{2})^2}=\lg(\frac{x}{2}-4)x)\lg(-x)$

$\cancel{4-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2}+4x=4+\frac{7}{8}x-\frac{x^2}{2}}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$S_x = \frac{4\cdot(5R)^2}{4R^2} = \frac{25}{4} = 6{,}25$

Ответ: $\arcsin\frac{1}{5}$; $6{,}25$

№5.

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 & (1) \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a. & (2) \end{cases}$$

Рассмотрим варианты, когда в (1) ~~модуль~~ подмодульные выражения разных знаков одних и наоборот.

1. $x-6-y<0$ $\quad$ $x-6+y<0$.

$y>x-6$ $\quad$ $y<6-x$.

Тогда $6-x>x-6$.

$x<6$.

Раскрываем модули

$6+y-x+6-x-y=12$.

$x=0 \to (2)$. $y\in(-6;6)$.

$36+(|y|-8)^2=a$.

$(|y|-8)^2=a-36$.

1. $y\in(-6;0)$ $(a-36)\in(4;64)$ $a\in(40;100)$.

$y\in[0;6)$ $(a-36)\in[4;64)$ $a\in(40;100)$.

$(0;\pm(\sqrt{a-36}+8))$.

2. $x-6-y\geq 0$ $\quad$ $x-6+y<0$

$y\leq x-6$ $\quad$ $y<6-x$.

$x-6-y+6-x-y=12$.

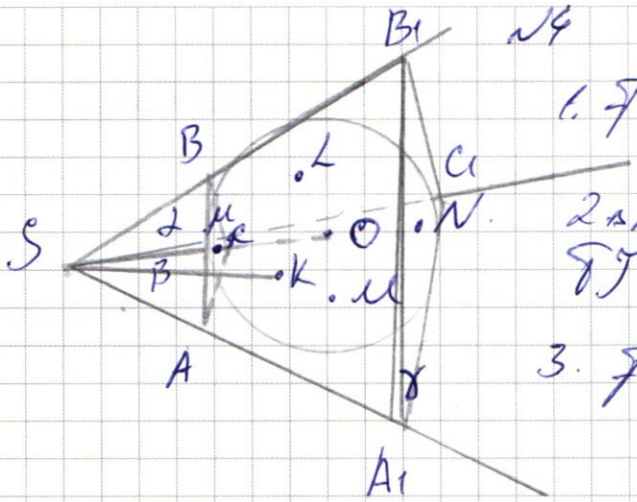
$y=-6$. $\begin{cases} x-6\geq -6 \\ 6-x>6 \end{cases}$ $\begin{cases} x\geq 0 \\ x<0 \end{cases}$ нет решений.

3 и 4 см. в черновике (под номерами 2 и 4).

Из них ответы. $(12;\pm(\sqrt{a-36}+8))$ и $(\pm\sqrt{a-4}+6;12)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



1. ∃ $L \in \alpha$; $M \in \beta$; $K \in \gamma$.

2. $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ – сечения ТГУ плоскостями, перп-ми пр SO.

3. ∃ (ABC) касается окр. в т. M.

(A₁B₁C₁) касается окр в т. N.

4. $S_{ABC} = 4$; $S_{A_1B_1C_1} = 9$.

Оба тр-ка находятся в ТГУ и перп-ны одной прямой.

Значит $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

5. Значит $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \left(\frac{SN}{SM}\right)^2 = \frac{9}{4}$ $\quad \frac{SN}{SM} = \frac{3}{2}$

∃ радиус окр $= R$.

Тогда $\frac{\cancel{S_{ABC}}}{\cancel{S_{A_1B_1C_1}}} = \frac{SN}{SM} = \frac{SM+2R}{SM} = \frac{3}{2}$

$2SM + 4R = 3SM \Rightarrow 4R = SM$.

6. $\triangle SOK$ ($\angle K = 90°$, т.к. K – касательная):

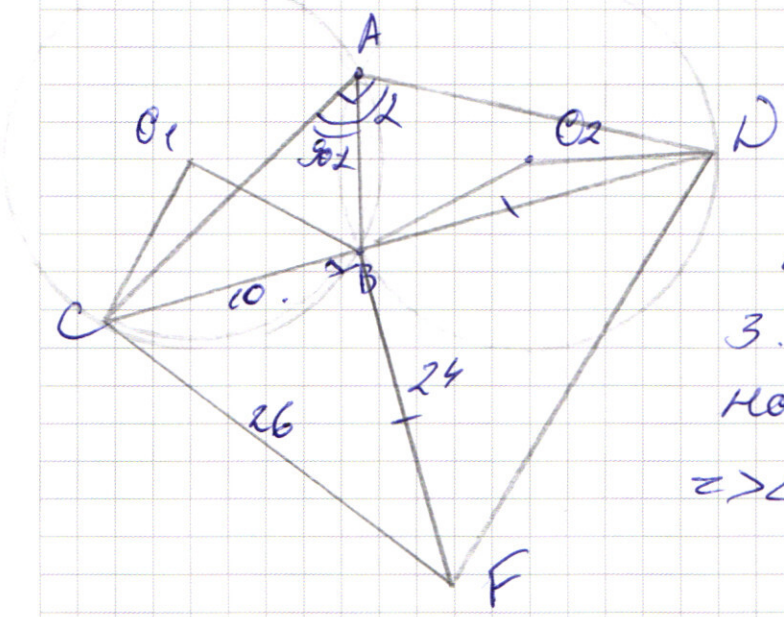
$\sin \angle SO = \frac{OK}{SO} = \frac{R}{SM+R} = \frac{1}{5}$

$\angle KSO = \arcsin \frac{1}{5}$.

7. ~~Пл-ть~~ $O \in (KLM) \Rightarrow \frac{S_x}{S_{ABC}} = \left(\frac{SO}{SM}\right)^2$, где S_x – неизвестная площадь

№6.

13 = R - радиус окр



1. ∢BAD = α.

∢CAB = 90 − α.

2. ∢CAB и ∢CO₁B опир. на одну дугу BC ⇒

∢CO₁B = 180 − 2α.

3. ∢BAD и ∢BO₂D опир. на одну дугу BD ⇒

⇒ ∢BO₂D = 2α.

4. △CO₁B: $CO_1 = O_1B = R$

$BC^2 = 2R^2 + 2R^2\cos 2\alpha$.

△BO₂D: $BD^2 = 2R^2 - 2R^2\cos 2\alpha$.

$BC^2 + BD^2 = 4R^2$.

$BC = \sqrt{4R^2 - BD^2}$

5. △CBF (∢B = 90°): $CF^2 = BC^2 + BF^2 =$

$= BC^2 + BD^2 = 4R^2$

Зн, $CF = 2R = 26$.

$BF = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24 = BD$.

6. △BCF: $\sin BCF = \frac{12}{13}$ $\cos BCF = \frac{5}{13}$.

7. ∢ACB = ∢ADB = 45°.

8. $AC = AD = \frac{CD}{\sqrt{2}} = 17\sqrt{2}$.

9. $S_{ACF} = \sin(45 + \angle BCF) \cdot \frac{1}{2} \cdot CF \cdot AC =$

$= \frac{1}{2} \cdot 26 \cdot 17\sqrt{2}\,(\sin 45 \cos BCF + \cos 45 \sin BCF) =$

$= 13 \cdot 17 \cdot \frac{5+12}{13} = 17^2 = 289$ Ответ: 26; 289.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

4. $x-6-y \geq 0$. $\quad x-6+y \geq 0$.

$y \leq x-6$. $\quad y \geq 6-x$.

$x-6-y+x-6+y = 12$.

$2x = 24$. $\quad x = 12$.

~~$y \leq -6$. $\quad y \geq 6$~~

~~$y \leq -6$.~~

~~$36 + (8+y)^2 = a$.~~

~~$(y+8)^2 = a-36$.~~

$y \leq 6$. $\quad y \geq -6$.

$y \in [-6; 6]$.

$36 + (|y|-8)^2 = a$.

1. $y \geq 0 \quad y \leq 6$

$(y-8)^2 = a-36 \quad a-36 \in [4; 64]$.

$a \in [40; 100]$.

2. $y \in [-6; 0)$

$(y+8)^2 = a-36 \quad a-36 \in [4; 64)$.

$a \in [40; 100)$

$a \in [40; 100) \quad (12; \pm(\sqrt{a-36}+8))$.

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5:

1. $x-6-y<0$ $\quad$ $x-6+y<0$

$y>x-6$ $\quad$ $y<6-x$

$6-x>x-6$ $\quad$ $\boxed{x<6}$

$6+y-x-x+6-y=12$

$2x=0$ $\quad$ $x=0$

2. $x-6-y<0$ $\quad$ $x-6+y\geq 0$

$y>x-6$ $\quad$ $y\geq 6-x$

$6+y-x+x-6+y=12$

$2y=12$ $\quad$ $y=6$

$x-6<6$ $\quad$ $x<12$

$6-x\leq 6$ $\quad$ $x\geq 0$

$(x-6)^2+(2)^2=a$

$(x-6)^2=a-4$

$|x-6|=\sqrt{a-4}$ $\quad$ 1. $x\geq 6$ $x\in[6;12)$

$a-4\in[0;36)$

$\cancel{x-6=\sqrt{a-4}}$

$\cancel{6-x=\sqrt{a-4}}$ $\quad$ 2. $x\in[0;6)$

$a\in(4;40)$ $\quad$ $(\pm\sqrt{a-4}+6;12)$ $\quad$ $a-4\in[0;36]$

$a\in[4;40)$

3. $x-6-y\geq 0$ $\quad$ $x-6+y<0$

$y\leq x-6$ $\quad$ $y<6-x$

$\cancel{x}-\cancel{6}-y+\cancel{6}-\cancel{x}-y=12$

$y=-6$ $\quad$ $\begin{cases} x-6\geq -6 \\ 6-x>6 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} x\geq 0 \\ x<0 \end{cases}$ $\quad$ ~~$x=0$~~ ~~одно реш~~

нет реш

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4\cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81}-1)x = 85 + (3^{27}-1)(3^{54}+3^{27}+1)x \end{cases}$$

$$\begin{array}{l|l} 81 & 3 \\ \hline -6 & 27 \\ \hline 21 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 85 & 5 \\ \hline -5 & 17 \\ \hline 35 & \end{array}$$

$$\cancel{3^9 - 1 = (3^3 - 1)(3^6 +}$$

$$= 85 + (3^9-1)(3^{18}+3^9+1)(3^{54}+3^{27}+1)x =$$

$$= 85 + (3^3-1)(3^6+3^3+1)(3^{18}+3^9+1)(3^{54}+3^{27}+1)x =$$

$$=$$

$$\cancel{3^x + 4\cdot 3^{81} < 85 + 3^{81}x - x}$$

$$\cancel{3^x + x + 3^{81}(4-x) < 85}$$

$$3^x + 4\cdot 3^{81} < 85 + 3^{81}x - x$$

$$\cancel{3^{81}(3^{x-81} - x) + x + 4\cdot 3^{81} < 85}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

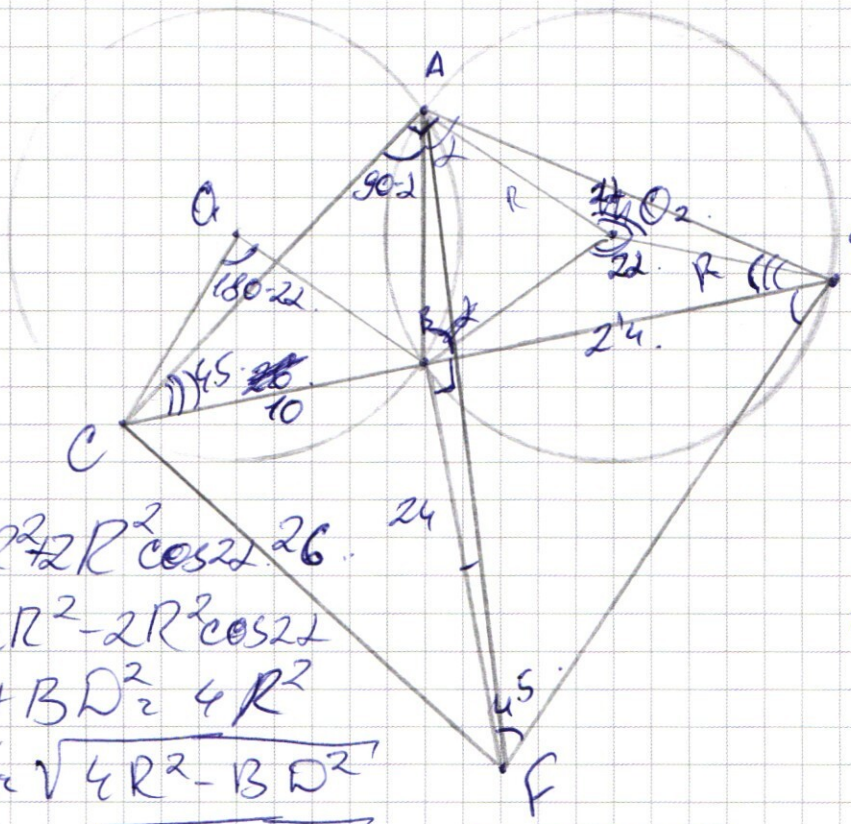
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\times 169 \cdot 2 = 338$

$\times 26 \cdot 26 = 156 + 52 = 676$

$\times 24 \cdot 24 = 96 + 48 = 576$

$AC = AD = \frac{34\sqrt{2}}{2} = 17\sqrt{2}$



$\times 17 \cdot 17 = 119 + 17 = 142$

$CB^2 = 2R^2 - 2R^2\cos 2\alpha$

$BD^2 = 2R^2 - 2R^2\cos 2\alpha$

$BC^2 + BD^2 = 4R^2$

$BC = \sqrt{4R^2 - BD^2}$

$CF = \sqrt{CB^2 + BF^2} = \sqrt{CB^2 + BD^2} = 2R = 26$

$\cos 2\alpha = \frac{BC^2 - 2R^2}{2R^2} = \frac{100 - 2\cdot 169}{2\cdot 169} = \frac{238}{2\cdot 169} = \frac{119}{169}$

$BF = \sqrt{26^2 - 100} = 24 = BD$

$\sin BCF = \frac{12}{13}$ $\cos BCF = \frac{5}{13}$

$S_{ACF} = \frac{1}{2}\cdot 26\cdot 17\sqrt{2}\cdot(\sin 45\cdot\cos BCF + \cos 45\sin BCF) =$

$= 13\cdot 17\left(\frac{5+12}{13}\right) = 142$