МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 4 и 9.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90°$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)\,x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$16875 = 5^4 \cdot 3^3 \Rightarrow$ в числе должны быть только цифры 1, 3, 5, 9, т.к. иначе произведение цифр будет делиться на ~~...~~ простые числа кроме ~~...~~ 5 и 3 $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ не будет равно 16875.

Тогда в ~~...~~ нашем числе:

- 4 пятерки, 3 тройки и 1 единица
- 4 пятёрки, 1 девятка, 1 тройка и 2 единицы

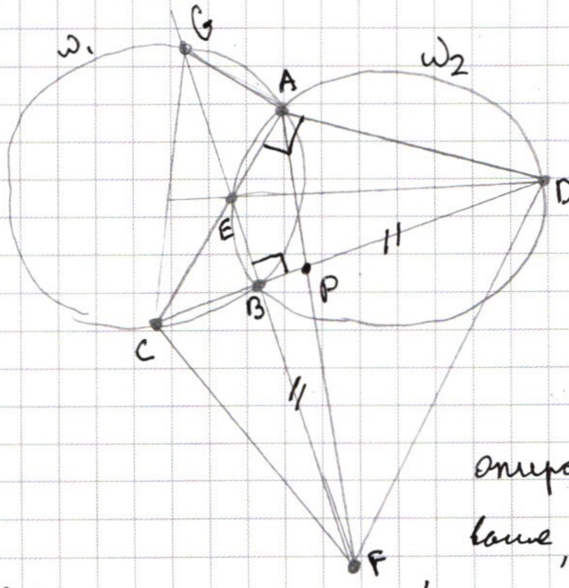
Чисел первого вида $C_8^1 \cdot C_7^3 = \frac{8!}{7!} \cdot \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = 280$ (выбираем 1 место для единицы из 8 и 3 места из 7 для троек)

Чисел второго вида $C_8^1 \cdot C_7^1 \cdot C_6^2 = \frac{8!}{7!} \cdot \frac{7!}{6!} \cdot \frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2} = 840$ (выбираем 1 из 8 для девятки, 1 из 7 для тройки и 2 из 6 для единиц.)

Итого $840 + 280 = 1120$

Ответ: 1120

№6



а) Пусть $CA \cap \omega_2 = E$

$\angle EAD = 90^\circ$ по условию $\Rightarrow ED$ - диаметр

$\angle DBF = 90^\circ$ по условию $\Rightarrow BF \cap \omega_2 = E$, т.к. B, как и A, лежит на ω_2 и вписанный угол с вершиной в любой из них должен опираться на диаметр через D, а диаметр, как говорилось выше, DE.

$\Rightarrow$

$\angle CAD = \angle CAB + \angle BAD = \frac{1}{2} \smile CB + \frac{1}{2} \smile BD = 90^\circ = \angle EAD = \angle EAB + \angle BAD = \frac{1}{2} \smile EB + \frac{1}{2} \smile BD$

☐ черновик ☒ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$\Rightarrow \smile EB = \smile CB$. Радиусы окружностей одинаковы $\Rightarrow$ ~~дуги~~ хорды, стягивающие равные ~~хорды~~ дуги, равны в них $\Rightarrow CB = BE$. Тогда $\triangle CBF = \triangle EBD$ по 2 катетам ($CB = EB$ и $BD = BF$ по условию) $\Rightarrow CF = ED = 26$, т.к. ED - диаметр, а по условию радиус - 13 ($\angle CBF = \angle EBD$ как вертикальные). Ответ: 26

б) ~~Если $BE = 10$, то $BF = \sqrt{CF^2 - EB^2} = \sqrt{169 - 100} = \sqrt{69}$~~

~~б~~ $\angle CEF = EFD = 45^\circ \Rightarrow CE \parallel FD \Rightarrow CAOF$ - трапеция. Тогда высоты из A и C на FD равны (пусть они равны h) $\Rightarrow S_\triangle CFD = h \cdot FD = S_\triangle AFD \Rightarrow S_\triangle AFD = S_\triangle CFD$. Пусть $AF \cap CD = P$.

$S_\triangle CFD = S_\triangle CPF + S_\triangle PFD$; $S_\triangle AFD = S_\triangle APD + S_\triangle PFD \Rightarrow$

$\Rightarrow S_\triangle CPF = S_\triangle APD$.

$S_\triangle ACF = S_\triangle ACP + S_\triangle CPF = S_\triangle ACP + S_\triangle APD = S_\triangle CAD$.

В $\triangle EBD$: $BD = \sqrt{DE^2 - BE^2} = \sqrt{(2R)^2 - BC^2} = \sqrt{4 \cdot 169 - 100} = \sqrt{576} = 24$ (т.к. $\angle EBD = 90^\circ$)

В $\triangle CAD$: $\angle ACD = 45^\circ$ и $CD = BC + BD = 34 \Rightarrow$

$\Rightarrow S_\triangle ACD = 34^2/4$ (высота из вершины A равна половине CD, т.к. является и медианой, т.к. $\angle CAD = 90^\circ$ и $\angle ACD = 45^\circ$)

$S_\triangle ACF = S_\triangle ACD = 289$

Ответ: 289

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 & (1) \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a & (2) \end{cases}$$

Из (1): $\left[\begin{array}{ll} x=12 & ;\ 6\geq y\geq -6 \\ y=-6 & ;\ 12\geq x\geq 0 \\ y=6 & ;\ 12\geq x\geq 0 \\ x=0 & ;\ 6\geq y\geq -6 \end{array}\right.$ – раскрыли модули 4-я возможными способами

При подстановке в (2) получим:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (|y|-8)^2 + 36 = a \\ 6\geq y\geq -6 \\ \left[\begin{array}{l} x=12 \\ x=0 \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} (|x|-6)^2 + 4 = a \\ 12\geq x\geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} y=6 \\ y=-6 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$$

Уравнение в каждой из систем должно иметь не больше 1 решения, т.к. иначе только 1 система даст 4 пары чисел, являющихся ответом. Если первая система имеет решение на промежутке $(0;6]$, то ~~она~~ имеет и второе, противоположное => решением этой системы может быть только $y=0 \Rightarrow a=100$

Во второй системе x неотрицательно => модуль можно снять =>

=> $x^2-12x+40-a=0$ $D=144-4(40-a)=4a-16$. Заметим, что при $a=100$ $x=\frac{12\pm\sqrt{384}}{2}$, причём $\frac{12+\sqrt{384}}{2}>12$, а $\frac{12-\sqrt{384}}{2}<0$ =>

$\Rightarrow$ при $a=100$ целых решений у этой системы не будет. Для того чтобы у ур-я было 1 решение, необходимо $D=0 \Rightarrow a=4$. Тогда $x=\frac{12}{2}=6$. Также заметим, что при $a=4$ ур-е $(|y|-8)^2=a-36$ не имеет целых решений.

Итого получаем 2 значения a: 100 и 4, и решения для них: $(12;0)$, $(0;0)$ и $(6;6)$, $(6;-6)$, соответственно.

Ответ: $a=4$ и $a=100$.

$\boxed{№ 7}$

$f(x)=85+(3^{81}-1)x$

$g(x)=3^x+4\cdot 3^{81}$

$f'(x)=3^{81}-1$

$g'(x)=3^x\cdot \ln 3$

Заметим, что $f'(x)=g'(x)$ при $x=\log_3\left(\frac{3^{81}-1}{\ln 3}\right)=C$

При $x<C$ $g'(x)<f'(x)$ и при $x>C$ $g'(x)>f'(x)$.

Заметим также, что при $x=4$ и при $x=85$ $g(x)=f(x)$

Очевидно, что $85>C>4 \Rightarrow$ на промежутке $x\in(4;85)$ $f(x)>g(x)$, а при $x\in(-\infty;4)\cup(85;+\infty)$; $g(x)>f(x) \Rightarrow$ решения данной системы лежат в области $\underline{x\in(4;85)}$

При целых x $f(x)$ и $g(x)$ также целые.

$f(x)>y\geq g(x) \Rightarrow$ к-во подходящих y $n=f(x)-g(x)$. Тогда искомое к-во пар $N=\sum\limits_{x=5}^{84} n=\sum\limits_{x=5}^{84} f(x)-g(x)=\sum\limits_{x=5}^{84}\left(85+x\cdot 3^{81}-x-3^x-4\cdot 3^{81}\right)=$

$=(3^{81}-1)\cdot\frac{(5+84)\cdot 80}{2}+80\cdot(85-4\cdot 3^{81})-\sum\limits_{x=5}^{84}3^x=$

$=\frac{(3^{81}-1)\cdot 89+170-8\cdot 3^{81}}{2}\cdot 80-3^5\cdot\sum\limits_{x=5}^{84}3^{x-5}=\frac{3^{81}\cdot 81+81}{2}\cdot 80-3^5\sum\limits_{x=0}^{79}3^x=$

$=\frac{3^{85}+81}{2}\cdot 80-3^5\cdot\frac{1-3^{80}}{1-3}=\frac{(3^{85}+81)\cdot 80+3^5-3^{85}}{2}=\boxed{\frac{3^{85}\cdot 79+6723}{2}}$ Ответ

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{№2}$

$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$

$\cos 7x + \cos 3x - \sin 7x - \sin 3x = \sqrt{2}\cos 10x$

$\cos^2 7x + \cos^2 3x + \sin^2 7x + \sin^2 3x + 2(\cos 7x \cdot \cos 3x - \cos 7x \cdot \sin 7x - \cos 7x \cdot \sin 3x -$

$- \cos 3x \cdot \sin 7x - \cos 3x \cdot \sin 3x + \sin 7x \cdot \sin 3x) = 2\cos^2 10x$

1) $\cos^2 7x + \sin^2 7x = \cos^2 3x + \sin^2 3x = 1$

2) $\cos 7x \cdot \cos 3x + \sin 7x \cdot \sin 3x = \cos 4x$

3) $-\cos 7 \cdot \sin 7x = -\frac{1}{2}\sin 14x$

4) $-\cos 3x \cdot \sin 3x = -\frac{1}{2}\sin 6x$

5) $-\cos 7x \cdot \sin 3x - \cos 3x \cdot \sin 7x = \sin 10x$

Подставив всё это:

$2 + 2(\cos 4x - \sin 10x - \frac{1}{2}(\sin 14x + \sin 6x) = 2\cos^2 10x$

$\sin 14x = \sin(10x + 4x) = \cos 10x \cdot \sin 4x + \sin 10x \cdot \cos 4x$

$\sin 6x = \sin(10x - 4x) = -\cos 10x \cdot \sin 4x + \sin 10x \cdot \cos 4x$

Тогда $\cancel{2} + \cancel{2}(\cos 4x - \sin 10x - \sin 10x \cdot \cos 4x) = \cancel{2}\cos^2 10x$

$\sin^2 10x + \sin 10x(-1 - \cos 4x) + \cos 4x = 0$

$\sin 10x = \dfrac{1 + \cos 4x \pm \sqrt{\cos^2 4x + 2\cos 4x + 1 - 4\cos 4x}}{2} = \dfrac{1 + \cos 4x \pm (1 - \cos 4x)}{2}$

~~Заметим, что решение есть только при $\cos 4x - 1 \geq 0 \Rightarrow \cos 4x = 1$, т.к.~~

~~$\cos 4x \leq 1 \Rightarrow 4x = 2\pi n \Rightarrow x = \pi n/2$~~

~~$\sin 10x = \frac{1 + 1 \pm 0}{2} = 1$~~

$\Rightarrow$ $\sin 10x = \left[\begin{array}{l} 1 \Rightarrow \cancel{10x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \Rightarrow x = \frac{\pi}{10}(\ldots)} \\ \cos 4x \Rightarrow \cancel{\cos 4x = \cos(\frac{\pi}{2} - 10x)} \Rightarrow \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ либо $10x = \pi n + \pi/2 \Rightarrow x = \frac{\pi}{10}\left(n + \frac{1}{2}\right)$

либо $\sin 10x = \cos 4x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 10x\right) \Rightarrow 4x - \left(\frac{\pi}{2} - 10x\right) = 8x - 2\pi n \Rightarrow$

$\Rightarrow 6x = \frac{\pi}{2} - 2\pi n \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}\left(\frac{1}{2} - 2n\right)$

Ответ! $x = \frac{\pi}{10}\left(n + \frac{1}{2}\right) \cup \frac{\pi}{6}\left(\frac{1}{2} - 2n\right)$

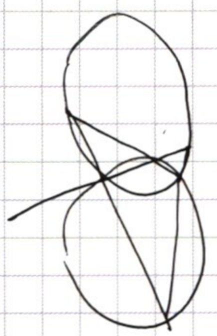
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$P = 16875$



16875	5
3375	5
675	5
135	5
27	3
9	3
3	3
1	

$C_8^4 \cdot C_7^3$

625×27: 4375, 1250, 16875

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$

$\cancel{\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}$

$\sin(\alpha \pm \beta) = \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta + \cos\beta \cdot \sin\alpha$

№2

$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$

$\cancel{\cos 4x \cdot \cos 3x = \sin 4x \cdot \sin 3x}$

$y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81}$

$y < 85 + (3^{81} - 1)x$

$\cancel{85 + 2 \cdot 3^{81} - 1}$

$85 + 3^{81} - 1$

$3^x \cdot \ln 3 + 4 \cdot 3^{81}$

$3^x + 4 \cdot 3^{81} > 85 + (3^{81} - 1)x$

$3^{86} + 4 \cdot 3^{81} > 85 \cdot 3^{81} \cdot 86 - 86$

$3^{86} > 82 \cdot 3^{81} - 1 \quad 86 \cdot 3^{81} - 1$

$243 \cdot 3^{81}$

$85 + (3^{81} - 1)x > 3^x + 4 \cdot 3^{81}$

$85 + 3^{81} \cdot x - x - 3^x - 4 \cdot 3^{81} > 0$

$0 + 3^{81} - 1 - 3^x \cdot \ln 3$

$x = 81 = 3^4$

$85 + 3^{85} - 81 - 3^{81} - 4 \cdot 3^{81}$

$\cancel{4 = 2^{85}}$

$88 + 3^{81} \cdot 85 - 85 - 3^{85} - 4 \cdot 3^{81} =$

$= 3^{81} \cdot 81 - 3^{85} = 0$

$x < 85$

625×27: 4375, 1250, 17475

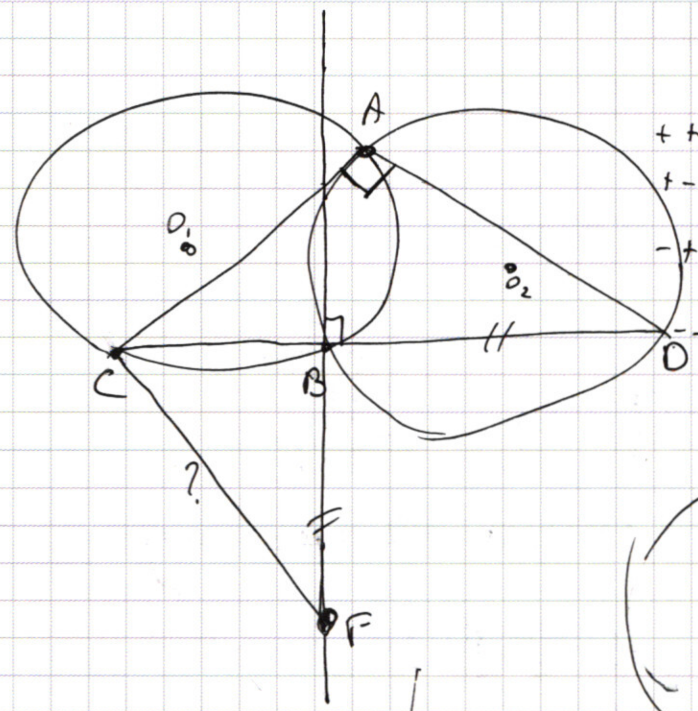
☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$x-6-y \quad -x+6-y \quad -x+6+y+x-6+y$

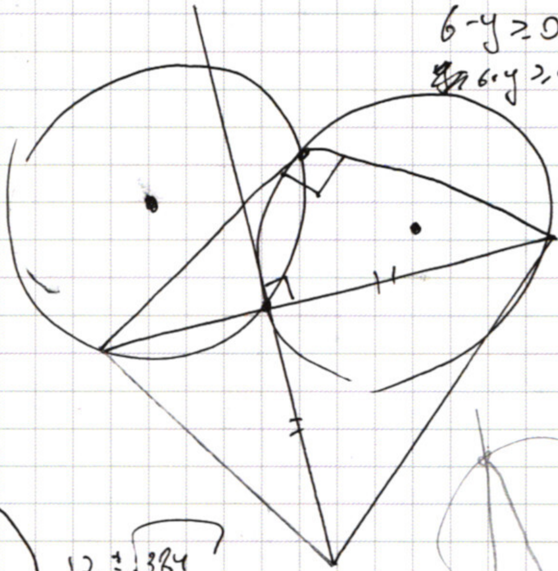
$|x-6-y|+|x-6+y|=12$

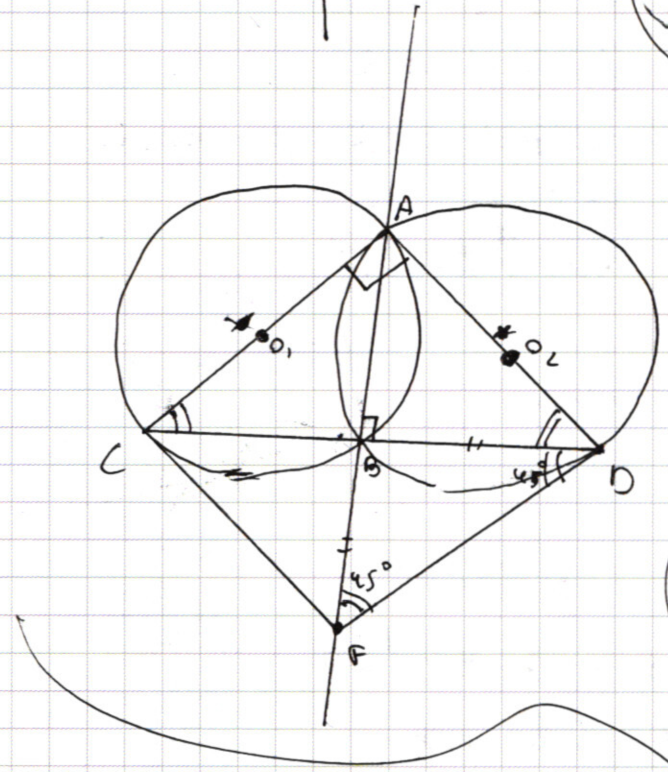
$$\left[\begin{array}{lll} ++\ \ 2x-12=12 & \Rightarrow x=12 & 6\ge y\ge -6 \\ +-\ \ -2y=12 & \Rightarrow y=-6 & 12\ge x\ge 0 \\ -+\ \ 2y=12 & \Rightarrow y=6 & 12\ge x\ge 0 \\ --\ \ -2x+12=12 & \Rightarrow x=0 & 6\ge y\ge -6 \end{array}\right.$$



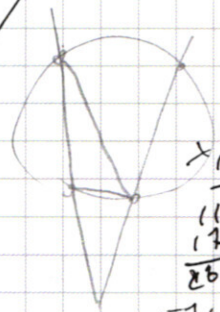
$6-y\ge 0 \Rightarrow y\le 6$

$6+y\ge 0 \quad y\ge -6$



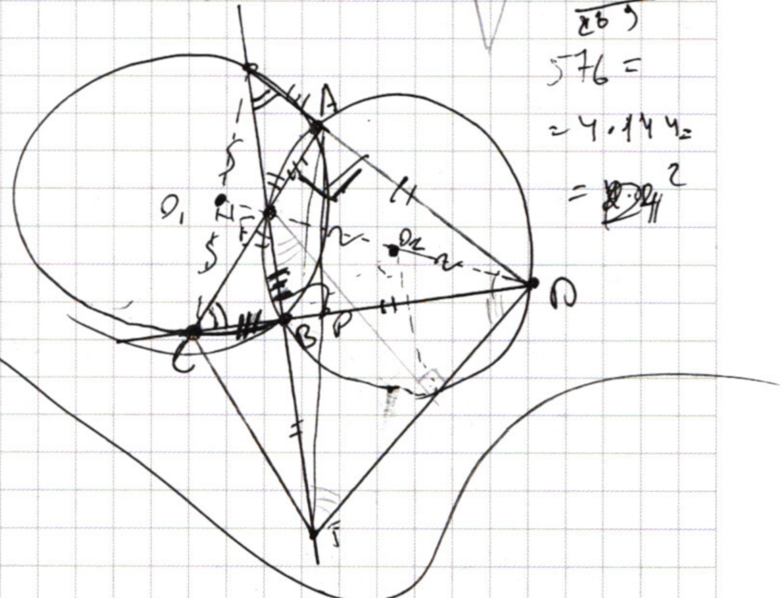


$\frac{12\pm\sqrt{384}}{2}$



$17 \cdot 17 = 289$

$576 = 4\cdot 144 = 24^2$



$$a\begin{cases}|x-6-y|+|x-6+y|=12\\(|x|-6)^2+(|y|-8)^2=a\end{cases}$$

$x^2-12|x|+36+y^2-16|y|+64=a$

$x^2+y^2-12|x|-16|y|=a-100 \Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{lll} y^2-16|y|=a-100 & 6\ge y\ge -6 & x=(12;0) \\ x^2-12|x|=a-40 & 12\ge x\ge 0 & y=\pm 6 \\ a=100 & & \end{array}\right.$$

$x^2-12x=a-40$

$D=144-4(40-a)=0$

$36-40+a=0$

$a=4$

$26\cdot 26 = 676$

$169\cdot 4$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

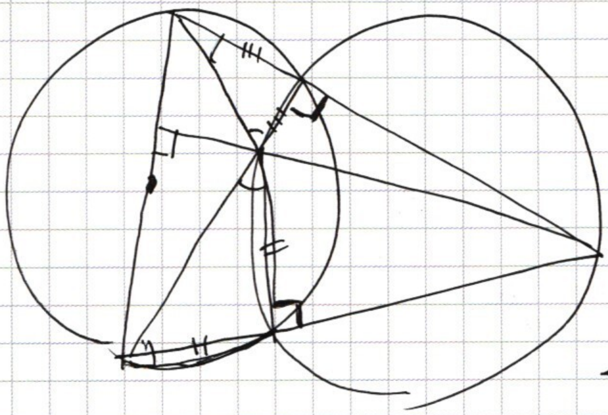
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 7x + \cos 3x - \sin 7x - \sin 3x = \sqrt{2}\cos 10x$$



$$2 + 2(\cos 7\cdot\cos 3 - \cos 7\cdot\sin 7 - \cos 7\cdot\sin 3 -$$
$$- \cos 3\cdot\sin 7 - \cos 3\cdot\sin 3 + \sin 7\cdot\sin 3)$$

$\to -\sin 10x$

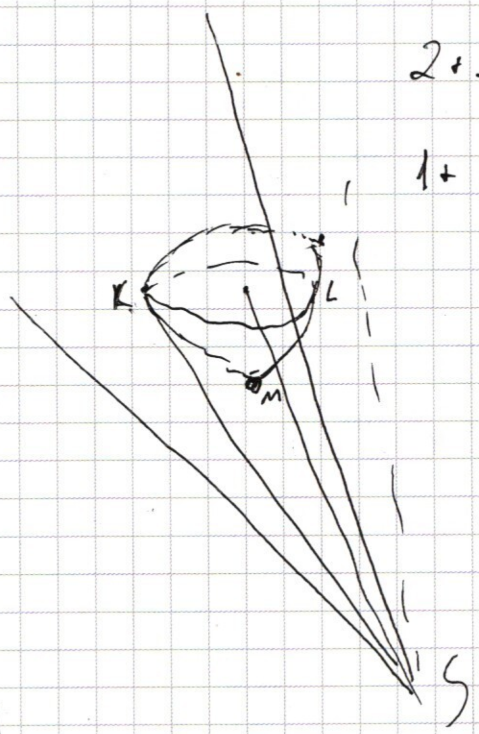
$$2 + 2(\cos 4x - \sin 10x - \frac{1}{2}\sin 14x - \frac{1}{2}\sin 6x$$

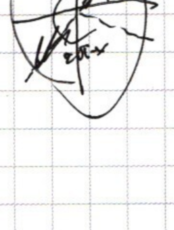
$$\sin(10x+4x) = \cos 10x\cdot\sin 4x + \sin 10x\cdot\cos 4x$$

$$\sin(10x-4x) = -\cos 10x\cdot\sin 4x + \sin 10x\cdot\cos 4x$$

$$2 + 2(\cos 4x - \sin 10x - \cancel{\tfrac{1}{2}}\sin 10x\cdot\cos 4x)$$

$$1 + \cos 4x - \sin 10x - \sin 10x\cdot\cos 4x = \cos^2 10x$$





$x - (2\pi n - x) = 2x$

☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$ $\quad 2y^2 + y(-x-8) - x^2 - 4x$

$$y = \frac{x+8 \pm \sqrt{x^2+16x+64 - 8(-x^2-4x)}}{4} = \frac{x+8 \pm \sqrt{9x^2+48x+64}}{4}$$

$$(x^4)^{\lg y} \cdot \underbrace{y^{-2\lg y}}_{\frac{1}{100}} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

$$x^{4\lg y} = 100(-x)^{\lg(-xy)} = 1000 \cdot y^{-\lg(-xy)}$$

$$(-x)^{\lg(-xy)} \cdot y^{\lg(-xy)}$$

$85 + 3^{81}x - x \geq 3^x + 4\cdot 3^{81}$ $\quad$ пр.: $x=85$, $x=4$

$3^{81} - 1 = 3^x \ln 3$

$\log_3\left(\frac{3^{81}-1}{\ln 3}\right) = x$

$1 + 3^1 + 3^2 + \ldots + 3^{79} = S$

$3S - 3^{80} + 1 = S$

$S = \frac{1-3^{80}}{1-3}$

$85 + 3^{86} - \ldots - 3^5 + 4\cdot 3^{81}$

$q^i + q^{i+1} \ldots + q^n = S$

$85 + 3^{81}x - x - 3^x + 4\cdot 3^{81}$

$qS + q^i - q^{n+1} = S$

$3^{84} = a$

$S = \frac{q^i - q^{n+1}}{1-q}$

$S(n) =$

$a + \frac{1}{3}a + \frac{1}{9}a$

$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n$

$\cancel{1 + q + \ldots + q^n = S(n) = qS(n) + 1 - q^{n+1}}$

$qS(n) + 1 = S(n+1)$

$81 \times 80 = 6480$

$6480 + 243 = 6723$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)