

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО М

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

$$_ \times _ \times _ \times _ \times _ \times _ \times _ = 16875$$

$$16875 \mid 3$$

$$5625 \mid 3$$

$$1875 \mid 3$$

$$625 \mid 5$$

$$125 \mid 5$$

$$25 \mid 5$$

$$5 \mid 5$$

$$1$$

$$16875 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1$$

Возможные цифры:

1; 3; 5; 9;

② Число состоит из:

5; 5; 5; 5 + 1) 3; 3; 3; 1

2) 9; 3; 1; 1

Так как числа $(5,5_2 \text{ и } 5_25_1)$ одно и то же

$$\Rightarrow 1) \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = 4 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5 = 280$$

$$2) \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{4} \cdot 2} = 4 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 840$$

$$\text{Итого } 280 + 840 = 1120$$

Ответ: 1120

№3.

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases}$$

$$-x^2 - x(y+4) + 2y^2 - 8y = 0$$

$$D = (y+4)^2 + 4(2y^2 - 8y) = (y^2 + 8y + 16) + 4(2y^2 - 8y) = 9y^2 - 24y + 16 = (3y - 4)^2$$

$$x = \frac{(y+4) \pm (3y-4)}{-2}$$

$$\Rightarrow x_1 = -2y \quad x_2 = y - 4$$

$$\left(\frac{(-2y)^4}{y^2}\right)^{\lg 10 y} = (2y)^{\lg 10 (2y^2)}$$

$$(16y^2)^{\lg 10 y} = (2y)^{\lg 10 (2y^2)}$$

$y \neq 0$

$$(4y)^{2 \lg 10 y} = (2y)^{\lg 2 y} \cdot (2y)^{\lg 10 y}$$

$$(4y)^{\lg y^2} = (2y)^{\lg 2 y^2}$$

$$4^{\lg y^2} \cdot y^{\lg y^2} = 2^{\lg 2 y^2} \cdot y^{\lg 2 y^2}$$

$$2^{2 \lg y^2} \cdot y^{\lg y^2} = 2^{\lg 2 y^2} \cdot y^{\lg 2 y^2}$$

$$\frac{2^{\lg y^4}}{2^{\lg 2 y^2}} = \frac{y^{\lg 2 y^2}}{y^{\lg y^2}} \Rightarrow 2^{\lg y^4 - \lg 2 y^2} = y^{\lg 2 y^2 - \lg y^2}$$

$$\Rightarrow 2^{\lg \frac{y^4}{2}} = y^{\lg 2}$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ \lg \frac{y^2}{2} = \lg 2 \\ \lg \frac{y^3}{2} = 0 \\ y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2 \\ y^2 = 4 \\ \frac{y^3}{2} = 1 \\ y = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} y = 2 \\ \emptyset \end{matrix}$$

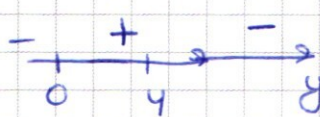
$$\boxed{(-4; 2)}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\frac{y-4}{y^2}\right)^{\lg(y-4)} = (4-y)^{\lg((4-y)y)}$$

$$\left(\frac{y-4}{y^2}\right)^{\lg(y-4)} = (4-y)^{\lg(4y-y^2)}$$

$$\begin{cases} y-4 > 0 \\ 4y-y^2 > 0 \end{cases} \begin{cases} y > 4 \\ y(4-y) > 0 \end{cases} \quad y > 4$$



⇒ по ОДЗ: не подходит

ОДЗ:

$$\begin{cases} y > 0 \\ y \neq 0 \\ -xy > 0 \end{cases} \quad y > 0 \Rightarrow x < 0$$

Ответ: $(-4; 2)$

№

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

$x, y \in \mathbb{Z}$

кол-во пар = ?

при $x < 0$

$$\begin{cases} y \geq \frac{1}{3} + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 - 3^{81} + 1 \end{cases}$$

решений нет

при $x = 0$

$$\begin{cases} y \geq 1 + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 \end{cases}$$

решений нет.

x при $x=4$

$$\begin{cases} y \geq 81 + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 81 + 4 \cdot 3^{81} \end{cases}$$

решений нет

$$\Rightarrow x \geq 5$$

при $x=85$

$$\begin{cases} y \geq 3^{85} + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 \cdot (3^{81} - 1) / 85 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq 85 \cdot 3^{81} \\ y < 85 \cdot 3^{81} \end{cases} \Rightarrow x \leq 84$$

$$x \in [5; 84]$$

кон-во "унов"

$$85 + (3^{81} - 1) / x - 3^x - 4 \cdot 3^{81} = K_x$$

$$K_x = 85 - x + 3^x + 3^{81}(x - 4)$$

для каждого " x " существует K_x "у"

$\Rightarrow$ ~~нет~~

$$\text{коды} = 84 - 5 + 1$$

$$\text{кон-во } K = 84 - 5 + 1 = 80$$

$$\text{коды} = 85 \cdot 80 - (5 + 6 + \dots + 84) - (3^5 + 3^6 + \dots + 3^{84}) + 3^{81}(5 + 6 + \dots + 84 - 4 \cdot 80) =$$

$$= 85 \cdot 80 - (89 \cdot 20) - (3^5 + 3^6 + \dots + 3^{84}) + 3^{81}(89 \cdot 20 - 16 \cdot 20) =$$

$$= 85 \cdot 80 - 89 \cdot 20 - (3^5 + 3^6 + \dots + 3^{84}) + 3^{81} \cdot 20 \cdot 73 =$$

$$= 340 \cdot 20 - 89 \cdot 20 - (3^5 + 3^6 + \dots + 3^{84}) + 3^{81} \cdot 20 \cdot 73$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\sin 7x + \sin 3x = 2 \sin \frac{7x+3x}{2} \cos \frac{7x-3x}{2} =$$

$$= 2 \sin 5x \cdot \cos 2x$$

$$\cos 7x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 7x\right) \quad \cos 3x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right)$$

$$\cos 7x + \cos 3x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 7x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right) =$$

$$= 2 \sin \frac{\pi+10x}{2} \cos \frac{7x-3x}{2} = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} + 5x\right) \cos 2x =$$

$$= 2 \cos 5x \cdot \cos 2x$$

$$\Rightarrow 2 \cos 5x \cdot \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cdot \cos 2x$$

$$\cos 10x = \cos^2 5x - \sin^2 5x$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x - \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) - 2 \sin 5x \cdot \cos 2x = 0$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos^2 5x + \sqrt{2} \sin^2 5x - 2 \sin 5x \cos 2x = 0$$

$$\sqrt{2} \cos 5x (\sqrt{2} \cos 2x - \cos 5x) - 2 \sin 5x (\sqrt{2} \cos 2x - \sin 5x) = 0$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) \cdot$$

$$(\cos 5x + \sin 5x) = 0$$

$$(2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)) = 0$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) (2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)) = 0$$

$$\cos 5x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 5x\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+5x\right) + \sin 5x = 2\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+10x}{2}\right) \cos \frac{\frac{\pi}{2}-0}{2} =$$

$$= 2\sin\left(\frac{\frac{\pi}{4}+5x}{2}\right) \cdot \cos \frac{\pi}{4} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}+5x\right) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}+5x\right)$$

$$(\cos 5x - \sin 5x)(2\cos 2x - 2\sin\left(\frac{\pi}{4}+5x\right)) = 0$$

$$\Rightarrow \cos 5x = \sin 5x$$

$$\cos 2x = \sin\left(\frac{\pi}{4}+5x\right)$$

$$\cos 5x - \sin 5x =$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+5x\right) + \sin\left(-\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)\right) =$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2}+5x\right) + \sin(-5x) =$$

$$= 2\sin\left(\frac{\frac{\pi}{4}+5x - \frac{\pi}{2}-2x}{2}\right) \cos \cdot$$

$$= 2\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+5x-5x}{2}\right) \cos \frac{\frac{\pi}{2}+5x+5x}{2} =$$

$$\cdot \cos \frac{\frac{\pi}{4}+5x + \frac{\pi}{2}+2x}{2} =$$

$$= 2\sin \frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi}{2}+5x\right) =$$

$$= 2\sin\left(\frac{-\frac{\pi}{4}+3x}{2}\right) \cos\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+7x}{2}\right)$$

$$= \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}+5x\right) =$$

$$= \sqrt{2} \cdot (-\cos 5x) =$$

$$= -\sqrt{2} \sin 5x$$

$$\sin 5x \cdot \sin\left(\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{8}\right) \cos\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{7}{2}x\right) = 0$$

$$5x = \pi k$$

$$x = \frac{\pi k}{5}$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{8} = \pi n$$

$$\frac{3}{2}x = \frac{\pi}{8} + \pi n$$

$$3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n$$

$$n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{3\pi}{8} + \frac{7}{2}x = \frac{\pi}{2} + \pi l$$

$$\frac{7}{2}x = \frac{\pi}{8} + \pi l$$

$$7x = \frac{\pi}{4} + 2\pi l$$

$$x = \frac{\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi l$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi k}{5}; \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n; \frac{\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi l; \quad k, n, l \in \mathbb{Z}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases} \quad \text{2 решения}$$

$$x^2 - 12|x| + 36 + y^2 + 16|y| + 100 = a$$

$$x^2 + y^2 - 12|x| - 16|y| = a - 100$$

$$\begin{cases} (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = (\sqrt{a})^2 \\ |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \end{cases}$$

$$x-6-y + x-6+y + 2(|x-6-y|/|x-6+y|) = 144$$

$$2x - 12 + 2/|(x-6-y)/(x-6+y)| = 144$$

$$2x - 12 + 2/((x-6)^2 - y^2) = 144$$

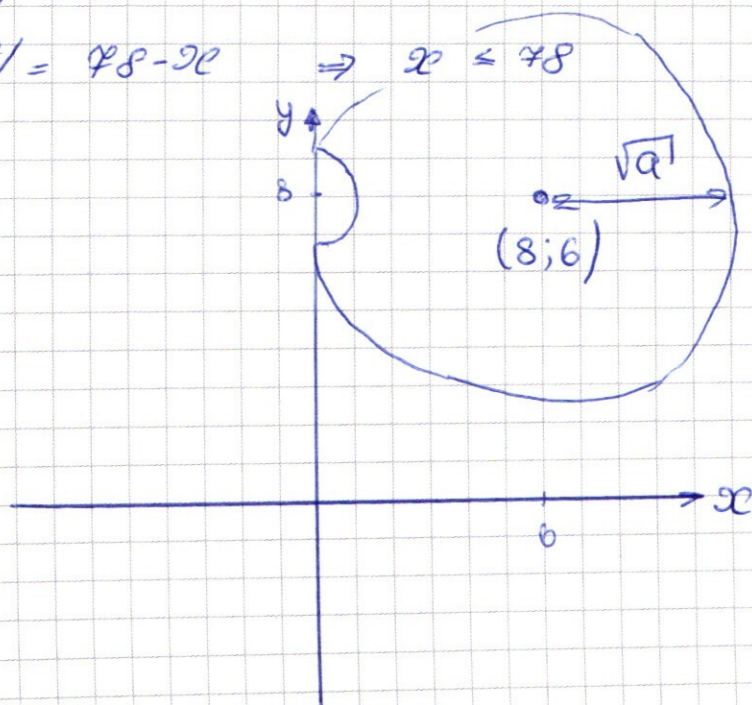
$$2x - 12 + 2/((x-6)^2 - y^2) = 144$$

$$1/((x-6)^2 - y^2) = 72 - x + 6$$

$$1/((x-6)^2 - y^2) = 78 - x$$

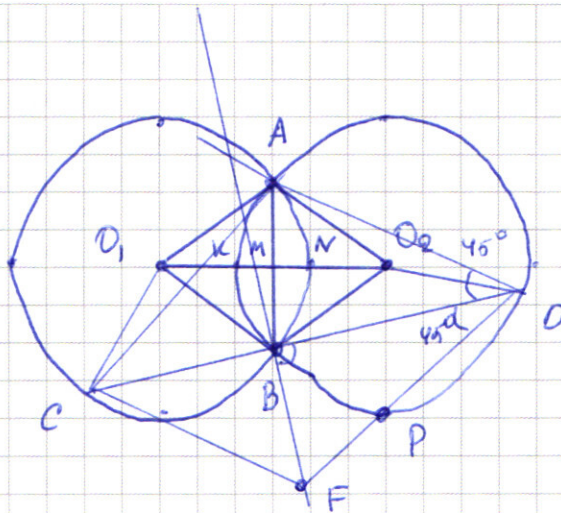
$$x-6 = t$$

не y



N6

a)



$$R_1 = R_2$$

$$BF = BD$$

$$\angle CAD = 90^\circ$$

$$CF = ?$$

$$\triangle O_1AB = \triangle O_2AB \text{ по 3 сторонам}$$

$$\Rightarrow \angle AOB = \angle AOB_2 \Rightarrow \angle AKB = \angle ANB$$

$$\Rightarrow \angle CAB = \angle ACB = \angle AOB \text{ (как впис. угол на одних дугах)}$$

$$\triangle ADC - \text{прямоу. равнобедр. (т.к. } \angle ACB = \angle AOB)$$

$$\angle ACB = \angle AOB = 45^\circ \Rightarrow AC = AD$$

$$\angle AOB = \angle AOB_2 = 90^\circ \text{ (т.к. центр.)}$$

$$\Rightarrow AO, BO_2 - \text{квадрат (все стор. равны и угол } 90^\circ)$$

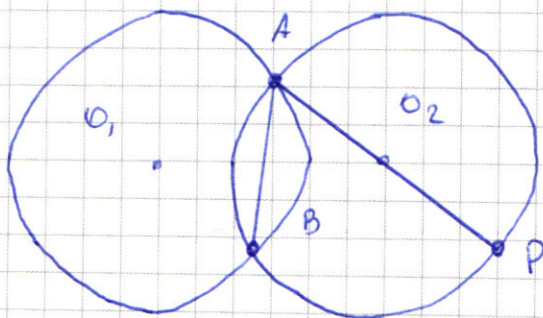
$$\Rightarrow AB \perp O_1O_2 ; O_1M = MO_2 = AM = MB$$

$$\angle BFD = \angle BDF = 45^\circ \Rightarrow \angle ADF = 90^\circ$$

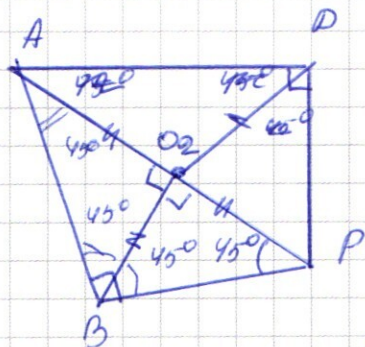
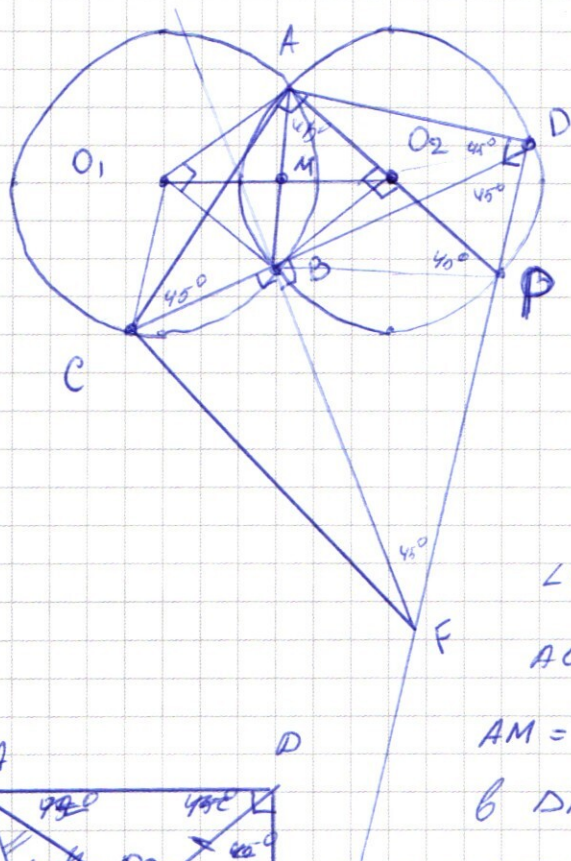
$$\uparrow$$

$$\text{(т.к. } BF = BD \text{ и } BF \perp OD)$$

$$\angle ADP = \angle ADF \text{ и оп. впис., а впис. угол равен } 90^\circ \text{ опирается на диаметр} \Rightarrow AP - \text{диаметр.}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\triangle CAD \sim \triangle FBD$ (по 3 углам)

$$\frac{AD}{BD} = \frac{CD}{DF} \quad DF = \sqrt{2} \cdot DB$$

$$\frac{AD}{BD} = \frac{CD}{\sqrt{2} \cdot BD}$$

$$\sqrt{2} \cdot AB = CD$$

~~400000~~

$$AD^2 + DP^2 = 4R^2$$

$$AD^2 + AD^2 = CD^2$$

$$\angle ABP = 90^\circ$$

$$AO_2 = O_2P = O_2B = O_2D = R$$

$$AM = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot R = \frac{\sqrt{2}}{2} R$$

в $\triangle ABD$

$$\sin \angle APB = \frac{AB}{AD} = \frac{\sqrt{2} \cdot R}{2R} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

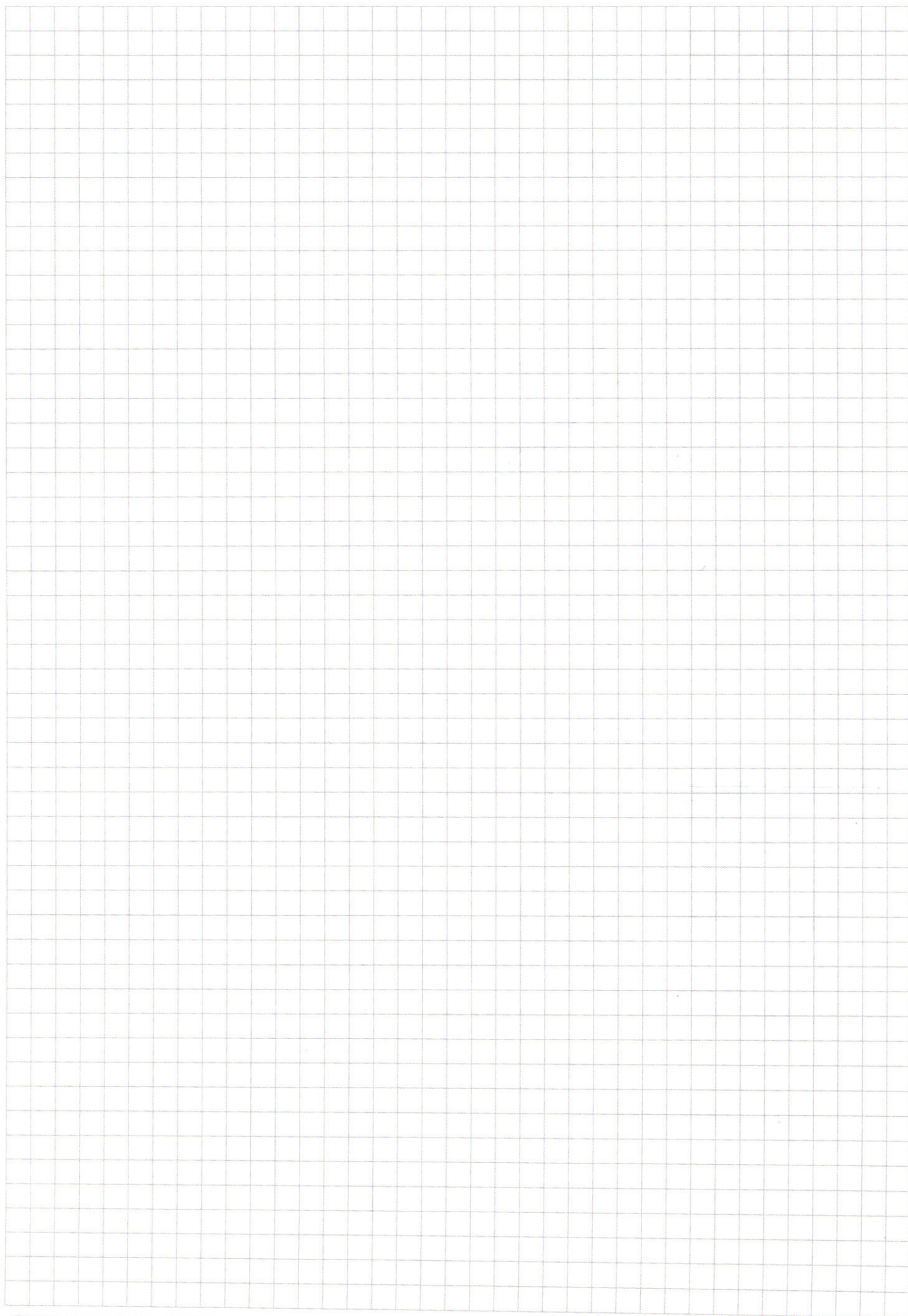
$$\Rightarrow \angle APB = 45^\circ ; \angle PAB = 45^\circ$$

$$AB = BD ; AO_2 = O_2D = O_2B = O_2P$$

$\Rightarrow ABPD$ - прямоугольник $\Rightarrow$ «квадрат»

$$AD = DP = \sqrt{2} R = BD$$

$$\Rightarrow BD = 2R \quad BF = 2R$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases}$$

реш:

$$\begin{cases} y \neq 0 \\ y > 0 \\ -xy > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \neq 0 \\ y > 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

$$\frac{(x^4)^{\lg y}}{(y^2)^{\lg y}} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg xy}$$

$$\left(\frac{(-2y)^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (2y)^{\lg(2y^2)}$$

$$\left(\frac{16y^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (2y)^{\lg 2 + \lg y^2}$$

$$(16y^2)^{\lg y} = (2y)^{\lg 2 + \lg y^2} \quad y \neq 0$$

$$(4y)^{2\lg y} = (2y)^{\lg 2 + \lg y^2}$$

$$(4y)^{\lg y^2} = (2y)^{\lg 2 + \lg y^2}$$

$$-x^2 - x(y+4) + 2y^2 - 8y = 0$$

$$\begin{aligned} D &= (y+4)^2 - 4(-1)(2y^2 - 8y) = \\ &= (y^2 + 8y + 16) + 4(2y^2 - 8y) = \\ &= y^2 + 8y + 16 + 8y^2 - 32y = \\ &= 9y^2 - 24y + 16 = \\ &= (3y - 4)^2 \end{aligned}$$

$$x = \frac{-(y+4) \pm (3y-4)}{-2}$$

$$x_1 = \frac{4y}{-2} = -2y \quad !$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{y+4 - 3y+4}{-2} = \frac{-2y+8}{-2} = \\ &= y-4 \quad ! \end{aligned}$$

$$\lg \left(\frac{x^4}{y^2} \right)^{\lg y} = (-x) \lg(-x) + \lg y$$

$$\frac{(x^4)^{\lg y}}{(y^2)^{\lg y}} = (-x)^{\lg(-x)} \cdot (-x)^{\lg y}$$

$$\cancel{(-x)^{\lg(-x)}} = \cancel{(-x)^{\frac{1}{\lg(-x)10}}} = \cancel{(-x)^{(\lg(-x)10)^{-1}}}$$

$$= \frac{1}{-x \lg(-x)10} = \frac{1}{10}$$

$$(y^2)^{\lg y} = y^{2 \lg y} = y^{\lg \log_{10} 2 y} = y^{\frac{1}{\log_4(\sqrt{10})}} = \frac{1}{y \cdot \log_4(\sqrt{10})} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\frac{(x^4)^{\lg y}}{\frac{1}{\sqrt{10}}} = \frac{1}{10} \cdot (-x)^{\lg y}$$

$$10 \sqrt{10} (x^4)^{\lg y} = (-x)^{\lg y}$$

$$(2) 2^{2(-2)} = (2)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$$

$$(2)^{\frac{2 \cdot 2}{4}} = \frac{1}{4}$$

$$x = -2y$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2} \right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-x)} \cdot (-x)^{\lg y}$$

$$\left(\frac{16y^4}{y^2} \right)^{\lg y} = (2y)^{\lg 2y} \cdot (-2x)^{\lg y}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 два решения

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\ ((|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & (x-6-y)^2 + (x-6+y)^2 + \\ & + 2|x-6-y||x-6+y| = 144 \end{aligned}$$

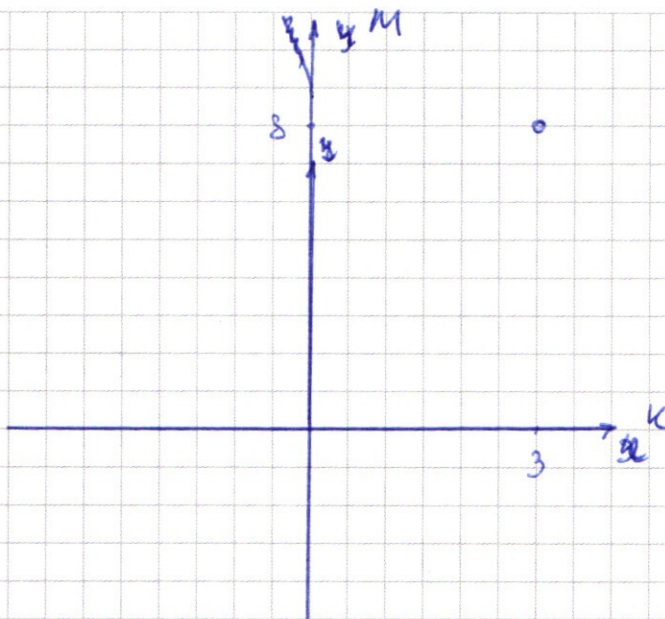
$$|x| = M \quad |y| = K$$

$$M, K > 0$$

$$|x-6-y| = 12 - |x-6+y|$$

$$|x-6-y| = 0$$

$$x=6 \quad y=x-6$$



№1

8 цифр.

$$_ \times _ \times _ \times _ \times _ \times _ \times _ = 16875$$

$$\begin{array}{r|l} 16875 & 3 \\ 5625 & 3 \\ 1875 & 3 \\ 625 & 5 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ \hline & \end{array}$$

$$\Rightarrow 16875 = 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 1$$

Возможные цифры:

1; 3; 5; 9

Должны быть:

4 ~~ре~~ 5; 3 3 и 1;

$$\begin{array}{r} 280 \\ + 840 \\ \hline 1120 \end{array}$$

Если ~~на~~ на 1 то:

Ответ: 1120

Должны быть:

5; 5; 5; 5 + 1) 3 3 3 1
2) 9 3 1 1

$$\Rightarrow \cancel{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9}$$

$$\cancel{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9}$$

5, 5₂ 3 3 10
5₂ 5, 10 50 100

~~50 50 10 10 10 10~~

$$\frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{3 \times 2} = \frac{4 \times 7 \times 2 \times 5}{1} =$$

$$= 28 \cdot 10 = 280$$

$$\begin{aligned} 2) \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1} &= \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{2} = 4 \times 7 \times 6 \times 5 = \\ &= 28 \times 3 \times 10 = 840 \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ $x, y \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

коп-во пар = ?

$$85 = 5 \times 17$$

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} - \text{всегда} > 0 \text{ (при любом } x) \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

При $x < 0$

$$\text{Верх: } y \geq 4 \cdot 3^{81} + \frac{1}{3}$$

$$\text{Низ: } y \leq 86 - 3^{81}$$

} $\Rightarrow$ нет решений

При $x = 0$

$$\begin{cases} y \geq 1 + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 \end{cases}$$

нет решений
 $\frac{(a_n - a_1)d}{n}$

$$\Rightarrow x \in \mathbb{N} \quad y \in \mathbb{N}$$

$$\frac{2a_1 + (n-1)d}{d-1} \quad n$$

при $x = 4$

$$\begin{cases} y \geq 81 + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 881 + 4 \cdot 3^{81} \end{cases}$$

нет реш.

$$5 - 3$$

$$7 - 2$$

$$\text{т.е. } x \geq 5$$

$$\frac{5 + 84}{2} = \frac{89}{2} \cdot 40$$

$$= 89 \cdot 20$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{81} > 85 + (3^{81} - 1)x$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{81} > 85 - x + x \cdot 3^{81}$$

$$3^x - 85 + x > (x - 4) \cdot 3^{81}$$

$$x = 82 \quad \text{не уга.}$$

$$x = 83 \quad \text{не уга.}$$

$$x = 84$$

$$3^{84} - 85 + 84 \vee 48 \cdot 3^{81} \quad 48 > 2^2$$

$$\Rightarrow x \in y_9.$$

$$\geq 3 \quad < 8$$

$$3^{85} \vee 81 \cdot 3^{81}$$

$$3^{85} \vee 3^4 \cdot 3^{81}$$

$$3^{85} = 3^{85}$$

$$x = 85$$

$$8 - 3$$

Проверка

$$\begin{cases} y \geq 3^{85} + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1) \cdot 85 \end{cases}$$

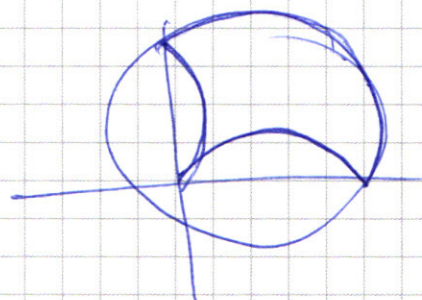
$$3^4 + 4 = 81 + 4 = 85$$

$$\begin{cases} y \geq 3^4 \cdot 3^{81} + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 \cdot 3^{81} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq (3^4 + 4) \cdot 3^{81} \\ y < 85 \cdot 3^{81} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq 85 \cdot 3^{81} \\ y < 85 \cdot 3^{81} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq 85 \cdot 3^{81} \\ y < 85 \cdot 3^{81} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \in [5; 84]$$



$$1-31/61 \\ 1-181$$

уау

кол-во учов

$$85 + (3^{81} - 1)x - (3^4 + 4 \cdot 3^{81}) =$$

$$\begin{array}{r} + 81 \\ 3 \\ \hline 243 \end{array}$$

$$= 85 + x \cdot 3^{81} - x - 3^4 - 4 \cdot 3^{81} =$$

$$= 85 - x - 3^4 + 3^{81}(x - 4) \quad (11-5)$$

также у при $x = 5$

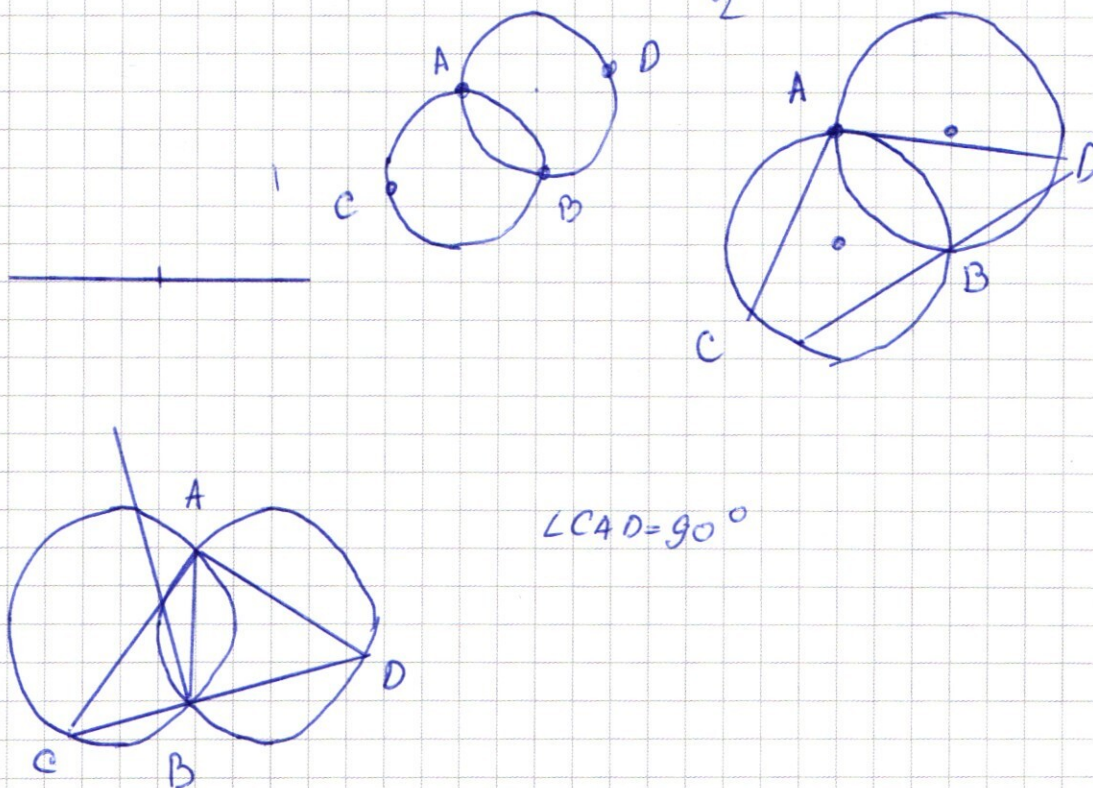
$$85 - 5 - 3^5 + 3^{81} = 80 - 243 + 3^{81} = -163 + 3^{81} \quad (\text{учов})$$

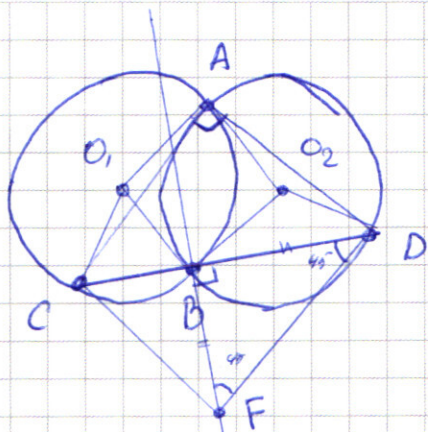
$$\text{у } x = 6$$

$$= 85 - (x + 3^4) + 3^{81} \cdot (x - 4)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6





$\triangle FBD$ - равнобедр.

$$\angle BFD = \angle BDF = 45^\circ$$

$$\angle ACB = \frac{\angle ACD + \angle AO_2B}{2}$$

$\angle AMB = \angle ANB$ по 3-м сторонам

$$\Rightarrow \angle AO_1B = \angle AO_2B \quad (\text{т.к. } OM \text{ и } ON \text{ углов.})$$

$$\angle AMB = \angle ANB$$

$\Rightarrow \angle ACB = \angle ADB$ (т.к. впис. опирающ. на равн. дугу.

$$\Rightarrow \text{и } \angle CAD = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle ACD = \angle ADC = 45^\circ \quad \triangle ACD - \text{равнобедр.}$$

$$\Rightarrow \angle AO_1B = \angle AO_2B = 90^\circ$$

$$\triangle O_1AO_2 = \triangle O_1BO_2 \Rightarrow O_1AO_2B - \text{квадрат}$$

$$AC = AD$$

$$\Rightarrow \angle AOC = \angle AO_2D$$

$$\angle O_1AM = \angle O_2AD$$

$\triangle O_1AO_2$ - равнобедр. (пол. квадрата)

$AK \perp O_1O_2$ как диаг. квадрата

$$\Rightarrow \angle O_1AK = \angle O_2AK$$

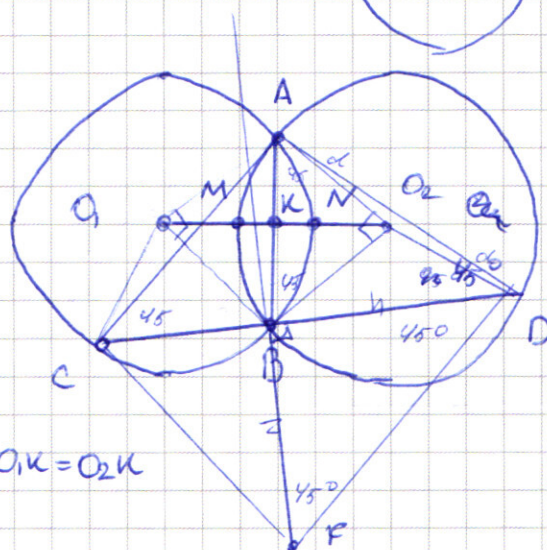
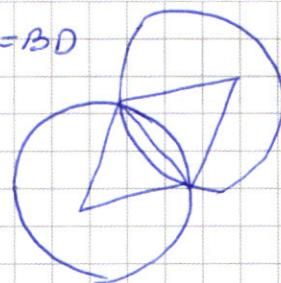
$$\angle AOF = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$$

$$R = 13$$

$$CF = ?$$

$$\angle CAD = 90^\circ$$

$$BF = BD$$



$$O_1K = O_2K$$