МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6 ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 4 и 9.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$x - 6$ 4 y $8 - x$.

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90°$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)\, x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1.

Заметим, что $16875 = 5^4 \cdot 3^3$ => т.к. $5 \cdot x > 9$, где $x \geq 2$ => в нашем числе есть 4 цифры $= 5$ => произведение оставшихся 4 цифр $= 27$ => заметим, что подходят только четверки чисел 3, 3, 3, 1 и 9, 3, 1, 1 (каждое число либо 1, либо степень 3 => 2 вар. и их произв. $= 27$ => всего 2 вар-та).

Подсчитаем кол-во чисел составленных из набора:

а) $\{5, 5, 5, 5, 3, 3, 3, 1\}$: $C_8^4 \cdot C_4^3$ (кол-во спос. выбр. 4 числа $= 5$; кол-во спос. из ост. 4 чисел выбрать $3 = 3$.)

б) $\{5, 5, 5, 5, 9, 3, 1, 1\}$: $C_8^4 \cdot 4 \cdot 3$ (4 по 5; 9; 3)

в) Всего способов: $C_8^4 \cdot 4 + C_8^4 \cdot 4 \cdot 3 = C_8^4 \cdot 16 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 16 = 70 \cdot 16 = 1120$

Ответ: 1120.

№ 2.

$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x.$

$2\cos 5x \cdot \cos 2x - 2\sin 5x \cdot \cos 2x - \sqrt{2}(\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 0$

$2\cos 2x(\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2}(\cos 5x - \sin 5x)(\cos 5x + \sin 5x) = 0.$

$(\cos 5x - \sin 5x)(2\cos 2x - 2\sin(5x + \frac{\pi}{4})) = 0.$

$(\cos 5x - \sin 5x)(\cos 2x - \sin(5x + \frac{\pi}{4})) = 0.$

$\sqrt{2}\sin(5x - \frac{\pi}{4})(\cos 2x - \cos(\frac{\pi}{4} - 5x)) = 0$

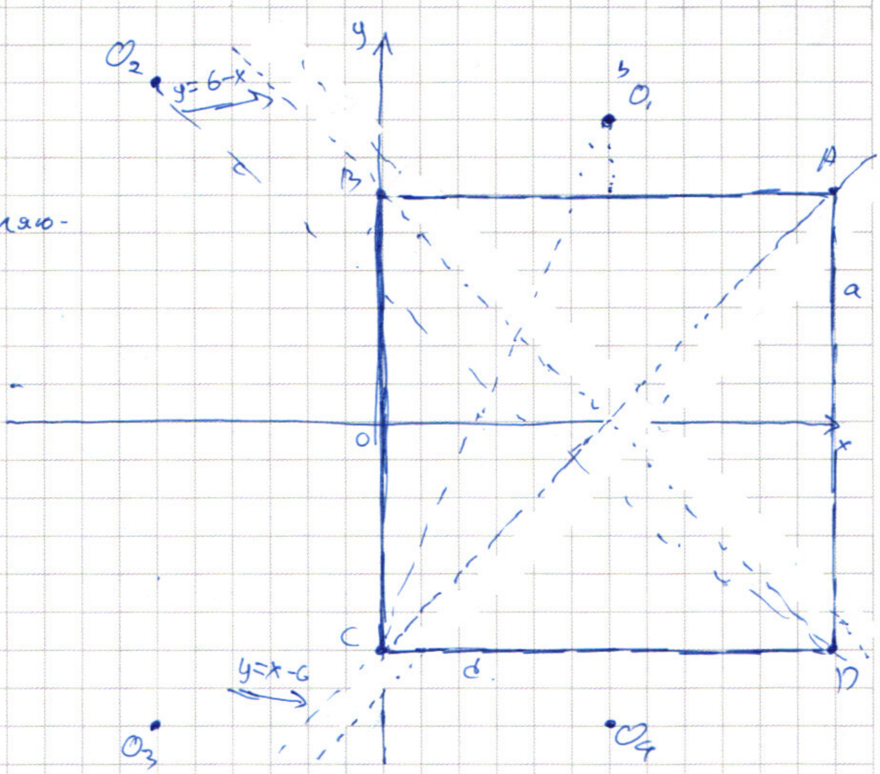
$\sqrt{2}\sin(5x - \frac{\pi}{4}) \cdot 2\sin(\frac{\pi}{8} - \frac{3}{2}x) \cdot \sin(\frac{7}{2}x - \frac{\pi}{8}) = 0$

$\left[\begin{array}{l} \sin(5x - \frac{\pi}{4}) = 0 \\ \sin(\frac{\pi}{8} - \frac{3}{2}x) = 0 \\ \sin(\frac{7}{2}x - \frac{\pi}{8}) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x - \frac{\pi}{4} = \pi n \\ \frac{\pi}{8} - \frac{3}{2}x = \pi k \\ \frac{7}{2}x - \frac{\pi}{8} = \pi l \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5}n. \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}k \\ x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi}{7}l. \end{array}\right.$ $n, k, l \in \mathbb{Z}$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5}n, n \in \mathbb{Z}. \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}k, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi}{7}l, l \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

№ 5.

$$\begin{cases} 1)\ |x-6-y|+|x-6+y|=12 \\ 2)\ (|x|-6)^2+(|y|-8)^2=a. \end{cases}$$



I. ~~Рез~~ Отметим все точки, являющиеся решением ур. 1) на пл-ти:

Рассмотрим 4 случая:

a) $\begin{cases} y< x-6 \\ y>6-x \end{cases} \Rightarrow x-6-y+x-6+y=12 \Leftrightarrow \underline{x=12}$

b) $\begin{cases} y>x-6 \\ y>6-x \end{cases} \Rightarrow y+6-x+x-6+y=12 \Leftrightarrow \underline{y=6}$.

c) $\begin{cases} y<6-x \\ y>x-6 \end{cases} \Rightarrow -x+6+y-x+6-y=12 \Leftrightarrow \underline{x=0}$

d) $\begin{cases} y< x-6 \\ y<6-x \end{cases} \Rightarrow x-6-y-x+6-y=12. \Leftrightarrow \underline{y=-6}$.

II. Заметим, что решением ур-я 2) на плоскости будут ~~мн-во точек $M(x,y)$, таких, что расст. от $MO=a$ от O_1 где $O(6;8)$~~ окр-ти с центрами в O_1, O_2, O_3, O_4 и рад. $=a$. (пусть $MO_i=a$, где $M(x;y) \Rightarrow M'(|x|;|y|) \Rightarrow M'O_1=a$ из симметрии) $\Rightarrow$ решением системы будут точки перес. этих ок-тей и квадрата.

Заметим также, что картинка симм. относ. оси OX $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ если окр-ть с центром в O_1 перес. квадрат, то и в O_4 тоже (аналог. для O_2 и O_3) $\Rightarrow$ ~~необх.~~ чтобы было ровно 2-решения необходимо, чтобы:

~~(ω_i = окр-ть с ц. в O_i и рад. a) ω_1 первое кас. квадрата~~

(ω_i – окр-ть с ц. в O_i и рад. a) а) ω_1 и квадрат имели 1 общ. точку, а ω_2 и кв. не имели таковых или б) ~~ω_2 и кв.~~ имее обратное утв. для ω_2 и ω_1

~~III. При $a<2$ – 0 общ. точек.~~
~~$a=2$ – 2 общ. точки – ч.т.д.~~

III. Заметим, что случай а возможен только когда ω_1 кас. квадрата (AB) $\Rightarrow$ понятно из рисунка
$\Rightarrow a=2$; 2й случай возможен только когда ω_2 проходит через вершину квадрата $\Rightarrow$)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

иначе окр-ть перес. кв. по стороне, она также. пересечет его еще раз.

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = O_2B \\ a = O_2C \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} a = \sqrt{(-6-0)^2 + (8-6)^2} = 2\sqrt{10} \\ a = \sqrt{(-6-12)^2 + (8+6)^2} = \sqrt{324 + \cancel{286}_{196}} = \cancel{\sqrt{880}} \cdot \sqrt{520} = 2\sqrt{130} \end{array}$

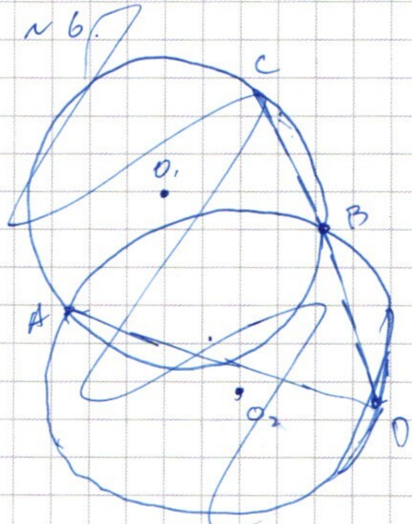
Заметим, что при $a \geq 2$ и $a \leq O_1C = \sqrt{(6-0)^2 + (8+6)^2} = \sqrt{36+196} = \sqrt{232} = 2\sqrt{58}$.

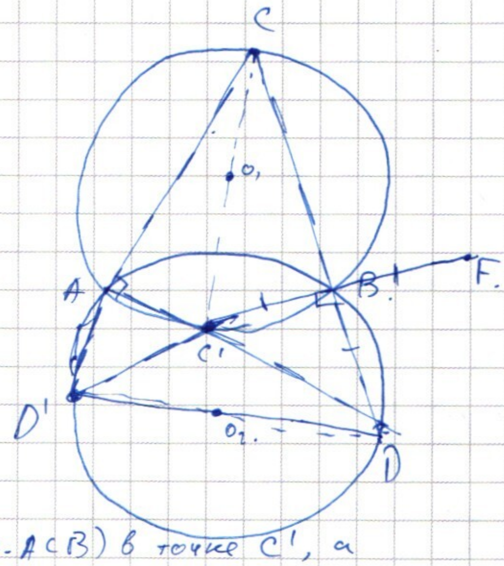
~~Заметим, что $2 < 2\sqrt{10} < 2\sqrt{58}$~~ ω_1 пересекает кв. $\geq$ в 1 точке. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ т.к. $2 < 2\sqrt{10} < 2\sqrt{58} < 2\sqrt{130} \Rightarrow$ во вт. случае $a = 2\sqrt{130}$.

Ответ: $a = 2$ или $a = 2\sqrt{130}$.

№ 6.





а) 1) Пусть AD вторично пересекает. окр-ть ω_1 (опис. ACB) в точке C', а CA окр-ть ω_2 (опис. ABD) в т. D', тогда т.к. $\angle CAD = \angle CAC' = \angle DAD' \Rightarrow DD'$ и CC' — диаметры $\Rightarrow$ прямая $\perp CD$ через точку B ~~пересечет~~ пройдет через C' и D' (диаметрально противоп. вторым конц. отр. BC и BD) $\Rightarrow$

$\Rightarrow F \in C'D'$

2) Докажем, что $\triangle D'BD = \triangle CBC'$:

- По усл. $R_1 = R_2 = 13 \Rightarrow CC' = 2R_1 = 2R_2 = DD' = 26$.
- $\angle DBD' = \angle C'BC = 90° \Rightarrow \triangle CC'B$ и $\triangle D'BB$ — прямоугольные и их гипот. $= \Rightarrow$

$\Rightarrow$ доказав, что $\angle BD'D = \angle BCC'$, мы докажем рав-во $\triangle$ (по гипотенузе и $\angle$):

- $\angle DD'B = \angle DAB = \angle C'AB = \angle C'CB$, ч. и т. д.

3) Из рав-ва Δ получаем, что $BD = BC'$; т.к. $BD = BF$ по усл., то $BC' = BF$.

4) В Δ $C'CF$ – CB является высотой и ~~биссектрисой~~ медианой. => Δ $C'CF$ – равнобед. =>

=> $C'C = CF$ => $\underline{CF = CC' = 26}$, ч.и т.д.

б) 1) Заметим, что т.к. $BD = BC' = BF$, ~~то Δ BDC' – равнобед. и прямоуг. =>~~, то по признаку прямоуг. Δ $C_1DF = 90°$ => т.к. $\angle CAD = \angle ADF = 90°$ => ~~CD~~ $CA \parallel DF$ =>

=> т.к. Δ, у которых основания совп., а вершины лежат на пр. ∥ основанию, то они равновелики => $S_{ACF} = S_{ACD}$.

2) По т. Пифагора для Δ $CC'B$: $CB = \sqrt{(CC')^2 - (BC')^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24$. =>

=> $CD = CB + BF = 24 + 10 = 34$.

3) Т.к. $BC' = BD$ и $\angle C'BD = 90°$ => $\angle C'DB = 45°$ => Δ ACD – прямоугольный равнобед.

4) $S_{ACD} = \frac{a^2}{4}$ (a = гипот. = CD) = $\frac{34^2}{4} = 17^2 = 289$

Ответ: $CF = 26$; $S_{ACF} = 289$.

№3.

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^4}{y^2} = (-x)^{\frac{\lg(-xy)}{\lg y}} \\ (2y+x)(y - (x+4)) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^4}{y^2} = (-x)^{\log_y(-xy)} \\ \left[\begin{array}{l} 2y = -x \\ y = x+4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$x < 0$, $y > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-x)^{4-1-\log_y(-x)} = y^2 \\ \left[\begin{array}{l} 2y = -x \\ y = x+4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -x = 2y \\ (2y)^{3-\log_y 2y} = y^2 \end{cases} \\ \begin{cases} y = x+4 \\ (-x)^{3-\log_y(-x)} = y^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} -x = 2y \\ 4y^2 = y^2(2y)^{\log_y 2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = 2y \\ 2 = 2^{\log_y 2} \end{cases}$$

1) $\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$

2) $2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$

Заметим, что $y > 0$ => $x < 0$ =>
($\lg y$) ($\lg -xy$)

=> ~~Решение ур~~ Решим уравнение 2): $2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$ ⇔

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\Leftrightarrow (2y+x)(y-(x+a))=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2y=-x \\ y=x+4. \end{array}\right.$ Решим уравнение 1 в двух случ.:

а) Пусть $2y=-x$, тогда.

$\left(\frac{16y^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (2y)^{\lg(2y^2)}$

$\Leftrightarrow$ извл. корень $\lg y$ степ. (т.к. $\frac{\log_a b}{\log_a c} = \log_c b$, то $\frac{\lg 2y^2}{\lg y} = \log_y 2y^2$.

$16y^2 = 2y^{\log_y 2y^2}$

$\Leftrightarrow$

$16y^2 = 2y^2 \cdot 2^{\log_y 2y^2}$.

$\Leftrightarrow$

$8 = 2^{2+\log_y 2}$

$\Leftrightarrow$

$2 = 2^{\log_y 2}$

$\Leftrightarrow$

т.к. $\log_y 2$ — $\downarrow$ ф-я $\Rightarrow$ $\exists$ к. с.з. п. в 1 т. $\Rightarrow y=2. \Rightarrow x=-4$.

б) $y=x+4$. , заметим, что т.к. $x<0$, то при уменьш. x $|x|$ будет расти, а $y=x+4$ уменьшатся, тогда:

$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$

$\Leftrightarrow$ извл. корень $\lg(-x)$ степ.

$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\log_{(-x)} y} = (-x)^{\log_{(-x)}(-xy)}$

$\Leftrightarrow$

$y^4 = y^{2\log_{(-x)} y} \cdot (-xy)$

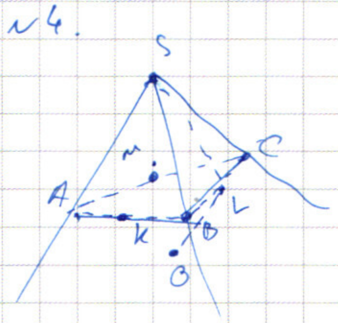
$\Leftrightarrow$

$-x = y^{3-2\log_{(-x)} y}$.

$\Leftrightarrow$

$(4-y) = y^{3-2\log_{(4-y)} y}$.

№4.



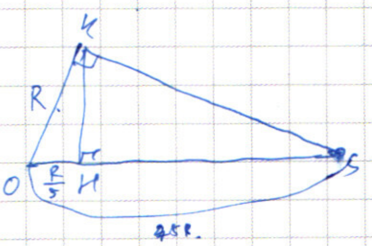
1) Заметим, что т.к. $\triangle SOL = \triangle SMO = \triangle SKO$ (по катету $= R$ и гипотен. SO) $\Rightarrow SL = SM = SK \Rightarrow$ при проекции S на (KML) S попадет в точку равноуд. ~~от~~ K, M и $L \Rightarrow$ в центр впис. окр-ти MKL (т. O аналогично тоже) $\Rightarrow$ проекции S и O на (MKL) совп. $\Rightarrow SO \perp (MKL) \Rightarrow (MKL) \parallel \alpha$ и β (α и β – пл-ти из усл.).

2) Т.к. все три пл-ти $\parallel$, то ~~они будут~~ их сечение трехгранн. с будет давать подобные $\triangle \Rightarrow$ их площади будут относ. как ~~отношение сторон~~ коэфф. под. в кв. $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ т.к. ~~стороны относ.~~ коэфф. подобия равен отнош. ~~как~~ расст. от. S до пл-тей, то пусть расст. от S до $\alpha = h \Rightarrow$ до $\beta =$ ~~2R~~ $h + 2R$.

$$\frac{h}{h+2R} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow h = \cancel{2}\,4R \Rightarrow SO = h + R = 5R.$$

3) В прямоуг. $\triangle KSO$: $OK = R$; $SO = 5R \Rightarrow \angle KSO = \arcsin\frac{OK}{SO} = \arcsin\frac{1}{5}$.

4) Найдем расст. от S до (MKL):



а) Рассм. $\triangle SKO$, т.к. $(MKL) \perp SO$, то иск. расст. будет SH

б) т.к. $\angle OKH = \angle OSK = \arcsin\frac{1}{5} \Rightarrow OH = OK \sin \angle OKH = OK \cdot \frac{1}{5} = \frac{R}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow HS = 5R - \frac{R}{5} = \frac{24}{5}R$.

5) $$\frac{S}{S_\alpha} = \frac{\frac{24}{5}R}{4R} = \frac{6}{5} \Leftrightarrow S = \frac{6}{5} S_\alpha = \frac{24}{5} = 4,8$$

Ответ: $\angle KSO = \arcsin\frac{1}{5}$; $S = 4,8$.

№7.

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases} \Rightarrow y \text{ будет существовать, когда } 85 + (3^{81}-1)x > 3^x + 4 \cdot 3^{81} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x(3^{81} - 1) - 3^x > 4 \cdot (3^{81} - 1) - 81 = 4 \cdot (3^{81} - 1) - 3^4$, пусть $f(x) = x(3^{81} - 1) - 3^x$, тогда $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) > f(4)$

$f'(x) = 3^{81} - 1 - 3^x \ln 3$, заметим, что при $x \leq 80$ $f'(x) \geq 3^{81} - 1 - 3^{80}\ln(3) = 3^{80}(3 - \ln 3) - 1 > 0$,

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

а при $x \geq 81$: $f'(x) = 3^{81} - 1 - 3^{81}(\ln 3) = 3^{81}(1 - \ln 3) - 1 < 0$

т.к. $3^{81}(1-\ln 3)$ очевидно > 1 $\left(\frac{e}{3} > e^{3^{-81}}\right)$ $(\ln 3 > 1)$.

~~т.к. при $x = 84$ $f(x) = 84(3^{81}-1) - 3^{84} = 3^{85} + 3^{82} - 84 - 3^{84} = 3^{82} \cdot 84 \cdot 2 \cdot 3^{84} + 3^{87} - 84 = \ldots 13 \cdot 3^{87} - 84 > 4 \cdot 3^{81} - 85$~~

~~$3^{82} - 84 < 4 \cdot 3^{81} - 85$.~~

~~а при $x = 83$ $f(x) = 83(3^{81}-1) - 3^{83} = 3^{8}$~~

т.к. при $x = 85$ $f(x) = 85 \cdot (3^{81}-1) - 3^{85} = 3^{85} + 4 \cdot 3^{81} - 85 - 3^{85} = 4 \cdot 3^{81} - 85 = f(4) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ т.к. $4 < 80 < 85 \Rightarrow$ при $x \in (0; 4] \cup [85; \infty)$ y не существует $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~т.к. $f(x)$ при~~ $\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81}-1)x \end{cases} \Rightarrow$ кол-во $y \in \mathbb{Z}$ при заданном $x \in \mathbb{Z}$ из $(4; 85)$

равно $85 + (3^{81}-1)x - 3^x - 4 \cdot 3^{81} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ всего пар x и y $= \sum\limits_{x=5}^{84} (3^{81}-1)x - 3^x + 85 - 4 \cdot 3^{81} =$

$= (3^{81}-1) \cdot \left(\frac{84 \cdot 85}{2} - 10\right) - (3^5 + 3^6 + \ldots + 3^{85}) + (85 - 4 \cdot 3^{81}) \cdot \left(\frac{80 \cdot 81}{2}\right) =$

$= (3^{81}-1) \cdot \left(\frac{84 \cdot 85}{2} - 10\right) - 3^5 \cdot \frac{3^{81}-1}{3-1} + (85 - 4 \cdot 3^{81}) \cdot 40 \cdot 81 =$

$= (3^{81}-1) \cdot \left(42 \cdot 85 - 10 - \frac{243}{2}\right) + (85 - 4 \cdot 3^{81}) \cdot 40 \cdot 81.$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$16875 : 25 = 675$, $675 : 25 = 27$

$5^4 \cdot 3^3$

$2y^2 - 8y + 8 - x^2 - 4x - 4$

$y > 0$, $x < 0$

$|x-6-y| + |x-6+y| = 12$

без 9: $C_8^4 \cdot C_4^3 = \frac{8!}{4!\cdot 4!} \cdot \frac{4!}{3!} \cdot 4$

с 9: $C_8^4 \cdot 4 \cdot 3 =$

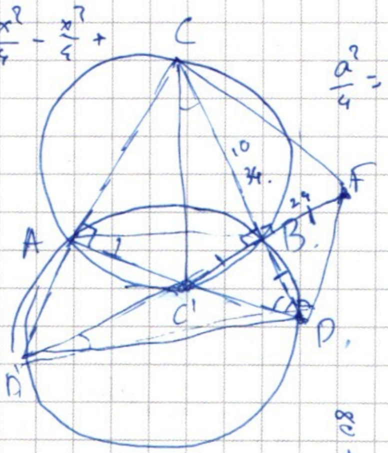
$\Sigma = C_8^4 \cdot 16$

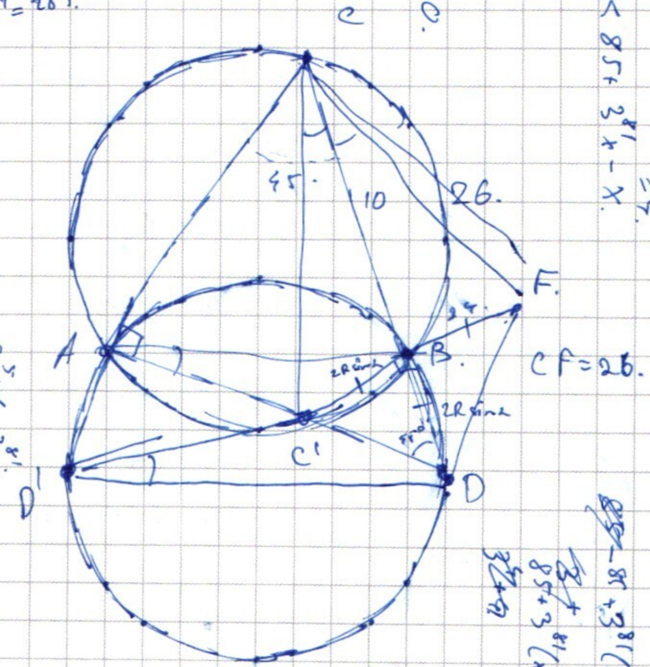
$y^2 - 8y + 16x - 16 +$

$y^2 - xy + \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{4} +$

$\frac{h}{h+2R} = \frac{2}{3}$, $3h = 2h + 4R$, $h = 4R$

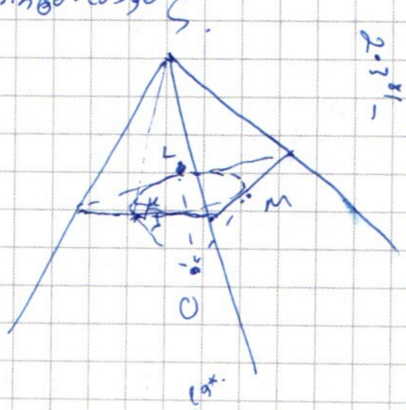
$\frac{a^2}{4} = 17^2 = 289$





$CF = 26$

$\sin 90 + \sin 30 = 2\sin 60 \cdot \cos 30$



$3^x + 4(1-3^{81}) > 3^x + x(1-3^{81})$

$y \geq 3^{81}(4 + 3^{x-81})$

$y < 85 + 3^{81}x - x$

$x < 0$ — нет

$a^x = e^{\ln a \cdot x} = \ln a \cdot x e^{\ln a \cdot x} = x a^x \ln a$

$85 + 3^{81}x - x > 3^{81}(4 + 3^{x-81})$

$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$

~~$2\cos 5x \cdot \cos 2x - \ldots = 2\sin 5x \cdot \cos 2x$~~

$\sin\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos 10x = 0$

$2\sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos 10x = 0$

$2\cos 2x(\cos 5x - \sin 5x) = -\sqrt{2}(\cos 5x - \sin 5x)(\cos 5x + \sin 5x) = 0$

$\sqrt{2}(\cos 5x - \sin 5x)(\sqrt{2}\cos 2x + \sqrt{2}\sin(5x + \frac{\pi}{4}))$

$x^{4\lg y} \cdot y^{-2\lg y} = (-x)^{\lg y} \cdot (-x)^{\lg x}$

$(-x)^{3\lg y} = y^{2\lg y} \cdot (-x)^{\lg x}$

$(-x)^{3\lg y - \lg x} = y^{2\lg y}$

$(-x)^{3\lg\frac{y}{x}} = y^{2\lg y}$

$-3 < x < -1$, $1 < y < 3$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\frac{x^2}{2} - xy + \frac{y^2}{2}$

$\frac{3}{2}y^2 - 8y$

$-\frac{3}{2}x^2 - 4x$

$2y^2 - y(x+8) - x^2 - 4x = 0$

$D = x^2 + 16x + 64 + 8x^2 + 32x =$

$= 9x^2 + 48x + 64 = (3x+8)^2.$

$y = \frac{x+8 \pm 3x+8}{4} =$

$\left[\begin{array}{l} y = x+4 \\ y = -\frac{1}{2}x \end{array}\right.$

$(y - (x+4))(2y + x) =$

1) $x = -2y$

$(16y^2)^{\lg y} = (2y)^{\lg(2y^2)}$

$y^{\lg 16y^2} = y^{4\lg 2 + \lg y^2} = (2y)^{\lg 2 + \lg y^2}.$

$y^{4\lg 2 + \lg y^2} =$

$16y^2 = 2y^{\log_y 2y^2}.$

$\frac{16y^2}{8} = 2y \cdot 2^{\log_y 2y^2}.$

$3 = \log_y 2y^2 = 2 + \log_y 2.$

$y = 2 \Rightarrow$

1) $y < x - 6.$

$y \quad 6-x$

$4 + 6 - x + x - 6 + y = 12.$

$y = 6$

$y + 6 - x - x + 6 - y = 12$

$x = 0$

$y = -\frac{1}{2}x.$

$x = -2y.$

$x \in (4; 84]$

2) $y = x + 4.$

$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} < x^{2\lg y}$

$\frac{x^4}{y^2} = (-x)^{\log_y(-xy)}.$

$x^4 = y^2 \cdot (-x) \cdot (-x)^{\log_y(-x)}.$

$-x^3 = (-x)^2$

$\frac{x^4}{y^2} = \left((-x)^{4 - 2\log_x y}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}.$

$(-x)^{4 - 2\log_x y} = (-x)^{1 + \log_y(-x)}$

$(-x)^4 = (-x)^{1 + 2t + \frac{1}{t}}.$

$(-x)^3 = (-x)^{2t + \frac{1}{t}}.$

$2t^2 - 3t + 1 = 0$

$x = -1 \Rightarrow y = 3.$

$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\log_{-x} y} = (-x)^{\log_{-x}(-xy)}.$

$y^4 = y^{2\log_{-x} y} \cdot (-xy).$

$y^3 = y^{2\log_{-x} y} \cdot (-x)$

$-x \nearrow \quad (-x) = y^{3 - 2\log_{-x} y}$

$2x - 12 = 12.$

$x = 12.$

$82 \cdot (3^{81} - 1) - 3^{81} \cdot 3.$

$81(3^{81} - 1) - 3^{81}$

$f(x) = (3^{81} - 1)x - 3^{x}.$

$a^x = e^{\ln a \cdot x} = \ln a \cdot e^x \cdot \ln a.$

$(81 + t)(3^{81} - 1) - 3 \cdot 3^{81 + t}$

$t = 5.$

$t = 6$

$(3^{81} - 1) x + 3^x \geq 4(3^{81} - 1) - 3^4.$

$(3^{81} - 1) \cdot 156 - 3^{156}$

$n \cdot 6.$

$x = 82.$

$(3^{81} - 1)x + 85 > 3^x + 4 \cdot 3^{81}.$

$f'(x) = 3^{81} - 1 - 3^x \ln 3 \geq 0.$

$x = 80.$

$x \leq 80$

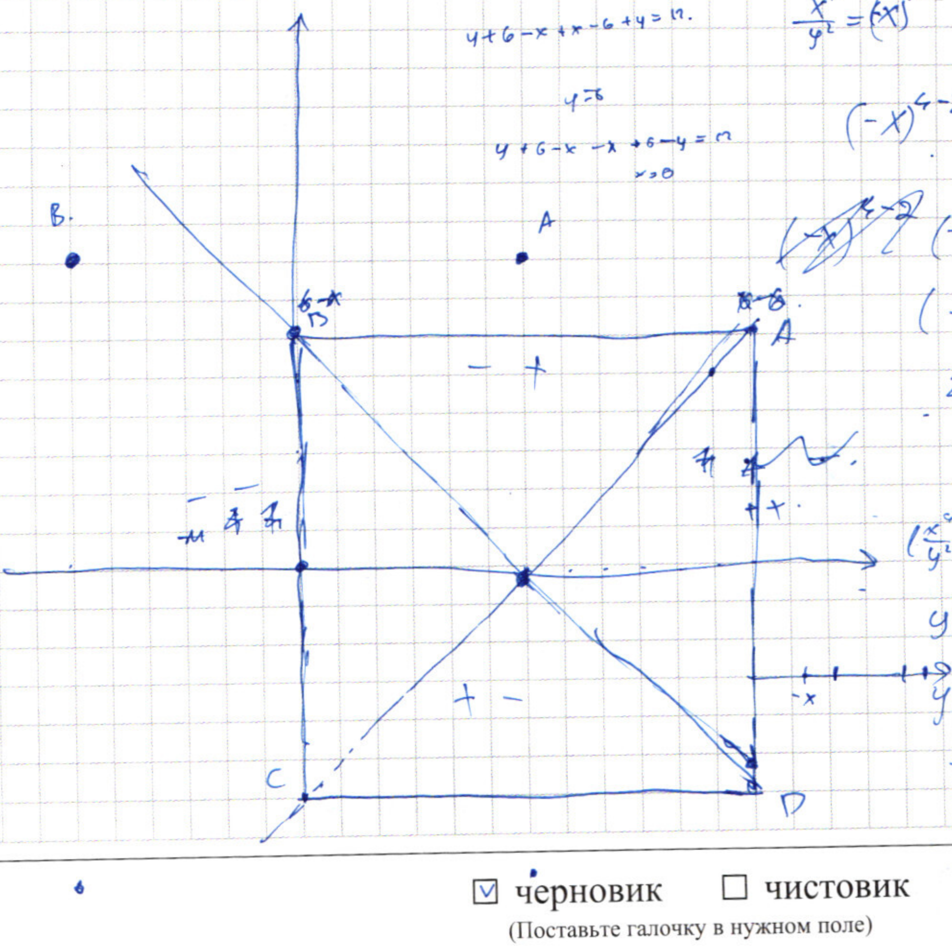
$x \leq 80$

≤ 84

$\leq 156.$

$(3^{81} - 1)x + 85 - 3^x - 4 \cdot 3^{81} =$

$(3^{81} - 1) + 85 \cdot 80 - 3^{\ldots}$



☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)