

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИС

Бланк задания должен быть вложен в |
Работы без вложенного задания не проверяются.

4. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
5. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
6. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.

8. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

9. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
10. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1.

Заметим, что $16875 = 5^4 \cdot 3^2 \Rightarrow$ т.к. $5 + x^2$, где $x \geq 2 \Rightarrow$ в исходном числе есть 4 цифры = 5 \Rightarrow произведение оставшихся 4 цифр = 27 \Rightarrow заметим, что подходит только четверки чисел 3, 3, 3, 1 и 9, 3, 11 (каноническое число надо 1, надо степень 3 = 2 вар и их произв. = 27 \Rightarrow всего 2 вар-та).

Подсчитаем кол-во чисел состоящих из набора:

a) $\{5, 5, 5, 5, 3, 3, 3, 1\} : C_8^4 \cdot C_4^3$ кол-во едн. из дер. 4 чисел выбрано 3=3
кол-во спос. выбор. 4 числа = 5.

б) $\{5, 5, 5, 5, 3, 3, 1, 1\} : C_8^4 \cdot 4 \cdot 3$
4 раз 5 9 3

В) Всего способов: $C_8^4 \cdot 4 + C_8^4 \cdot 4 \cdot 3 = C_8^4 \cdot 16 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 16 = 70 \cdot 16 = 1120$

Ответ: 1120.

№ 2.

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x.$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x - 2 \sin 5x \cdot \cos 2x - \sqrt{2}(\cos 5x - \sin 5x) = 0$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2}(\cos 5x - \sin 5x)(\cos 5x + \sin 5x) = 0.$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) \left(2 \cos 2x - 2 \sin \left(5x + \frac{\pi}{4} \right) \right) = 0.$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) \left(\cos 2x - \sin \left(5x + \frac{\pi}{4} \right) \right) = 0.$$

$$\sqrt{2} \sin \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) \left(\cos 2x - \cos \left(\frac{\pi}{4} - 5x \right) \right) = 0$$

$$\sqrt{2} \sin \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) \left(-2 \sin \left(\frac{\pi}{8} - \frac{3}{2}x \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{8} \right) \right) = 0$$

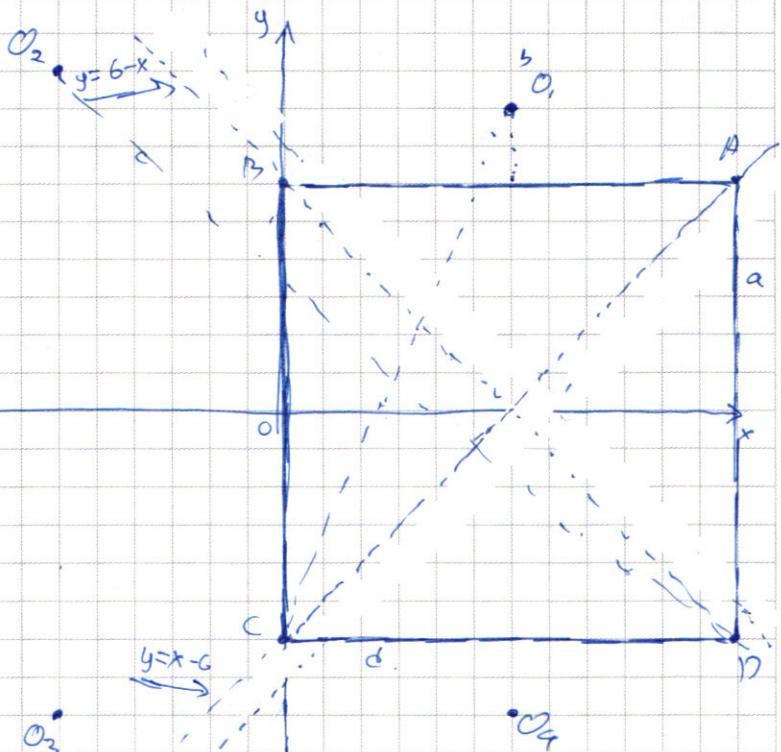
$$\begin{cases} \sin \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) = 0 \\ \sin \left(\frac{\pi}{8} - \frac{3}{2}x \right) = 0 \\ \sin \left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{8} \right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x - \frac{\pi}{4} = \pi n \\ \frac{\pi}{8} - \frac{3}{2}x = \pi k \\ \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{8} = \pi l \end{cases}$$

1, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50, 52, 54, 56, 58, 60, 62, 64, 66, 68, 70, 72, 74, 76, 78, 80, 82, 84, 86, 88, 90, 92, 94, 96, 98, 100, 102, 104, 106, 108, 110, 112, 114, 116, 118, 120, 122, 124, 126, 128, 130, 132, 134, 136, 138, 140, 142, 144, 146, 148, 150, 152, 154, 156, 158, 160, 162, 164, 166, 168, 170, 172, 174, 176, 178, 180, 182, 184, 186, 188, 190, 192, 194, 196, 198, 200, 202, 204, 206, 208, 210, 212, 214, 216, 218, 220, 222, 224, 226, 228, 230, 232, 234, 236, 238, 240, 242, 244, 246, 248, 250, 252, 254, 256, 258, 260, 262, 264, 266, 268, 270, 272, 274, 276, 278, 280, 282, 284, 286, 288, 290, 292, 294, 296, 298, 300, 302, 304, 306, 308, 310, 312, 314, 316, 318, 320, 322, 324, 326, 328, 330, 332, 334, 336, 338, 340, 342, 344, 346, 348, 350, 352, 354, 356, 358, 360, 362, 364, 366, 368, 370, 372, 374, 376, 378, 380, 382, 384, 386, 388, 390, 392, 394, 396, 398, 400, 402, 404, 406, 408, 410, 412, 414, 416, 418, 420, 422, 424, 426, 428, 430, 432, 434, 436, 438, 440, 442, 444, 446, 448, 450, 452, 454, 456, 458, 460, 462, 464, 466, 468, 470, 472, 474, 476, 478, 480, 482, 484, 486, 488, 490, 492, 494, 496, 498, 500, 502, 504, 506, 508, 510, 512, 514, 516, 518, 520, 522, 524, 526, 528, 530, 532, 534, 536, 538, 540, 542, 544, 546, 548, 550, 552, 554, 556, 558, 560, 562, 564, 566, 568, 570, 572, 574, 576, 578, 580, 582, 584, 586, 588, 590, 592, 594, 596, 598, 600, 602, 604, 606, 608, 610, 612, 614, 616, 618, 620, 622, 624, 626, 628, 630, 632, 634, 636, 638, 640, 642, 644, 646, 648, 650, 652, 654, 656, 658, 660, 662, 664, 666, 668, 670, 672, 674, 676, 678, 680, 682, 684, 686, 688, 690, 692, 694, 696, 698, 700, 702, 704, 706, 708, 710, 712, 714, 716, 718, 720, 722, 724, 726, 728, 730, 732, 734, 736, 738, 740, 742, 744, 746, 748, 750, 752, 754, 756, 758, 760, 762, 764, 766, 768, 770, 772, 774, 776, 778, 780, 782, 784, 786, 788, 790, 792, 794, 796, 798, 800, 802, 804, 806, 808, 810, 812, 814, 816, 818, 820, 822, 824, 826, 828, 830, 832, 834, 836, 838, 840, 842, 844, 846, 848, 850, 852, 854, 856, 858, 860, 862, 864, 866, 868, 870, 872, 874, 876, 878, 880, 882, 884, 886, 888, 890, 892, 894, 896, 898, 900, 902, 904, 906, 908, 910, 912, 914, 916, 918, 920, 922, 924, 926, 928, 930, 932, 934, 936, 938, 940, 942, 944, 946, 948, 950, 952, 954, 956, 958, 960, 962, 964, 966, 968, 970, 972, 974, 976, 978, 980, 982, 984, 986, 988, 990, 992, 994, 996, 998, 1000, 1002, 1004, 1006, 1008, 1010, 1012, 1014, 1016, 1018, 1020, 1022, 1024, 1026, 1028, 1030, 1032, 1034, 1036, 1038, 1040, 1042, 1044, 1046, 1048, 1050, 1052, 1054, 1056, 1058, 1060, 1062, 1064, 1066, 1068, 1070, 1072, 1074, 1076, 1078, 1080, 1082, 1084, 1086, 1088, 1090, 1092, 1094, 1096, 1098, 1100, 1102, 1104, 1106, 1108, 1110, 1112, 1114, 1116, 1118, 1120, 1122, 1124, 1126, 1128, 1130, 1132, 1134, 1136, 1138, 1140, 1142, 1144, 1146, 1148, 1150, 1152, 1154, 1156, 1158, 1160, 1162, 1164, 1166, 1168, 1170, 1172, 1174, 1176, 1178, 1180, 1182, 1184, 1186, 1188, 1190, 1192, 1194, 1196, 1198, 1200, 1202, 1204, 1206, 1208, 1210, 1212, 1214, 1216, 1218, 1220, 1222, 1224, 1226, 1228, 1230, 1232, 1234, 1236, 1238, 1240, 1242, 1244, 1246, 1248, 1250, 1252, 1254, 1256, 1258, 1260, 1262, 1264, 1266, 1268, 1270, 1272, 1274, 1276, 1278, 1280, 1282, 1284, 1286, 1288, 1290, 1292, 1294, 1296, 1298, 1300, 1302, 1304, 1306, 1308, 1310, 1312, 1314, 1316, 1318, 1320, 1322, 1324, 1326, 1328, 1330, 1332, 1334, 1336, 1338, 1340, 1342, 1344, 1346, 1348, 1350, 1352, 1354, 1356, 1358, 1360, 1362, 1364, 1366, 1368, 1370, 1372, 1374, 1376, 1378, 1380, 1382, 1384, 1386, 1388, 1390, 1392, 1394, 1396, 1398, 1400, 1402, 1404, 1406, 1408, 1410, 1412, 1414, 1416, 1418, 1420, 1422, 1424, 1426, 1428, 1430, 1432, 1434, 1436, 1438, 1440, 1442, 1444, 1446, 1448, 1450, 1452, 1454, 1456, 1458, 1460, 1462, 1464, 1466, 1468, 1470, 1472, 1474, 1476, 1478, 1480, 1482, 1484, 1486, 1488, 1490, 1492, 1494, 1496, 1498, 1500, 1502, 1504, 1506, 1508, 1510, 1512, 1514, 1516, 1518, 1520, 1522, 1524, 1526, 1528, 1530, 1532, 1534, 1536, 1538, 1540, 1542, 1544, 1546, 1548, 1550, 1552, 1554, 1556, 1558, 1560, 1562, 1564, 1566, 1568, 1570, 1572, 1574, 1576, 1578, 1580, 1582, 1584, 1586, 1588, 1590, 1592, 1594, 1596, 1598, 1600, 1602, 1604, 1606, 1608, 1610, 1612, 1614, 1616, 1618, 1620, 1622, 1624, 1626, 1628, 1630, 1632, 1634, 1636, 1638, 1640, 1642, 1644, 1646, 1648, 1650, 1652, 1654, 1656, 1658, 1660, 1662, 1664, 1666, 1668, 1670, 1672, 1674, 1676, 1678, 1680, 1682, 1684, 1686, 1688, 1690, 1692, 1694, 1696, 1698, 1700, 1702, 1704, 1706, 1708, 1710, 1712, 1714, 1716, 1718, 1720, 1722, 1724, 1726, 1728, 1730, 1732, 1734, 1736, 1738, 1740, 1742, 1744, 1746, 1748, 1750, 1752, 1754, 1756, 1758, 1760, 1762, 1764, 1766, 1768, 1770, 1772, 1774, 1776, 1778, 1780, 1782, 1784, 1786, 1788, 1790, 1792, 1794, 1796, 1798, 1800, 1802, 1804, 1806, 1808, 1810, 1812, 1814, 1816, 1818, 1820, 1822, 1824, 1826, 1828, 1830, 1832, 1834, 1836, 1838, 1840, 1842, 1844, 1846, 1848, 1850, 1852, 1854, 1856, 1858, 1860, 1862, 1864, 1866, 1868, 1870, 1872, 1874, 1876, 1878, 1880, 1882, 1884, 1886, 1888, 1890, 1892, 1894, 1896, 1898, 1900, 1902, 1904, 1906, 1908, 1910, 1912, 1914, 1916, 1918, 1920, 1922, 1924, 1926, 1928, 1930, 1932, 1934, 1936, 1938, 1940, 1942, 1944, 1946, 1948, 1950, 1952, 1954, 1956, 1958, 1960, 1962, 1964, 1966, 1968, 1970, 1972, 1974, 1976, 1978, 1980, 1982, 1984, 1986, 1988, 1990, 1992, 1994, 1996, 1998, 2000, 2002, 2004, 2006, 2008, 2010, 2012, 2014, 2016, 2018, 2020, 2022, 2024, 2026, 2028, 2030, 2032, 2034, 2036, 2038, 2040, 2042, 2044, 2046, 2048, 2050, 2052, 2054, 2056, 2058, 2060, 2062, 2064, 2066, 2068, 2070, 2072, 2074, 2076, 2078, 2080, 2082, 2084, 2086, 2088, 2090, 2092, 2094, 2096, 2098, 2100, 2102, 2104, 2106, 2108, 2110, 2112, 2114, 2116, 2118, 2120, 2122, 2124, 2126, 2128, 2130, 2132, 2134, 2136, 2138, 2140, 2142, 2144, 2146, 2148, 2150, 2152, 2154, 2156, 2158, 2160, 2162, 2164, 2166, 2168, 2170, 2172, 2174, 2176, 2178, 2180, 2182, 2184, 2186, 2188, 2190, 2192, 2194, 2196, 2198, 2200, 2202, 2204, 2206, 2208, 2210, 2212, 2214, 2216, 2218, 2220, 2222, 2224, 2226, 2228, 2230, 2232, 2234, 2236, 2238, 2240, 2242, 2244, 2246, 2248, 2250, 2252, 2254, 2256, 2258, 2260, 2262, 2264, 2266, 2268, 2270, 2272, 2274, 2276, 2278, 2280, 2282, 2284, 2286, 2288, 2290, 2292, 2294, 2296, 2298, 2300, 2302, 2304, 2306, 2308, 2310, 2312, 2314, 2316, 2318, 2320, 2322, 2324, 2326, 2328, 2330, 2332, 2334, 2336, 2338, 2340, 2342, 2344, 2346, 2348, 2350, 2352, 2354, 2356, 2358, 2360, 2362, 2364, 2366, 2368, 2370, 2372, 2374, 2376, 2378, 2380, 2382, 2384, 2386, 2388, 2390, 2392, 2394, 2396, 2398, 2400, 2402, 2404, 2406, 2408, 2410, 2412, 2414, 2416, 2418, 2420, 2422, 2424, 2426, 2428, 2430, 2432, 2434, 2436, 2438, 2440, 2442, 2444, 2446, 2448, 2450, 2452, 2454, 2456, 2458, 2460, 2462, 2464, 2466, 2468, 2470, 2472, 2474, 2476, 2478, 2480, 2482, 2484, 2486, 2488, 2490, 2492, 2494, 2496, 2498, 2500, 2502, 2504, 2506, 2508, 2510, 2512, 2514, 2516, 2518, 2520, 2522, 2524, 2526, 2528, 2530, 2532, 2534, 2536, 2538, 2540, 2542, 2544, 2546, 2548, 2550, 2552, 2554, 2556, 2558, 2560, 2562, 2564, 2566, 2568, 2570, 2572, 2574, 2576, 2578, 2580, 2582, 2584, 2586, 2588, 2590, 2592, 2594, 2596, 2598, 2600, 2602, 2604, 2606, 2608, 2610, 2612, 2614, 2616, 2618, 2620, 2622, 2624, 2626, 2628, 2630, 2632, 2634, 2636, 2638, 2640, 2642, 2644, 2646, 2648, 2650, 2652, 2654, 2656, 2658, 2660, 2662, 2664, 2666, 2668, 2670, 2672, 2674, 2676, 2678, 2680, 2682, 2684, 2686, 2688, 2690, 2692, 2694, 2696, 2698, 2700, 2702, 2704, 2706, 2708, 2710, 2712, 2714, 2716, 2718, 2720, 2722, 2724, 2726, 2728, 2730, 2732, 2734, 2736, 2738, 2740, 2742, 2744, 2746, 2748, 2750, 2752, 2754, 2756, 2758, 2760, 2762, 2764, 2766, 2768, 2770, 2772, 2774, 2776, 2778, 2780, 2782, 2784, 2786, 2788, 2790, 2792, 2794, 2796, 2798, 2800, 2802, 2804, 2806, 2808, 2810, 2812, 2814, 2816, 2818, 2820, 2822, 2824, 2826, 2828, 2830, 2832, 2834, 2836, 2838, 2840, 2842, 2844, 2846, 2848, 2850, 2852, 2854, 2856, 2858, 2860, 2862, 2864, 2866, 2868, 2870, 2872, 2874, 2876, 2878, 2880, 2882, 2884, 2886, 2888, 2890, 2892, 2894, 2896, 2898, 2900, 2902, 2904, 2906, 2908, 2910, 2912, 2914, 2916, 2918, 2920, 2922, 2924, 2926, 2928, 2930, 2932, 2934, 2936, 2938, 2940, 2942, 2944, 2946, 2948, 2950, 2952, 2954, 2956, 2958, 2960, 2962, 2964, 2966, 2968, 2970, 2972, 2974, 2976, 2978, 2980, 2982, 2984, 2986, 2988, 2990, 2992, 2994, 2996, 2998, 3000, 3002, 3004, 3006, 3008, 3010, 3012, 3014, 3016, 3018, 3020, 3022, 3024, 3026, 3028, 3030, 3032, 3034, 3036, 3038, 3040, 3042, 3044, 3046, 3048, 3050, 3052, 3054, 3056, 3058, 3060, 3062, 3064, 3066, 3068, 3070, 3072, 3074, 3076, 3078, 3080, 3082, 3084, 3086, 3088, 3090, 3092, 3094, 3096, 3098, 3100, 3102, 3104, 3106, 3108, 3110, 3112, 3114, 3116, 3118, 3120, 3122, 3124, 3126, 3128, 3130, 3132, 3134, 3136, 3138, 3140, 3142, 3144, 3146, 3148, 3150, 3152, 3154, 3156, 3158, 3160, 3162, 3164, 3166, 3168, 3170, 3172, 3174, 3176, 3178, 3180, 3182, 3184, 3186, 3188, 3190, 3192, 3194, 3196, 3198, 3200, 3202, 3204, 3206, 3208, 3210, 3212, 3214, 3216, 3218, 3220, 3222, 3224, 3226, 3228, 3230, 3232, 3234, 3236, 3238, 3240, 3242, 3244, 3246, 3248, 3250, 3252, 3254, 3256, 3258, 3260, 3262, 3264, 3266, 3268, 3270, 3272, 3274, 3276, 3278, 3280, 3282, 3284, 3286, 3288, 3290, 3292, 3294, 3296, 3298,

N 5.

$$1) \int |x-6-y| + |x-6+y| = 12.$$

$$2) \int (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a.$$



I. Решение Отметим все точки, имеющие решения ур-1) на па-ти:

Рассмотрим 4 случая:

$$a) \begin{cases} y < x-6 \\ y > 6-x \end{cases} \Rightarrow x-6-y+x-6+y=12 \\ \underline{x=12}$$

$$b) \begin{cases} y > x-6 \\ y > 6-x \end{cases} \Rightarrow y+6-x+x-6+y=12 \\ \underline{y=6}.$$

$$c) \begin{cases} y < 6-x \\ y > x-6 \end{cases} \Rightarrow -x+6+y+x+6-y=12 \\ \underline{x=0}$$

$$d) \begin{cases} y < x-6 \\ y < 6-x \end{cases} \Rightarrow x-6-y+x+6-y=12 \\ \underline{y=-6}.$$

II. Заметим, что решениям ур-2) на плоскости будут несколько точек

$M(x, y)$, это решения $M(O_1) = a$ и $M(O_2) = a$ (или $M(O_3) = a$ и $M(O_4) = a$) окр-ти с центром в

O_1, O_2, O_3, O_4 и $\text{рад} = a$. (если $M(O_i) = a$, где $M(x, y) \Rightarrow M'(x, y) \Rightarrow M'(x_i, y_i) \Rightarrow M'(O_i) = a$ из

симметрии) \Rightarrow решением системы будет точка пересечения окр-ти и квадрата.

Заметим также, что картина симметрична относительно оси $OX \Rightarrow$

\Rightarrow если окр-ть с центром $B(O_1)$ пересекает квадрат, то и $B(O_4)$ тоже (аналогично для O_2 и O_3) \Rightarrow чтобы чтобы было ровно 2 решения необходимо, чтобы:

(O_i — окр-ть с ц. в O_i и $\text{рад} = a$) а) O_i и квадрат имеют общие точки, а O_j и нет

(O_i — окр-ть с ц. в O_i и $\text{рад} = a$) б) O_i и квадрат не имеют общих точек, а O_j и есть

если искомые значения или б) O_i и квадрат не имеют общих точек, а O_j и есть

III. При $a < 2$ — 0 общ. точек.

$a = 2$ — 2 общ. точки — 4 и 7-9.

III. Заметим, что случай а возможен только когда O_1 или O_2 квадрата \Rightarrow

появление из рисунка

(AB)

$\Rightarrow a = 2$; 2-й случай возможен когда O_2 проходит через вершину квадрата \Rightarrow

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

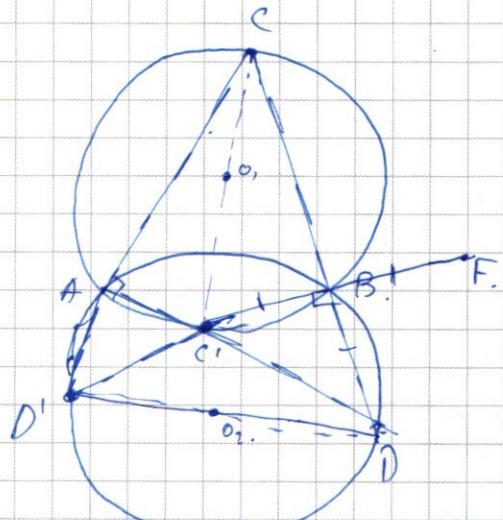
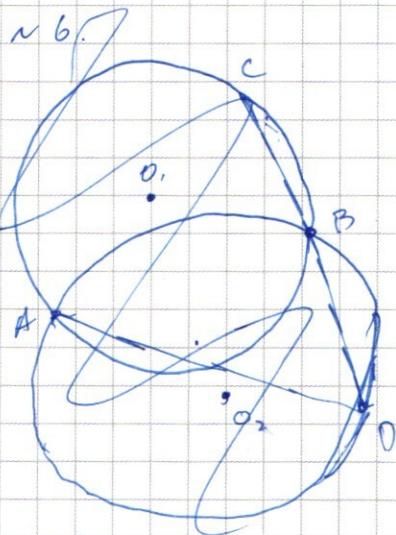
иначе окр-тб перес. кв. по сторонам, они такие. пересекет его еще раз.
 $\Rightarrow \alpha = O_2 B \Rightarrow \alpha = \sqrt{(-6-0)^2 + (8-6)^2} = 2\sqrt{10}$
 $\alpha = O_2 C \Rightarrow \alpha = \sqrt{(-6-12)^2 + (8+6)^2} = \frac{\sqrt{324+288}}{196} = \sqrt{588} \cdot \sqrt{520} = 2\sqrt{130}$

Запомним, что при $\alpha \geq 2$ и $\alpha \leq 12$ $O_1 C = \sqrt{(6-0)^2 + (8+6)^2} = \sqrt{36+196} = \sqrt{232} = 2\sqrt{58}$.

Запомним, что $2 < 2\sqrt{10} < 2\sqrt{58} < 2\sqrt{130}$ ω_1 пересекает кв. в 6 точках. \Rightarrow

\Rightarrow т.к. $2 < 2\sqrt{10} < 2\sqrt{58} < 2\sqrt{130} \Rightarrow$ в 60% случаев $\alpha = 2\sqrt{130}$.

Ответ: $\alpha = 2$ или $\alpha = 2\sqrt{130}$.



a) Пусть AD вторично пересекает окр-тб ω_1 (опис. $A(B)$) в точке C' , а

CC' окр-тб ω_2 (опис. $A(BD)$) в т. D' , тогда $\angle CAD = \angle C'DC' =$

$= \angle DAD' \Rightarrow DD' \text{ и } CC' - \text{ диаметры} \Rightarrow$ прямая $\perp CD$ через точку B пересекает пройдет через C' и D' (диаметрально противол. вороты конц. отр. BC и BD) \Rightarrow

$\Rightarrow F \in C'D'$

2) Докажем, что $\angle D'BD = \angle C'BC'$:

- Но $R_1 = R_2 = 13 \Rightarrow CC' = 2R_1 = 2R_2 = DD' = 26$.

- $\angle DBD' = \angle C'BC = 90^\circ \Rightarrow \triangle CC'B$ и $\triangle D'BB$ - прямоугольные и их гипот.

\Rightarrow доказав, что $\angle BD'D = \angle BCC'$, мы доказали равн-бо \triangle (по гипотенузе и \angle):

- $\angle DD'B = \angle DAB = \angle C'AB = \angle C'CB$, т.к. \angle - огл.

3) Угл равн. вкн и параллел., т.е. $BD = BC'$; т.е. $BD = BF$ нос. вкн., т.о. $BC' = BF$.

4) $\triangle C_1'CF$ - вкн и вкн са базой и биссектрисой. $\Rightarrow \triangle C'CF$ - равнодел.

$$\Rightarrow C'C = CF \Rightarrow CF = CC' = 26, \text{ т.к. } 9.$$

5) Заметим, что т.к. $BD = BC' \overset{BF}{=} BD$ - прямодел. (т.к. $C_1C = C_1F$), т.о. по

признаку прямогр. $\triangle C_1CD \sim \triangle ADF \Rightarrow \angle C_1CD = \angle ADF = 90^\circ \Rightarrow CD \parallel DF \Rightarrow$

\Rightarrow т.к. Δ , у которых основания \neq , а вершина лежит на пр. || основания, то они равновелики $\Rightarrow S_{ACF} = S_{ACD}$.

$$2) \text{По т. Пифагора, имея } \triangle C'B = CB = \sqrt{(CC')^2 - (BC')^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CD = CB + BF = 24 + 10 = 34.$$

3) Т.к. $BC' = BD$ и $\angle C'BD = 90^\circ \Rightarrow \angle C'DB = 45^\circ \Rightarrow \triangle ACD$ - прямогр. равнодел.

$$4) S_{ACD} = \frac{\alpha^2}{4} \cdot (\alpha = \text{гипот.} = CD) = \frac{34^2}{4} = 17^2 = 289$$

Ответ: $CF = 26$; $S_{ACF} = 289$.

№3.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{x^4}{y^2} \right)^{\log y} = (-x)^{\log(-xy)}. \\ & \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^4}{y^2} = (-x)^{\frac{\log(-xy)}{\log y}} \\ (2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0) \end{array} \right. \\ & \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^4}{y^2} = (-x)^{\frac{\log(-xy)}{\log y}} \\ (2y + x)(2y - (x + 4)) = 0. \end{array} \right. \\ & \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^4}{y^2} = (-x)^{\frac{\log(-xy)}{\log y}} \\ 2y = -x \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \frac{x^4}{y^2} = (-x)^{\frac{\log(-xy)}{\log y}} \\ y = x + 4. \end{array} \right. \\ & \left. \begin{array}{l} 2y = -x \\ y = x + 4. \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} -x = 2y \\ (2y)^{3 - \log_y 24} = y^2. \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} -x = 2y \\ y = x + 4. \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} -x = 2y \\ 2 = 2^{\log_y 2}. \end{array} \right. \\ & \left. \begin{array}{l} 2y = -x \\ y = x + 4. \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} -x = 2y \\ (2y)^{3 - \log_y (-x)} = y^2. \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$1) \left(\frac{x^4}{y^2} \right)^{\log y} = (-x)^{\log(-xy)}$$

$$2) 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

Заметим, что $y > 0 \Rightarrow x < 0 \Rightarrow$

$(\log y) \quad (\log(-xy))$

\Rightarrow Решим уравнение 2: $2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \Leftrightarrow$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\Leftrightarrow (2y + x)(y - (x + a)) = 0$$

$$\begin{cases} 2y = -x \\ y = x + a \end{cases}$$

Решим уравнение 1 в 2-х слч.:

a) Идем $2y = -x$, тогда.

$$\left(\frac{16y^4}{y^2}\right)^{\log y} = (2y)^{\log(2y^2)}$$

5. изб. корень $\log y$ слен. (т.к. $\log_a b \leq \log_c b$, т.о. $\frac{\log 2y^2}{\log y} = \log_y 2y^2$).

$$16y^2 = 2y$$

$$16y^2 = 2y^2 \cdot 2^{\log_y 2y^2}$$

$$8 = 2$$

$$2 = 2^{\log_y 2}$$

$$1 = \log_y 2$$

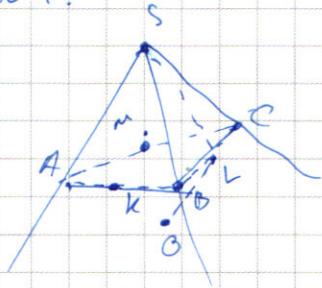
$$\text{т.к. } \log_2 2 = 1 \Rightarrow \text{п.р.} \Rightarrow \text{п.р.} \Rightarrow y=2, \Rightarrow x=-4.$$

5) $y = x + a$. Заметим, что т.о. $x < 0$, т.о. при уменьшении x $|x|$ будет расти,

а $y = x + a$ уменьшатся, тогда.

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^4}{y}\right)^{\log y} &= (-x)^{\log(-xy)} \\ &\text{5. изб. корень } \log(-xy) \text{ слен.} \\ \left(\frac{x^4}{y}\right)^{\log y} &= (-x)^{\log(-xy) + \log y} \\ y^4 &= y^{2 \log(-xy)} \cdot (-xy) \\ -x &= y^{3-2 \log(-xy)} \\ (-x)^4 &= y^{3-2 \log(-xy)} \cdot y. \end{aligned}$$

№4.



1) Заметим, что т.к. $\angle SOL = \angle SMO = \angle SKO$ (по критерiu=ю
и равенству SO) $\Rightarrow SL = SM = SK \Rightarrow$ при проекции S на (KML)

S повернёт в горизонте равно $90^\circ - \alpha$ K, M и L \Rightarrow в центре вписи.

окр-ти MKL (т.д. аналогична горизонтали) \Rightarrow проекция S на O или
 (MKL) симметрична $\Rightarrow SO \perp (MKL) \Rightarrow (MKL) \parallel \text{лини} \beta$ (лини β - ли-ти из ус. Г.)

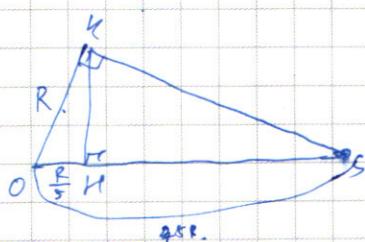
2) Т.к. все три ли-ти \parallel , то ~~если~~ \Rightarrow их сечение трехгранника будет
треугольником $\Delta \Rightarrow$ их высота будет относ. как $\frac{\text{кофр-под-}}{\text{кофр-под-расст.}}$ в кв. \Rightarrow
кофр-под-расст. относ. \Rightarrow расст. от S до ли-тий, то пусть расст.

$$\text{от } S \text{ до } \alpha = h \Rightarrow g_0 \beta = h + 2R.$$

$$\frac{h}{h+2R} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow h = 2R \Rightarrow SO = h + R = 5R.$$

$$3) \beta \text{ проекцией } \triangle KSO : OK = R; SO = 5R \Rightarrow \angle KSO = \arcsin \frac{OK}{SO} = \arcsin \frac{1}{5}.$$

4) Наибольшее расст. от S до (MKL) :



a) Рассмотрим $\triangle SKO$, т.к. $(MKL) \perp SO$, то каск. расст. будет SK

$$\delta) \text{ т.к. } \angle OKH = \angle OSK = \arcsin \frac{1}{5} \Rightarrow OK = OS \sin \angle OKH = OK \cdot \frac{1}{5} = \frac{R}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{расст. } S = 5R - \frac{R}{5} = \frac{24}{5}R.$$

б)

$$5) \frac{S}{S_{\perp}} = \frac{\frac{24}{5}R}{\frac{24}{25}R} = \frac{25}{24} \Leftrightarrow S = \frac{25}{24} S_{\perp} = \frac{24}{5} = 4,8$$

Ответ: $\angle KSO = \arcsin \frac{1}{5}$; $S = 4,8$.

№5-

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81}-1)x \end{cases}$$

\Rightarrow у будет существоовать, когда $85 + (3^{81}-1)x > 3^x + 4 \cdot 3^{81}$ (\Rightarrow)

$$y < 85 + (3^{81}-1)x$$

$$\Leftrightarrow x(3^{81}-1) - 3^x > 4 \cdot (3^{81}-1) - 81 = 4 \cdot (3^{81}-1) - 3^x, \text{ н.т. } f(x) = x(3^{81}-1) - 3^x, \text{ т.к. } f'(x) =$$

$$\Leftrightarrow f(x) > f(8)$$

$$f'(x) = 3^{81}-1 - 3^x \ln 3, \text{ заметим, что при } x \leq 80 \quad f'(x) \geq 3^{81}-1 - 3^{80} \ln 3 = 3^{80}(3 \ln 3) - 1 > 0,$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

а при $x \geq 81$: $f'(x) = 3^{81} - 1 - 3^{81}(\ln 3) \approx 3^{81}(1 - \ln 3) - 1 < 0$

- т.к. $3^{81}(1 - \ln 3)$ отрицательно > 1 $\left(\frac{e^4}{3} > e^3\right) \Rightarrow (\ln 3 > 1)$

т.к. при $x = 84$ $f(x) = 84(3^{81}-1) - 3^{84} = 3^{85} + 3^{82} - 84 - 3^{84} = 3^{85} - 84 - 3^{84} = 63 \cdot 13 - 3^{82} - 84 > 6 \cdot 3^{81} - 85$

а при $x = 83$ $f(x) = 83(3^{81}-1) - 3^{83} = 3^{82}$

т.к. при $x = 85$ $f(x) = 85(3^{81}-1) - 3^{85} = 3^{85} + 8 \cdot 3^{81} - 85 - 3^{85} = 8 \cdot 3^{81} - 85 = f(81) =$

\Rightarrow т.к. $4 < 80 < 85 \Rightarrow$ при $x \in (4, 85)$ у нее существует \exists

\Rightarrow т.к. $f(x)$ непрерывна $\begin{cases} y \geq 3^{81} + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81}-1)x \end{cases} \Rightarrow$ как-то y при заданном x из $(4, 85)$

равно $85 + (3^{81}-1)x - 3^x = 4 \cdot 3^{81} \Leftrightarrow$

\Rightarrow первого пары x и $y = \sum_{x=5}^{84} (3^{81}-1)x - 3^x + 85 - 4 \cdot 3^{81} =$
 $= (3^{81}-1) \cdot \left(\frac{84+85}{2} - 10\right) - (3^5 + 3^6 + \dots + 3^{85}) + (85 - 4 \cdot 3^{81}) \cdot \left(\frac{80+81}{2}\right) =$
 $= (3^{81}-1) \cdot \left(\frac{84+85}{2} - 10\right) - 3^5 \cdot \frac{3^{81}-1}{3-1} + (85 - 4 \cdot 3^{81}) \cdot 40 \cdot 81 =$
 $= (3^{81}-1) \cdot (42 \cdot 85 - 10 - \frac{243}{2}) + (85 - 4 \cdot 3^{81}) \cdot 40 \cdot 81.$

$$(3^{x_1} - 1) \cdot 156 - 3^{x_2}$$

$x_2 = 6.$

$$(3^{x_1} - 1)x + 85 > 3^x + 4 - 3^{x_1}$$

$x = 82 -$

$$f'(x) = 3^{x_1} - 1 - \frac{3^x}{3} \cdot \ln 3 > 0.$$

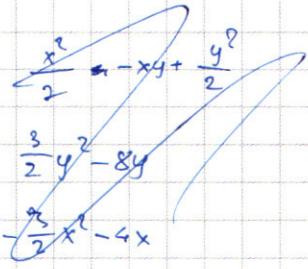
$$x < 80.$$

$$(3^{x_1} - 1)x + 85 - 3^x - 4 + 3^{x_1} = 156.$$

$x = -1 \Rightarrow y = 3 -$

$$\frac{82+85}{2} (3^{x_1} - 1) + 85 - 80 =$$

$= 156.$



$$2y^2 - y(x+8) - x^2 - 4x = 0$$

$$D = x^2 + 16x + 64 + 8x^2 + 32x =$$

$$= 9x^2 + 48x + 64 = (3x+8)^2.$$

$$y = \frac{x+8 \pm 3x+8}{4} = \frac{4x+16}{4} = x+4.$$

$$\begin{cases} y = x+4 \\ y = -\frac{1}{2}x \end{cases}$$

$$\alpha^x = e^{\ln a \cdot x} = \ln a \cdot e^{\ln a \cdot x}$$

$$82+3^{x_1}-1-3^{x_2} \cdot f'(x_2) = \frac{81}{3} \cdot 3^{x_1} - 3^{x_2}$$

$$81(3^{x_1}-1) - 3^{x_2}$$

$$(y_2 - (x+4))^2 (2y+4) =$$

$$18) y = x+4.$$

$$1) x = -2y$$

$$(16y^2) \log y = (2y) \log(2y^2)$$

$$y \log 16y^2 = y \log 2 + \log y^2 = (2y) \log 2 + \log y^2.$$

$$y \log 2 + \log y^2 =$$

$$16y^2 = 2y \log 2y^2.$$

$$16y^2 = 2y^2 \cdot 2^{\log 2y^2}.$$

$$8) 3 = \log_2 2y^2 = 2 + \log_2 2.$$

$$1) y < x-6.$$

$$y = 2 \Rightarrow$$

$$y+6-x+x-6+4=11.$$

$$y=6$$

$$y+6-x-x+6-4=11$$

$$x=0$$

$$y = -\frac{1}{2}x.$$

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x \\ y = x+4 \end{cases}$$

$$x = -2y.$$

$$2x - 12 = 12.$$

$$x = 12.$$

$$2) y = x+4.$$

$$(y > x)$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{\log y} < x^{\log y}$$

$$x < 4,$$

$$\frac{x^4}{y^2} = (-x)^{\log_y(-xy)}.$$

$$x^4 = y^2 \cdot (-x) \cdot (-x)^{\log_y(-xy)}.$$

$$-x^3 = y^2(-x)^2$$

$$\frac{x^4}{y^2} = (xy)^{t-2\log_y y} = (-x)^{\log(-xy)}.$$

$$(-x)^{4-t\log_y y} = (-x)^{4+\log_y(-xy)}$$

$$(-x)^4 = (-x)^{1+2t+\frac{1}{2}}.$$

$$(-x)^3 = (-x)^{2t+\frac{1}{2}}.$$

$$2t^2 - 3t + 1 = 0$$

$$x = -1 \Rightarrow y = 3 - \frac{82+85}{2} (3^{x_1} - 1) + 85 - 80 =$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{\log_y y} = (-x)^{\log_y(-xy)}.$$

$$y^4 = y^2 \log_y y \cdot (-xy).$$

$$y^3 = y^2 \log_y y \cdot (-x)$$

$$-x \Rightarrow (-x)^3 = y^3 - 2 \log_y y \cdot y$$

14

$$y < 6-x$$

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14

14