

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР _

Бланк задания должен быть вложен в работ
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

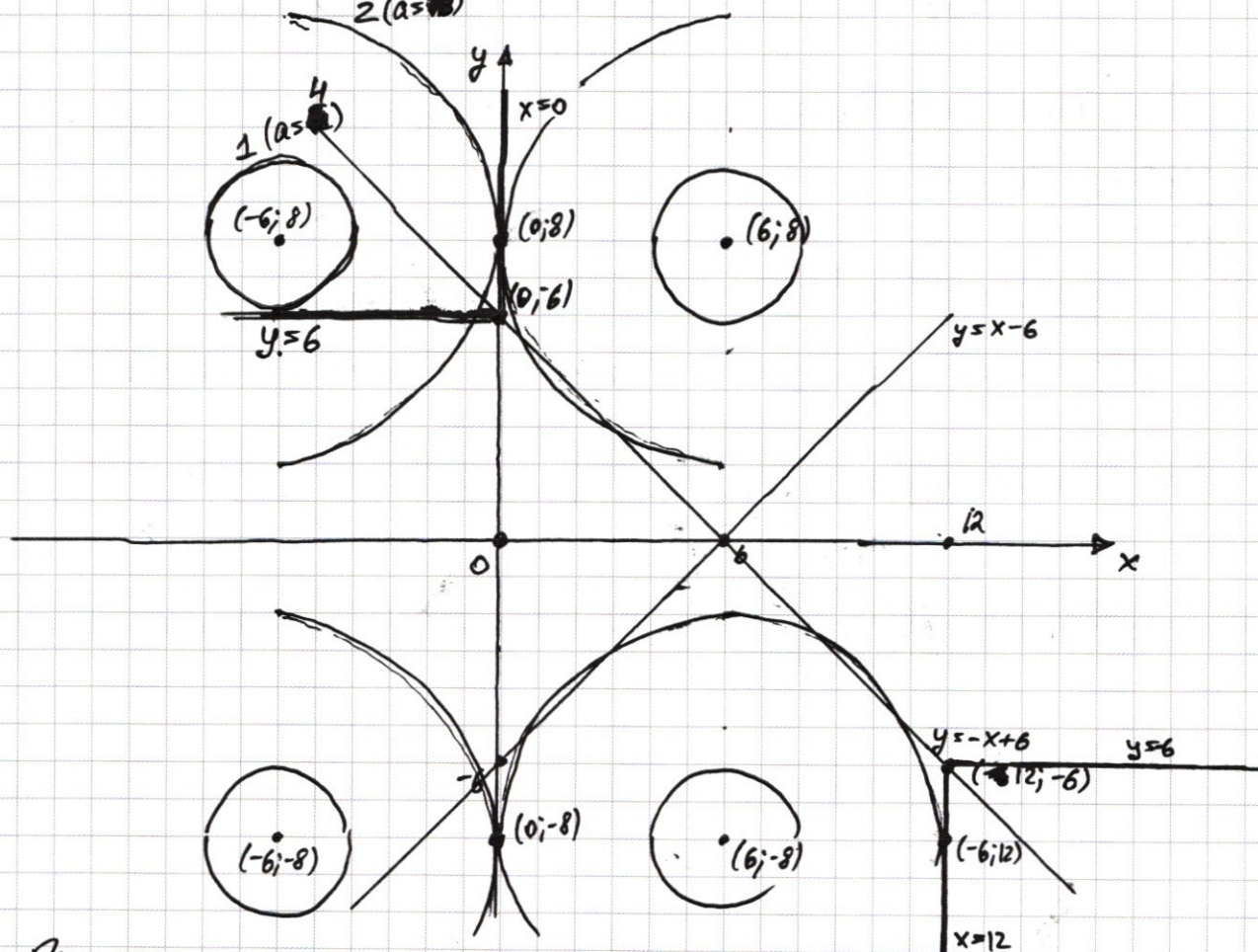
$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5
$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 & (1) \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a & (2) \end{cases} \quad \text{— 2 рещ, а-?}$$

(1): 1ый модуль обнуляется при $y \leq x-6$
2ой — при $y \geq 6-x$



• При $y \leq x-6, y \geq 6-x$, модули раскроются с плюсом, получим:

$$2x - 12 = 12, x = 12.$$

• При $y \geq -x+6, y \leq x-6$:

$$x - 6 - y - x + 6 - y = 12$$

$$2y = -12, y = -6$$

Аналогично, при $y \geq x-6, y \geq -x-6$; $6+y-x-x+6-y=12$

$$2x = 0$$

$$x = 0$$

и при $y \leq -x+6, y \geq x-6: y \leq 6$.

(2): — 4 окружности с центрами в $(6;8), (-6;8), (-6;-8);$
 $(6;-8)$ и ~~и~~ $(a;0) (a \geq 0)$
и ограничены осями координат. $a \leq R^2$

~~Можно~~

1) Нам подходят ~~и~~ $4 < a < 36$

При $a < 4$, 0 реш.

При $a > 36$, 1 решение на оси x (между I и II ^{полу}пл-тями) ^{вошли точки $(0;8)$.}
и еще 2 решения в IV ^{полу}пл-ти. $\frac{1}{2}$.
итого: 3 реш.

И.е. нам подходят только: $a \in (4;36)$.

Ответ: $(4;36)$.

(N1) $16875 = 5^4 \cdot 3^3 \cdot 1$ — всего 8 множителей.

И.е. надо разместить в цифр на 8 мест ~~без повторений~~ без повторов:

Это можно сделать: $\frac{8!}{3! \cdot 4!}$ способами.

$$\frac{8!}{4! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} = 8 \cdot 7 \cdot 5 = 280 \text{ способами.}$$

Ответ: 280.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\textcircled{N3} \quad \begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} & (1) \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (2): \quad & 4y^2 - 2xy - 2x^2 - 8x - 16y = 0 \\ & (y-x)^2 + 3y^2 - 3x^2 - 8x - 16y = 0 \\ & (y-x)(y-x) + 3(y-x)(y+x) - 8(x+2y) = 0 \\ & (y-x)(y-x+3(y+x)) - 8(x+2y) = 0 \\ & (y-x)(4y+2x) - 8(x+2y) = 0 \\ & 2(y-x)(2y+x) - 8(2y+x) = 0 \\ & (2y+x)(2(y-x)-8) = 0 \\ & (2y+x)(2y-2x-8) = 0 \\ & \begin{cases} 2y = -x \\ 2y = 2x+8 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -x/2 \\ y = x+4 \end{cases} \end{aligned}$$

$$(1): \quad \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \Rightarrow y > 0, x < 0$$

$$\lg\left(\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y}\right) = \lg((-x)^{\lg(-xy)})$$

$$\lg y (\lg x^4 - \lg y^2) = \lg(-x) \lg(-xy)$$

$$\lg y (4\lg(-x) - 2\lg y) = \lg(-x)(\lg y + \lg(-x))$$

$$4\lg(-x)\lg y - 2\lg^2 y = \lg(-x)\lg y + \lg^2(-x)$$

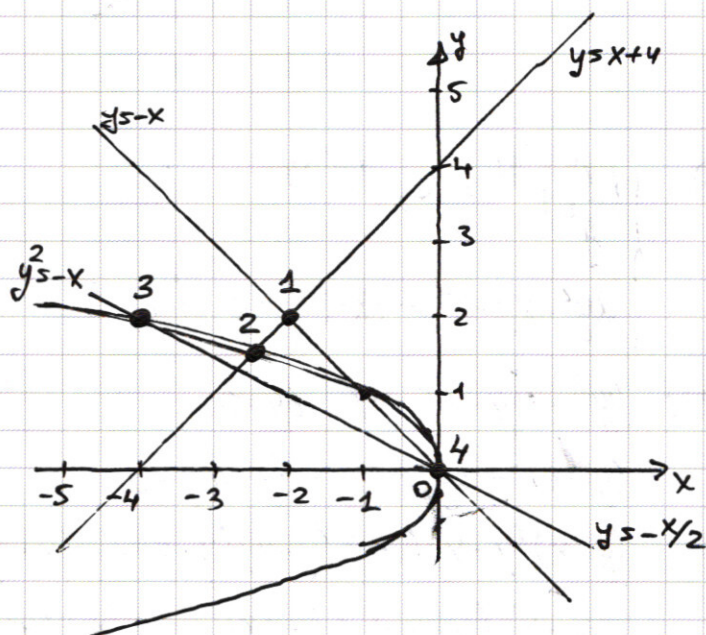
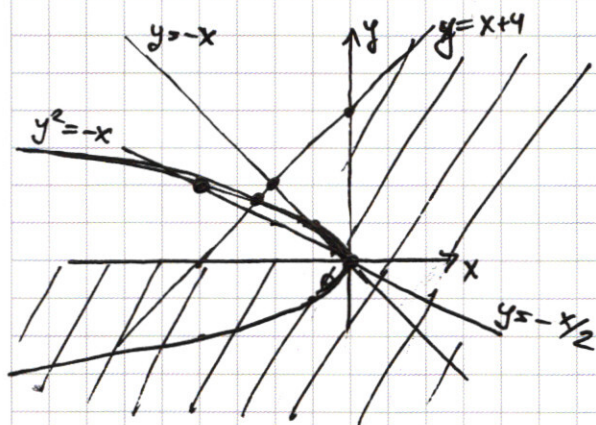
$$2\lg^2 y - 3\lg(-x)\lg y + \lg^2(-x) = 0$$

$$(2\lg y - \lg(-x))(2\lg y - \lg(-x)) = 0$$

$$\begin{cases} 2\lg y = \lg(-x) \\ \lg y = \lg(-x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lg y^2 = \lg(-x) \\ \lg y = \lg(-x) \end{cases} \begin{cases} y^2 = -x \\ y = -x \end{cases}$$

$$(x < 0, y > 0)$$



Точки ~~находятся~~ лежат на пересечении прямой и кривой/параболы.

$$\begin{aligned} (1) 1: (y = x + 4 \cap y = -x) \\ 2x = -4 \\ \boxed{x = -2, y = 2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) 3, 4: (y = -x/2 \cap y^2 = -x) \\ \frac{x^2}{4} = -x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1) 4: \begin{cases} x = 0 \\ x = -4 \end{cases} \begin{cases} x = 0, y = 0 \\ x = -4, y = 2 \end{cases} \text{ не подходит} \end{aligned}$$

$$(1) 2: y = x + 4 \cap y^2 = -x$$

$$x^2 + 8x + 16 = -x$$

$$x^2 + 9x + 16 = 0$$

$$D = 81 - 64 = 17$$

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\text{При } x = \frac{-9 - \sqrt{17}}{2}, y < 0$$

$$(y = \frac{-9 - \sqrt{17}}{2} + 4 = (\sqrt{17} - 1) \cdot \frac{1}{2})$$

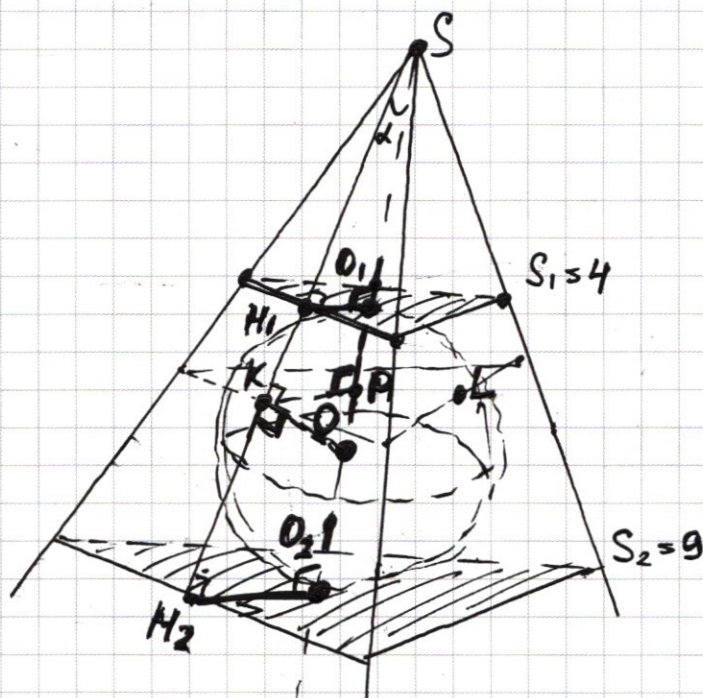
$$\text{Подходит } \boxed{x = \frac{-9 + \sqrt{17}}{2}, y = \frac{\sqrt{17} - 1}{2}}$$

$$(-2; 2) \text{ и } (-4; 2); (\frac{-9 + \sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17} - 1}{2})$$

$$\text{ОТВЕТ: } (-4; 2); (\frac{-9 + \sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17} - 1}{2}); (-2; 2)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(24)



Дано:

- сфера вписана в трехгр. L_{α}
- $S_1 = 4, S_2 = 9$
($d_{S_1} \perp SO; d_{S_2} \perp SO$)
 d_{S_1} кас ω, d_{S_2} кас ω .

а) $\angle KSO$ - ?

б) $S_{\Delta KLM}$ - ?

(K, L, M - точки кас. ω и трехгр. L_{α})

в) $\angle SKO$: $SO \perp d_{S_2}, d_{S_1}$
 $K \in SH_2$

по Теореме о 3 перп
точки M_1, O_1, K, O, O_2, H_2
лежат в 1 пл-ти

Тогда рассмотрим
эту пл-ть:

1) в кел: $\frac{SO_1}{SO_2} = k; k^2 = \frac{S_1}{S_2}; k^2 = \frac{4}{9}; k = \frac{2}{3}$.

$\frac{SO_1}{SO_1 + 2R} = \frac{2}{3}; 3SO_1 = 2SO_1 + 4R; \boxed{SO_1 = 4R}$

2) $SO_1 M_1 \sim \Delta SKO$

$\cos \alpha = \frac{SO_1}{SM_1} = \frac{SK}{SO}; \boxed{SO = R + SO_1 = 5R}; \boxed{SK = \sqrt{SO^2 - R^2} =}$

$\cos \alpha = \frac{2\sqrt{6}R}{5R} = \frac{2}{5}\sqrt{6}$

$\alpha = \arccos\left(\frac{2}{5}\sqrt{6}\right)$

$= \sqrt{SO_1^2 + 2RSO_1} =$
 $= \sqrt{16R^2 + 8R^2} =$
 $= \sqrt{24}R = \boxed{2\sqrt{6}R}$

$$\delta) K \perp SO_1, K \in (KML), KP \cap SO = P.$$

$$\text{Взгн } \Delta KSP \sim \Delta M_1SO_1$$

$$\frac{KP}{M_1O_1} = \frac{KS}{M_1S} = \frac{SP}{SO_1} = f \quad \frac{S_{\text{кр. KLM}}}{S_1} = f^2$$

$$\left(\begin{aligned} \frac{SP}{SK} &= \frac{SO}{SK} \\ SP &= \frac{SK^2}{SO} = \frac{24R^2}{5R} = \frac{24}{5}R \end{aligned} \right) \quad \frac{SP}{SK} = \cos \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}; \quad SK = 2\sqrt{6}R$$

$$SP = \frac{2\sqrt{6}}{5} \cdot 2\sqrt{6}R = \frac{24}{5}R.$$

$$SO_1 = 4R.$$

$$f = \frac{SP}{SO_1} = \frac{24R}{5 \cdot 4R} = \frac{24}{20} = \frac{12}{10} = 1,2$$

$$S_{\text{кр. KLM}} = S_1 \cdot f^2 = 4 \cdot (1,2)^2 = 4 \cdot 1,44 = 5,76.$$

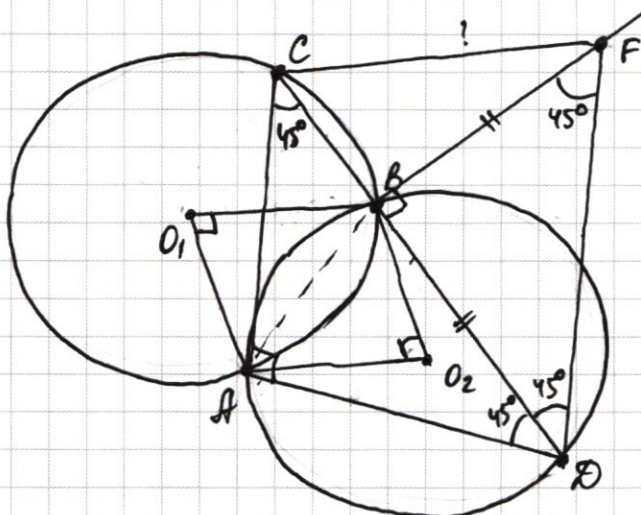
$$\text{Ответ: а) } \arccos\left(\frac{2\sqrt{6}}{5}\right); \text{ б) } 5,76.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

Дано:
 $\omega_1 = \omega_2$
 $(R = 13)$
 $\omega_1 \cap \omega_2 = A, B$
 $C \in \omega_1$
 $\angle CAD = 90^\circ$
 $FB \perp CD$
 $BF = BD$

- а) $CF = ?$
 б) $BC = 10$, $S_{\triangle ACF} = ?$



$\angle A B \omega_1 = \angle A B \omega_2$, т.к. $\omega_1 = \omega_2$ и хорда AB общая.

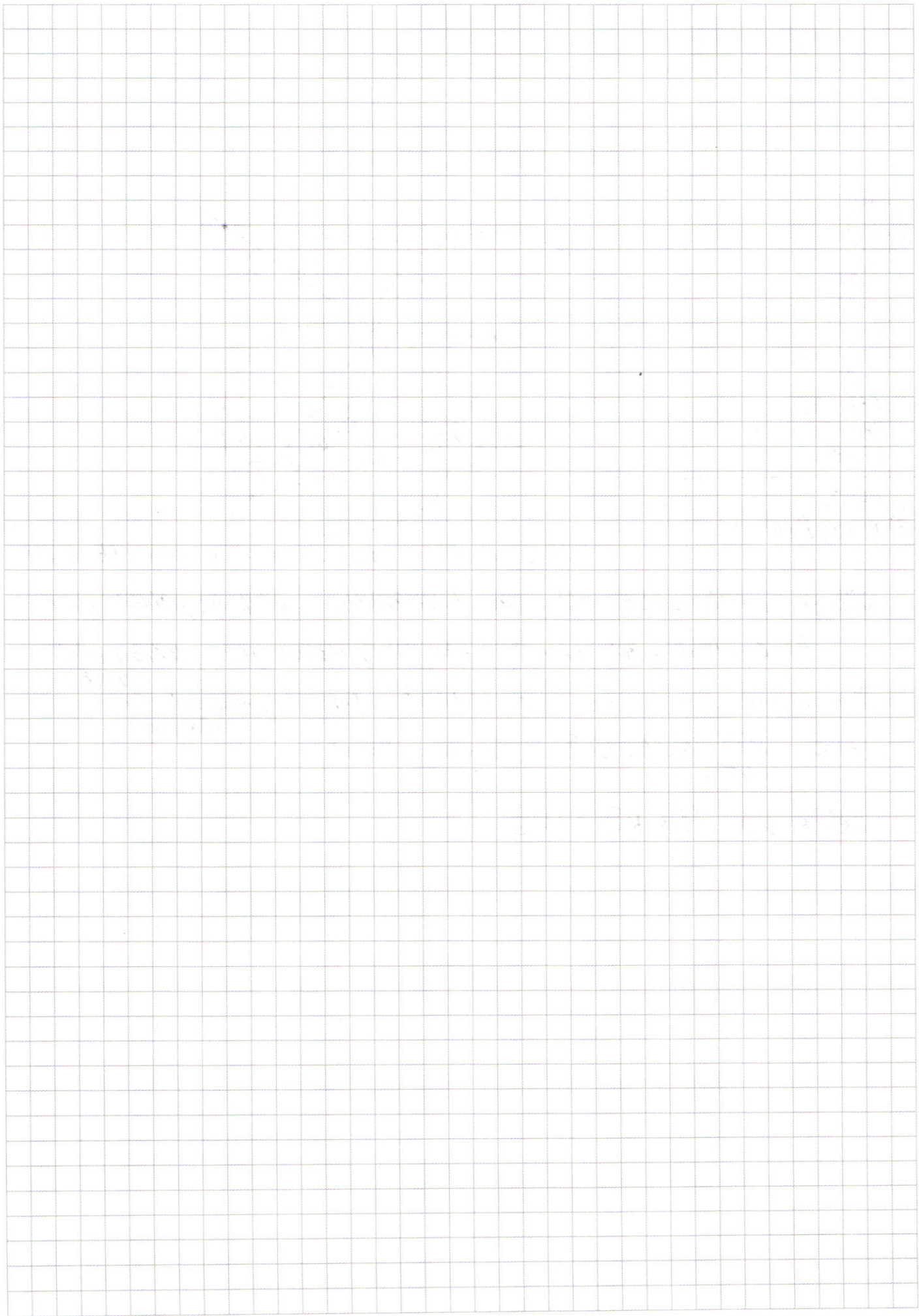
Тогда $\angle ACB = \angle ADB = 45^\circ$, как. вписанные и опир. на равные дуги.

$\angle AO_2B = \angle AO_1B = 90^\circ$ ($2 \cdot 45^\circ$), как. центральные для $\angle ADB$ и $\angle ACB$

Т.к. $\omega_1 = \omega_2$, т.е. $R_1 = R_2 = R$, то O_1AO_2B — ромб с углом 90° , т.е. ^{соств.} квадрат.

$\angle BFD = \angle BDF$ (в $\triangle BFD$ с FD -осн, $\angle B = 90^\circ$)
 $(= 45^\circ)$

~~$AB = R\sqrt{2}$~~ $AB = R\sqrt{2} = 13\sqrt{2}$



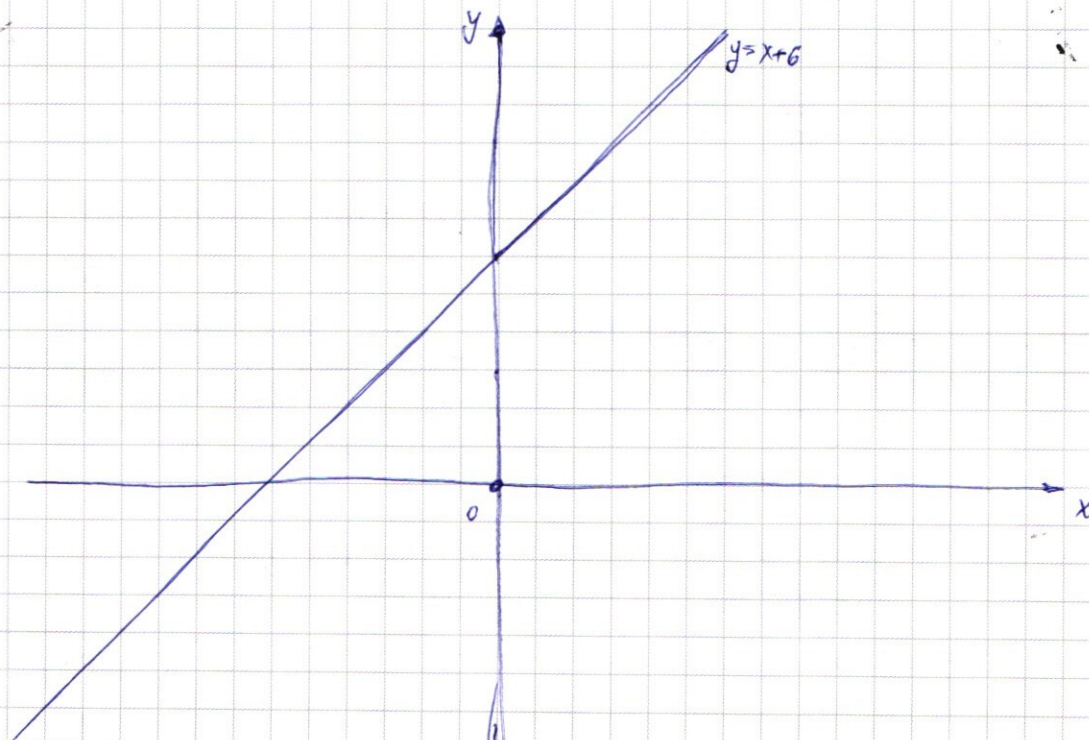
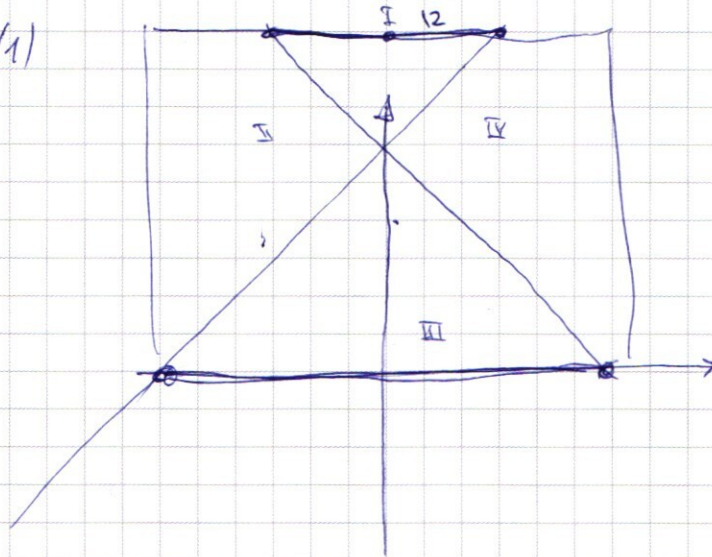
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned} y &= x-6 & y &= 6-x \\ |x-6-y| + |x-6+y| &= 12 & (1) \\ (x-6-y)^2 + (y-6-x)^2 &= 9 \end{aligned}$$

(1):

$$\begin{aligned} y &= 6+x \\ y &= x-6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x-12 &= 12 \\ 2x &= 24 \\ x &= 12 \\ -2x+12 &= 12 \\ -2x &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$



$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$a - \sqrt{2}ab + b = c - \sqrt{2}cd + d$$

$$\sqrt{2}(ab - cd) = a + b - c - d$$

$\cos 77^\circ \cos 3^\circ \sin 77^\circ \sin 3^\circ$

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

② $4y^2 - 2xy - 2x^2 - 8x - 8y = 8y$

$$(y-x)^2 + 3(y^2 - x^2) - 8(x+y) = 8y$$

$$(y-x)(y-x) + 3(y-x)(y+x) - 8(x+y) = 8y$$

$$(y-x)(y-x+3y+3x) = 8(x+y) + 8y$$

$$(y-x)(4y+2x) = 16y+8x$$

$$2(y-x)(2y+x) = 8(2y+x)$$

$$\begin{cases} 2y+x=0 \\ y-x=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -x/2 \\ y = x+4 \end{cases}$$

① $\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$ (ОДЗ: ...)

$$(\lg x^4 - \lg y^2) \lg y = \lg(-xy) \lg(-x)$$

$$(4\lg(-x) - 2\lg y) \lg y = (\lg(-x) + \lg y) \lg(-x)$$

$$4\lg(-x) \lg y - 2\lg^2 y = \lg^2(-x) + \lg(y) \lg(-x)$$

$$2\lg^2 y - 3\lg(-x) \lg y + \lg^2(-x) = 0$$

$$(2\lg y - \lg(-x))(\lg y - \lg(-x)) = 0$$

$$\begin{cases} 2\lg y = \lg(-x) \rightarrow y^2 = -x \\ \lg y = \lg(-x) \rightarrow y = -x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 = -x \\ y = -x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 = -x \\ y = -x \end{cases}$$

$$\lg y \lg \frac{x^4}{y^2} = \lg(-xy) \lg(-x)$$

$$\lg y (\lg x^4 - \lg y^2) = (\lg(-x) + \lg y) \lg(-x)$$

$$\lg y (4\lg(-x) - 2\lg y) = (\lg(-x) + \lg y) \lg(-x)$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$4y^2 - 2xy - 2x^2 - 8x - 16y = 0$$

$$(x-y)^2 + 3y^2 - 3x^2 = 8x + 16y$$

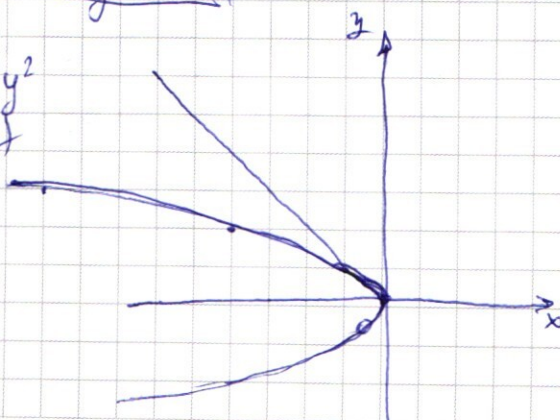
$$(x-y)^2 + 3(y^2 - x^2) = 8(x+2y)$$

$$(x-y)(x-y) + 3\frac{x-y}{y+x}(x+y) = 8(x+2y)$$

$$(x-y)(x-y - 3(x+y)) = 8(x+2y)$$

$$(x-y)(-3y-2x-4) = 8(x+2y)$$

$$\begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \end{cases}$$



$$\begin{array}{r}
 16875 \\
 -15 \\
 \hline
 18 \\
 -15 \\
 \hline
 37 \\
 -35 \\
 \hline
 25
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 3375 \\
 -30 \\
 \hline
 37 \\
 -35 \\
 \hline
 25
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 675 \\
 -60 \\
 \hline
 17 \\
 -15 \\
 \hline
 25
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 135 \\
 -120 \\
 \hline
 15 \\
 -15 \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 25 \\
 -25 \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 25 \\
 -25 \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 25 \\
 -25 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

$$5^4 \cdot 3^3 \cdot 1^1 = 8.$$

$$5^4 \cdot 3^3 \cdot 1^1$$

$$\begin{array}{r}
 25 \\
 -25 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

$$8$$

$$\begin{array}{r}
 13 \\
 625 \\
 \times 27 \\
 \hline
 4375 \\
 +1250 \\
 \hline
 16875
 \end{array}$$

$$5$$

$$\begin{aligned}
 \alpha + \beta &= 14x \\
 \alpha - \beta &= 6x \\
 2\alpha &= 20x \Rightarrow \alpha = 10x \\
 \beta &= 4x
 \end{aligned}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\cos \alpha - \cos \beta}{-2} &= \sin 7x \sin 3x \\
 \alpha + \beta &= 14x \quad \alpha - \beta = 6x \\
 \alpha &= 10x, \beta = 4x
 \end{aligned}$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$\cos 5x \cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 10x = \sin 5x \cos 2x$$

$$\cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 10x$$

$$\cos(7x + 3x) =$$

$$\sin(7x + 3x) = \sin 7x \cos 3x + \cos 7x \sin 3x$$

$$\frac{\cos 7x + \cos 3x}{\sqrt{2}} - \cos 7x \cos 3x + \sin 7x \sin 3x = \frac{\sin 7x + \sin 3x}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{a+b}{\sqrt{2}} - ab + cd = \frac{c+d}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 7x - \sqrt{2} \cos 7x \cos 3x + \cos 3x = \sin 7x - \sqrt{2} \sin 7x \sin 3x + \sin 3x$$

$$a - \sqrt{2}ab + b = c - \sqrt{2}cd + d$$

$$\cos 7x \cos 3x = \frac{\cos 10x + \cos 4x}{2}$$

$$\sin 7x \sin 3x = \frac{\cos 4x - \cos 10x}{2}$$

$$\cos 7x - \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 10x + \cos 4x) + \cos 3x = \sin 7x + \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 10x - \cos 4x) + \sin 3x$$

$$\cos 7x - \frac{\sqrt{2}}{2}$$



черновик



чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81}$
 $y \leq 85 + (3^{81} - 1)x$

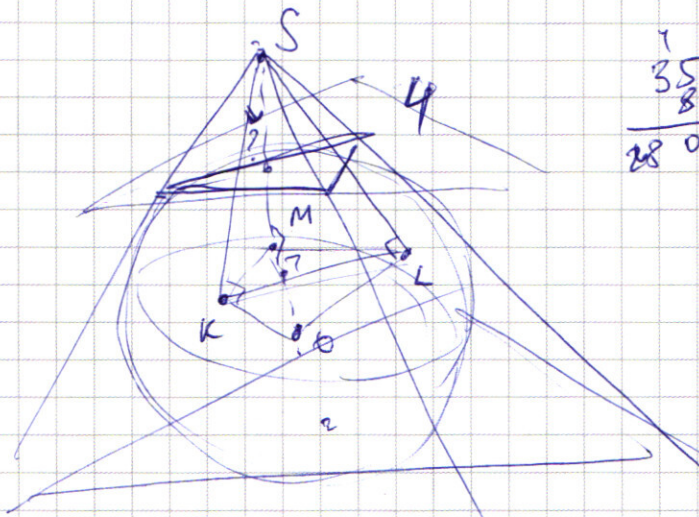
$3^x + 4 \cdot 3^{81} \leq y < 85 + (3^{81} - 1)x$

$3^x \ln 3 = 3^{81} - 1$

$R = 13$

$\cos 7x + \cos 3x = \sqrt{2} \cos 5x - \sqrt{2} \cos 13x$
 $\cos 7x + \cos 3x = \sqrt{2} (\cos 5x - \cos 13x)$
 $\cos 7x + \cos 3x = \sqrt{2} (2 \sin 9x \sin 4x)$
 $\cos 7x + \cos 3x = 2 \sqrt{2} \sin 9x \sin 4x$

$a + b - \sqrt{2}(ab - cd) = c + d$
 $a + b - \sqrt{2}ab = c + d - \sqrt{2}cd$
 $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$
 $a^2 + b^2 = 1$
 $c^2 + d^2 = 1$

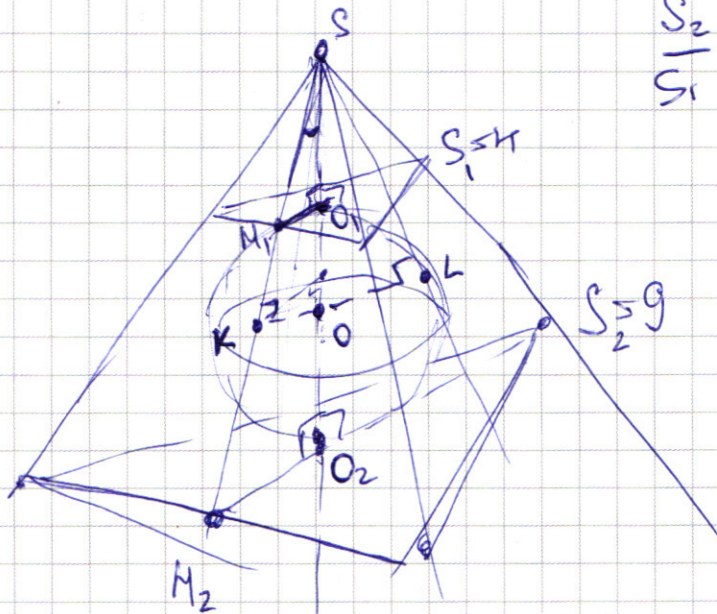


$$\frac{1}{35} \frac{8}{280}$$

$$\frac{1}{144} \frac{4}{576}$$

$$5^4 = 3^3 + 1$$

$$\frac{8!}{3! \cdot 4!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \boxed{5} \cdot 6 \cdot \boxed{7} \cdot \boxed{8}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$



$$\frac{S_2}{S_1} = k^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$k = \frac{3}{2}$$

$$SO_1 M_1 \sim \triangle SKO$$

$$\cos \alpha = \frac{SO_1}{SM_1} = \frac{SK}{SO} = \frac{\sqrt{SO_1^2 + 2RSO_1}}{R + SO_1}$$

$$SO_1 M_1 \sim \triangle SO_2 H_2$$

$$k = \frac{SO_1}{SO_2} = \frac{SO_1}{SO_1 + 2R}$$

$$\frac{SO_1}{SO_2}$$

$$SO = R + SO_1$$

$$SK = \sqrt{SO^2 - R^2} = \sqrt{SO_1^2 + 2RSO_1}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$

$$\cos 10x = \cos(7x + 3x) = \cos 7x \cos 3x - \sin 7x \sin 3x$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} (\cos 7x \cos 3x - \sin 7x \sin 3x) = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 3x \cos 7x = \sin 7x + \sin 3x - \sqrt{2} \sin 3x \sin 7x$$

$$\cos 7x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 3,5x}{1 + \operatorname{tg}^2 3,5x} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 a}{1 + \operatorname{tg}^2 a} \quad (a = 3,5x)$$

$a \neq \pi k, b \neq \pi k$
(углом не равным)

$$\cos 3x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 b}{1 + \operatorname{tg}^2 b} \quad (b = 1,5x)$$

$$\sin 7x = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 + \operatorname{tg}^2 a}; \quad \sin 3x = \frac{2 \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg}^2 b}$$

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2 a}{1 + \operatorname{tg}^2 a} + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 b}{1 + \operatorname{tg}^2 b} - \sqrt{2} \frac{(1 - \operatorname{tg}^2 a)(1 - \operatorname{tg}^2 b)}{(1 + \operatorname{tg}^2 a)(1 + \operatorname{tg}^2 b)} = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 + \operatorname{tg}^2 a} + \frac{2 \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg}^2 b} -$$

$$- \sqrt{2} \frac{4 \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}{(1 + \operatorname{tg}^2 a)(1 + \operatorname{tg}^2 b)}$$

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2 a \operatorname{tg}^2 b + \operatorname{tg}^2 b - \operatorname{tg}^2 a}{(1 + \operatorname{tg}^2 a)(1 + \operatorname{tg}^2 b)} + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 a \operatorname{tg}^2 b + \operatorname{tg}^2 a - \operatorname{tg}^2 b}{(1 + \operatorname{tg}^2 a)(1 + \operatorname{tg}^2 b)} -$$

$$- \sqrt{2} \frac{(1 - \operatorname{tg}^2 a)(1 - \operatorname{tg}^2 b)}{(1 + \operatorname{tg}^2 a)(1 + \operatorname{tg}^2 b)} = \frac{2 \operatorname{tg} a (1 + \operatorname{tg}^2 b) + 2 \operatorname{tg} b (1 + \operatorname{tg}^2 a) - \sqrt{2} \cdot 4 \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}{(1 + \operatorname{tg}^2 a)(1 + \operatorname{tg}^2 b)}$$

$$2 - 2 \operatorname{tg}^2 a \operatorname{tg}^2 b - \sqrt{2} (1 + \operatorname{tg}^2 a \operatorname{tg}^2 b - \operatorname{tg}^2 b - \operatorname{tg}^2 a) =$$

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

$$a^2 + b^2 = 2 \operatorname{tg} a + 2 \operatorname{tg} a \operatorname{tg}^2 b + 2 \operatorname{tg} b + 2 \operatorname{tg} b \operatorname{tg}^2 a -$$

$$- 4 \sqrt{2} \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b.$$

$$(\sqrt{2} + 2) - \operatorname{tg}^2 a \operatorname{tg}^2 b (2 + \sqrt{2}) + \sqrt{2} (\operatorname{tg}^2 b + \operatorname{tg}^2 a) =$$

$$= 2 \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b (\operatorname{tg} b + \operatorname{tg} a + 2 \sqrt{2}) + 2 (\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b)$$

$$(\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b) (\sqrt{2} \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b) + \sqrt{2} \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b$$

$$\sin 7x + \sin 3x - \cos 7x - \cos 3x = \sqrt{2} (\cos 7x \cos 3x - \sin 7x \sin 3x)$$

$$2 + 2 \sin 7x \sin 3x + 2 \cos 7x \cos 3x - 2 \sin 3x \cos 7x - 2 \sin 7x \cos 3x =$$

$$= 2 (\cos 7x \cos 3x)^2 + (\sin 7x \sin 3x)^2 - 2 \sin 3x \cos 3x \sin 7x \cos 7x$$

$$\cancel{2 + 2ab + 2cd - 2}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$2 + 1 + \sin 7x \sin 3x + \cos 7x \cos 3x - \sin 3x \cos 7x - \sin 7x \cos 3x =$$

$$= (\cos 3x \cos 7x)^2 + \cos 3x (\sin 7x \sin 3x)^2 - 2 \sin 3x \sin 7x \cos 3x \cos 7x$$

$$\cancel{\cos 3x \cos 7x (1 - \cos 3x \cos 7x) + \sin 3x \sin 7x (1 - \sin 3x \sin 7x)}$$

$$2 \sin 5x \sin 2x - 2 \cos 2x \cos 5x = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$2ab - 2cd = \sqrt{2} (d^2 - a^2)$$

$$2 (\sin 5x \sin 2x - \cos 5x \cos 2x) = \sqrt{2} (-2 \cos 7x)$$

$$\sin 7x + \sin 3x - (\cos 7x + \cos 3x) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$2 \sin 5x \cos 2x - 2 \cos 5x \cos 2x = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$2 \cos 2x (\sin 5x - \cos 5x) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$\sqrt{2} \cos 2x \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 5x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 5x \right) = \cos 10x$$

$$-\sqrt{2} \cos 2x \cos \left(5x + \frac{\pi}{4} \right) = \cos 10x$$

$$\cancel{\cos \alpha} \quad \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 2x, \quad \frac{\alpha - \beta}{2} = 5x + \frac{\pi}{4}$$

$$\alpha + \beta = 4x, \quad \alpha - \beta = 10x + \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha = 7x + \frac{\pi}{4}$$

$$\beta = -3x - \frac{\pi}{4}$$

$$\cos \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(-3x - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \left(\dots \right)$$