

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО М.

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФ.

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

Разложим число 16875 на простые мно-
жители:

$$\begin{array}{r} 16875 \div 5 = 3375 \\ 3375 \div 5 = 675 \\ 675 \div 5 = 135 \\ 135 \div 5 = 27 \\ 27 \div 3 = 9 \\ 9 \div 3 = 3 \\ 3 \div 3 = 1 \end{array}$$

$$16875 = 5^4 \cdot 3^3 \cdot 1^1$$

$$4 + 3 + 1 = 8$$

Значит восьмизначное число может состоять
только из 1; 3; 5 и 9 (5 · 3 = 15 > 9 } не по-
строит } ходит
т.к. всего 3, то все
возможны 2 варианта использования цифр

$$1: 5^4 \cdot 3^3 \cdot 1^1$$

$$2: 5^4 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 1^2$$

Теперь нужно найти все возможные их ком-
бинации. С для 1: $8!$ - всего ^{возможных} мест нахождения

$$\frac{8!}{4! \cdot 3! \cdot 1!} - \text{т.к. 1 единица}$$

т.к. 3 тройки

$$\text{для 2: } \frac{8!}{4! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!}$$

т.к. 4 четвёрки 2 единицы 1 дев. 1 из тройки

Общее ~~число~~ ком. комбинаций

$$\frac{8!}{4! \cdot 3!} + \frac{8!}{4! \cdot 2!} = 8 \cdot 7 \cdot 5 + 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 =$$

= 1120

Ответ: 1120 чисел
✓

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

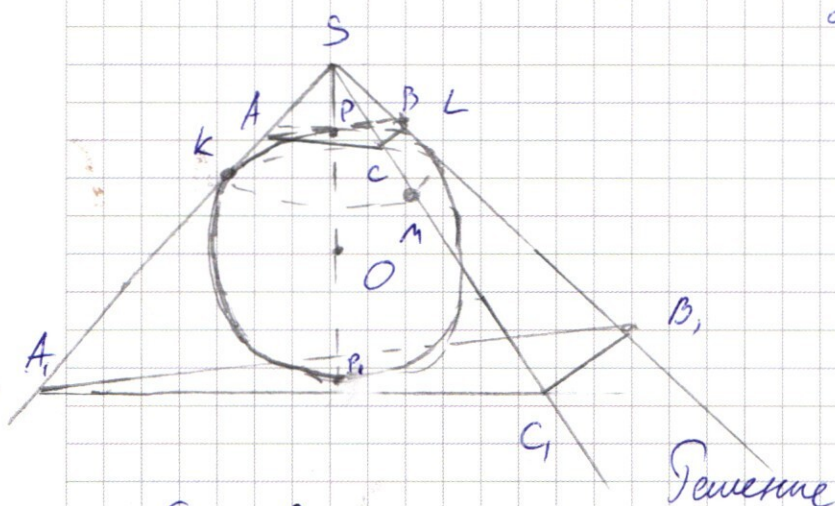
= 1120 ~~чисел~~

Ответ: 1120 чисел

ср 4

Дано: сфера $\omega(O; R)$
 $S_1 = 4$ $S_2 = 9$

Найти: $\angle KSO$;
 S_{KLM}



$$S_1 = S_{ABC}$$

$$S_2 = S_{A_1B_1C_1}$$

Плоскости

~~Плоскости~~ Треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, перпендикулярны S прямой SO и касаются сферы в диаметрально противоположных точках P и P_1 , значит они параллельны.

П.к. плоскости ABC и $A_1B_1C_1$ параллельны и их ~~соответствующие~~ соответствующие вершины лежат на одинаковых прямых (A и A_1 лежат на прямой AS), то $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ подобны.

и их коэффициент подобия k равен $\sqrt{\frac{S_2}{S_1}}$

$$k = \sqrt{\frac{S_2}{S_1}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

П.к. эти прямые AS , BS и CS выходят из одной т. S , но пирамиды $SABC$ и SAB_1C_1 тоже подобны с тем же коэффициентом k .

В таком случае:

$$k = \frac{SP_1}{SP}$$

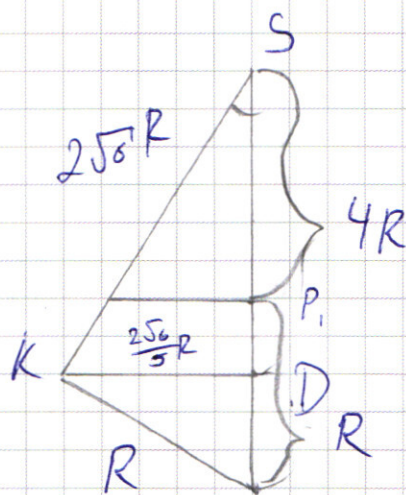
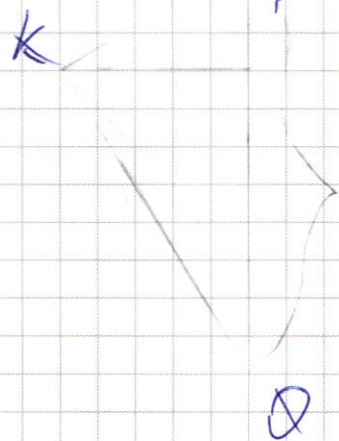
Пусть $SP = x$, тогда

$$\frac{3}{2} = \frac{x+2R}{x}$$

$$3x = 2x + 4R$$

$$x = 4R$$

$$OK \perp SK$$



KD - высота

$$SK = \sqrt{(5R)^2 - R^2} = \sqrt{24R^2} = 2\sqrt{6}R$$

$$KD = \frac{2\sqrt{6} \cdot R^2}{5R} = \frac{2\sqrt{6}R}{5}$$

$$\sin \angle KSO = \frac{KD}{KS} = \frac{\frac{2\sqrt{6}}{5}R}{2\sqrt{6}R} = \frac{1}{5}$$

$$\angle KSO = \arcsin\left(\frac{1}{5}\right)$$

П.к. сфера касается в трехгранный угол, то $KS = LS = MS$, значит $KLM \parallel$ плоск. ABC

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

то есть $ABC \sim KLM$, с коэф. подобия k ,

$$k = \frac{SD}{SP_1}$$

$$SD = \sqrt{24R^2 - \frac{24}{25}R^2} = \sqrt{\frac{24 \cdot 24}{25}R^2} = \frac{24}{5}R$$

$$SP_1 = 4R$$

$$k = \frac{\frac{24}{5}R}{4R} = \frac{6}{5}$$

$$\frac{S_{KLM}}{S_{ABC}} = k^2 \quad S_{KLM} = k^2 \cdot S_{ABC} = \frac{36}{25} \cdot 4 = \frac{36 \cdot 4}{25} = \frac{576}{100} = 5,76$$

Ответ: $\angle KSD = \arcsin\left(\frac{1}{5}\right)$

$$S_{KLM} = 5,76$$

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases} \quad \sim 7$$

$$85 + (3^{81} - 1)x > 3^x + 4 \cdot 3^{81}$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{81} < 81 + 4 + x \cdot 3^{81} - x$$

$$3^x - 81 < 4 - 4 \cdot 3^{81} + x \cdot 3^{81} - x$$

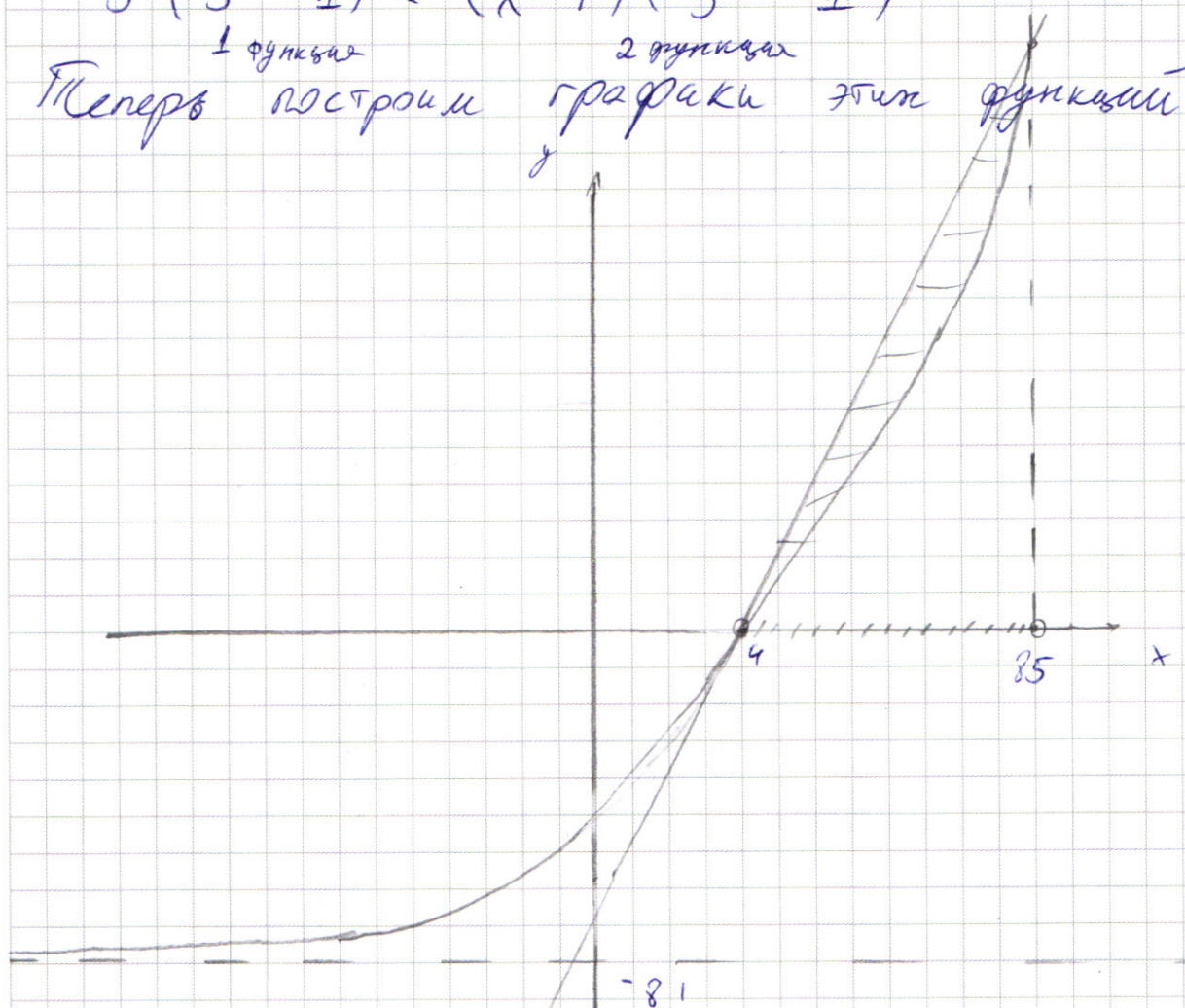
$$3^x - 3^4 < -4(3^{81} - 1) + x(3^{81} - 1)$$

$$3^4(3^{x-4} - 1) < (x-4)(3^{81} - 1)$$

1 функция

2 функция

Теперь построим графики этих функций



П.к. 1-ой скорость роста 1 функции увеличивается, а 2-ой - неизменно, то в данном случае они встретятся 2 раза:

1-ой

при $x=4$

$$0 = 3^4(3^{4-4} - 1) = (4-4)(3^{81} - 1) = 0$$

$$3^4(3^0 - 1) = 0 \cdot (3^{81} - 1)$$

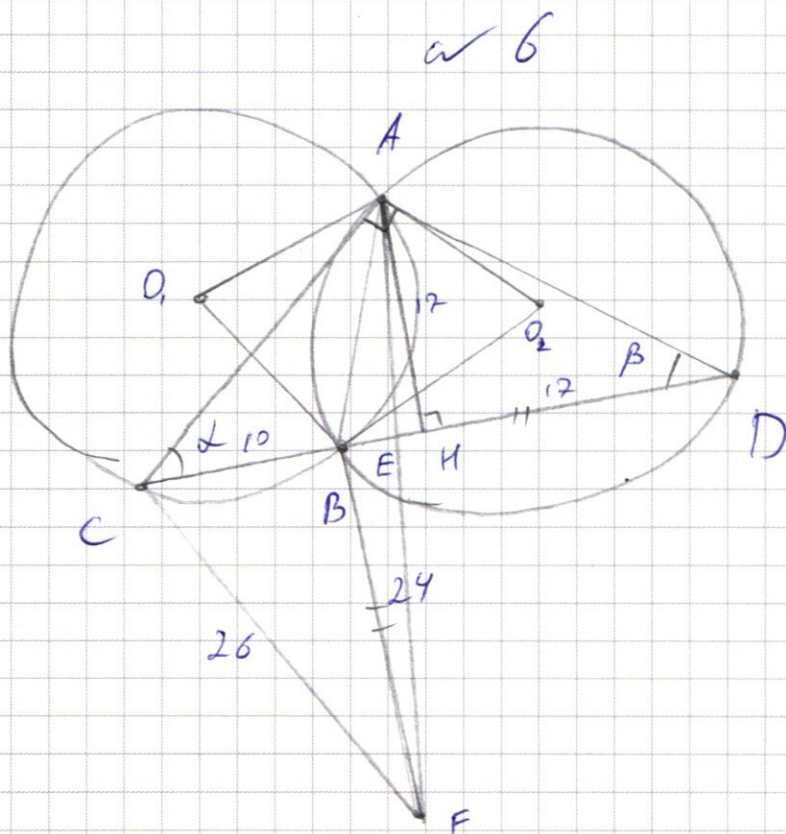
и 2-ой

при $x=85$

$$3^4 \cdot (3^{81} - 1) = 81(3^{81} - 1)$$

Значит 1-ая функция меньше второй на проме-

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Дано: в окрестности $\omega_1(0, R)$ и $\omega_2(2, R)$
 $R=13$
 $\angle CAD = 90^\circ$ $CF \perp CD$
 $BC = 10$ $CF = BD$
Найти: CF - ?
 S_{ACE} - ?

Земельные

$$\angle ACD = \alpha \quad \angle ADC = \beta$$

Полоса $\angle A O_1 B = 2\alpha$ и $\angle A O_2 B = 2\beta$, как внутренние

П.к. ω_1 и ω_2 имеют равные радиусы, то

$\angle A O_1 B$ u $\angle A O_2 B$ pa'lsu $\Rightarrow 2\alpha = 2\beta \Rightarrow \alpha = \beta$

$$\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \alpha = \beta = 45^\circ$$

Следовательно $AC = AD$

Lösung $CB=a$; $BD=b$ u $AC=AD=x$

Mergo

путике ~~40~~; от 4 до 85
 $x \in (4, 85)$

из условия

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{8'} \\ y < 85 + (3^{8'} - 1)x \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x = \frac{a+b}{\sqrt{2}}$$

П.к. $\angle AOB = 90^\circ$ $\angle ACD = 45^\circ$, по $\angle AOB = 90^\circ$;
 $AO, OB = R \Rightarrow AB = R\sqrt{2} = 13\sqrt{2}$

По теореме косинусов

$$\begin{cases} (13\sqrt{2})^2 = x^2 + a^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} x a \\ (13\sqrt{2})^2 = x^2 + b^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} x b \end{cases}$$

Заменим x на $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$

$$\begin{cases} 169 \cdot 2 = \frac{(a+b)^2}{2} + a^2 - \frac{\sqrt{2}(a+b)}{\sqrt{2}} a \\ 169 \cdot 2 = \frac{(a+b)^2}{2} + b^2 - \frac{\sqrt{2}(a+b)}{\sqrt{2}} b \end{cases}$$

Сложим

$$169 \cdot 4 = (a+b)^2 + a^2 + b^2 - (a+b)(a+b) = a^2 + b^2$$

$$CF = \sqrt{a^2 + b^2}, \text{ п.к. } CF \perp BD$$

$$CF = \sqrt{169 \cdot 4} = 13 \cdot 2 = 26$$

АК - высота

п.к. $\angle AKD = 90^\circ$ и $\angle ADK = 45^\circ \Rightarrow \angle KAD = 45^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow AK = KD = \frac{CD}{2}$ АК - медиана

к стороне CD,

поэтому $AK = \frac{CD}{2} = DK$

А.к. $BC=10$; $CF=26$, но по Т. Пифагора $BF=24=BD$

$$CD = \overbrace{CB+BD} = 10+24=34$$

$$AH=HD = \frac{34}{2} = 17$$

Положим S_{ACF} и S_{CAE} и S_{CEF}

$$S_{ACF} = S_{CAE} + S_{CEF} = \frac{1}{2} \cdot CE \cdot AH + \frac{1}{2} \cdot CE \cdot BF = \\ = \frac{1}{2} CE \cdot (AH+BF)$$

$$BH = CD - 10 - 17 = 34 - 27 = 7$$

$$\frac{24}{BE} = \frac{17}{7-BE}, \text{ по подобию треугольников}$$

$$168 - 24BE = 17BE$$

$$BE = \frac{168}{41}$$

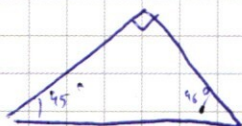
$$S_{ACF} = \frac{1}{2} CE \cdot (AH+BF) = \frac{1}{2} (CB+BE) (AH+BF) = \\ = \frac{1}{2} \left(10 + \frac{168}{41} \right) (17+24) = \frac{1}{2} \left(10 + \frac{168}{41} \right) \cdot 41 = \frac{1}{2} (41 \cdot 10 + 168) = \\ = \frac{1}{2} \cdot 578 = 289$$

Ответ: $CF=26$

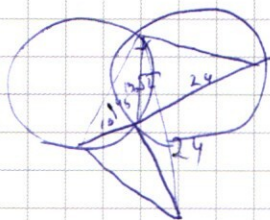
$$S_{ACF} = 289$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

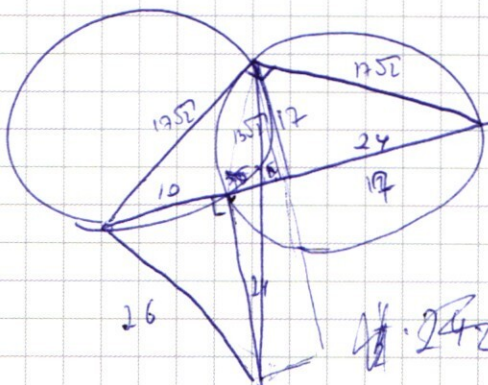
$$\begin{aligned} 169 \cdot 2 &= x^2 + 2^2 - \sqrt{2} \times 2 \\ 169 \cdot 2 &= x^2 + 4 - \sqrt{2} \times 2 \\ \text{or } 2 + 4 &= x\sqrt{2} \end{aligned}$$



$$BC=10 \quad a=10$$



$$169.2 = 100 + x^2 - \sqrt{2} \cdot x \cdot 10$$
$$x^2 - \sqrt{2} \cdot 10x - 338 = 0$$
$$\Delta = 200 + 1352$$



$$169 \cdot 2 = \frac{(a+b)^2}{2} + a^2 - (a+b)a$$

$$169 \cdot 2 = \frac{(a+b)^2}{2} + b^2 - (a+b)b$$

$$a^2 - b^2 - (a+b)a + (a+b)b = 0$$

$$(a-b)(a+b) - (a+b)(a-b) = 0$$

$$169. y = (a+b)^2 + a^2 + b^2 - (a+b)^2$$

$$a^2 + b^2 = 169.4$$

$$CF = \sqrt{a^2 + b^2} = 13 - 2 = 11$$

$$100 + b^2 = 676$$

$$6^2 = 576$$

$$b = 24$$

$$\sqrt{5.76} = 2.4$$

$$\begin{array}{r} 971 \\ 9 \overline{) 971} \\ \underline{9} \\ 7 \\ 7 \\ \underline{7} \\ 0 \end{array}$$

$$\sqrt{18,82} = 3$$

$$\begin{array}{r|l} 6 & 652 \\ \times & \\ \hline \end{array}$$

$$410 + 168 = 578$$

$$\frac{24}{2-x} = \frac{135}{x}$$

$$24x = 91\sqrt{2} - 13\sqrt{2}x$$

$$x = \frac{9152}{24 + 1352}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ - 41 \\ \hline 12 \\ + 68 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 697 - 119 = 578 \\ \frac{578}{2} = 289 \end{array}$$

$$\frac{24}{7-x} = \frac{17}{x}$$

$$24x = 119 - 17x$$

$41x = 119$

$$S = \frac{1}{2} \left((10 + (7 - \frac{119}{41})) \cdot 19 + (10 + 7 - \frac{119}{41}) \cdot 19 \right)$$

$$\frac{1}{2} (17 \cdot 41 - 119) = \frac{1}{2} (17 \cdot 41 - 119)$$

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} = 3^{81} & 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x & 3^4 + x(\end{cases}$$

$81 - 4$

$3^4 + 2^2 + 3^{81} \cdot x - x$

$$y \geq 1 + 4 \cdot 3^{81}$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{81} < 85 + (3^{81} - 1)x$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{81} < 85 + x \cdot 3^{81} - x$$

$$3^x < 81 + 4 - 4 \cdot 3^{81} + x \cdot 3^{81} - x$$

$$81 + 4(3^{81} - 1) + x(3^{81} - 1)$$

$$3^x < 81 + (x - 4)(3^{81} - 1)$$

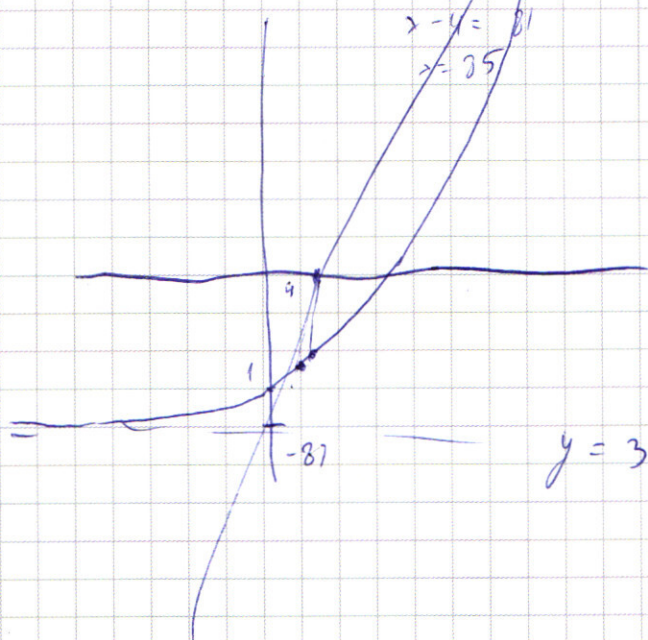
$$3^x - 3^4 < (x - 4)(3^{81} - 1)$$

$$3^4(3^{x-4} - 1) < (x - 4)(3^{81} - 1)$$

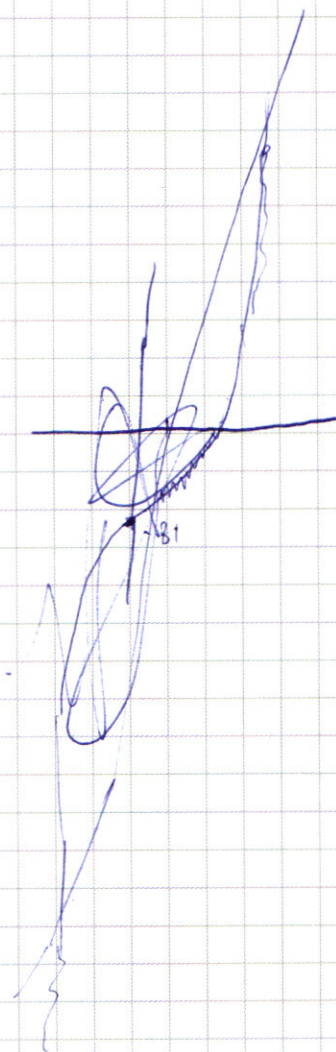
$$\begin{aligned} x - 4 &= 81 \\ x &= 85 \end{aligned}$$

$$[4; 85)$$

$$85 - 4 = 81$$



$$y = 3^x + 4$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3. $\left(\frac{x}{y^2}\right)^4 \lg y = (-x) \lg(-xy)$

$y > 0$
 $-xy > 0$
 $x < 0$

$2y^2 - xy - 4x - 8y = 0$

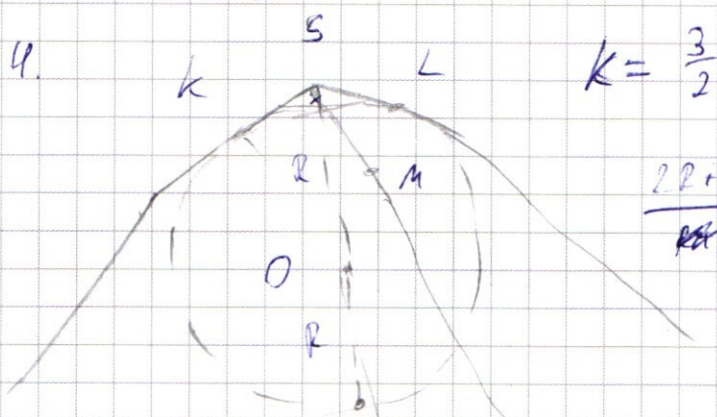
$2y(y-4) - x(y+4) = 0$

$-xy =$

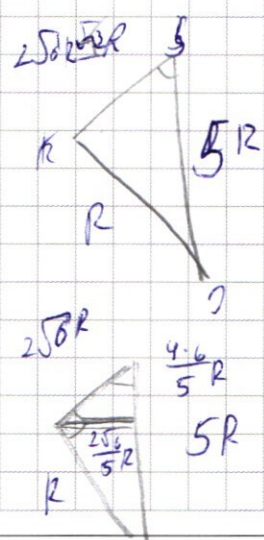
$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$
 $-x(y+x)$

$-xy = x^2 + 4x + 4 - 4 - (2y^2 - 8y) =$
 $(x+2)^2 - 2(y^2 - 4y + 4 - 4)$
 $-2(y-2)^2 - 4$

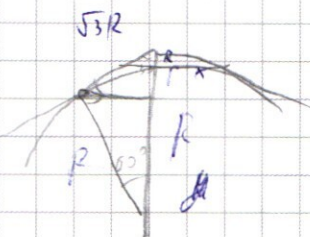
$\begin{array}{r} 36 \\ \times 16 \\ \hline 216 \\ + 36 \\ \hline 576 \end{array}$



$\frac{2R+x}{R+x} = \frac{3}{2}$ $4R+2x=3x$
 $x=4R$
 $4R+2x=3R+3x$
 $x=R$



$\sin \angle KSO = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle KSO = 30^\circ$



$\sqrt{3}R^2 = x(2R-x)$
 $x = \frac{3}{2}R$
 $\sqrt{3}R^2 = \frac{3^2}{2}R^2 - \frac{9}{4}R$

$\frac{24}{5}R \cdot 4 = \frac{6}{5} \cdot 4 = \frac{24}{5}$

5.

$$|x-6-y| + |x-6+y| = 12$$

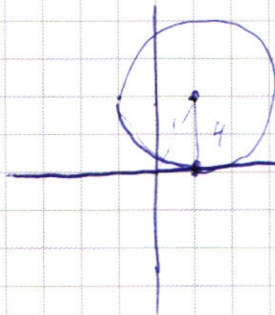
$$(|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a$$

$$x^2 + 36 - 12|x| + y^2 + 64 - 16|y| = a$$

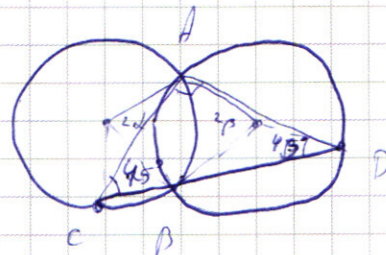
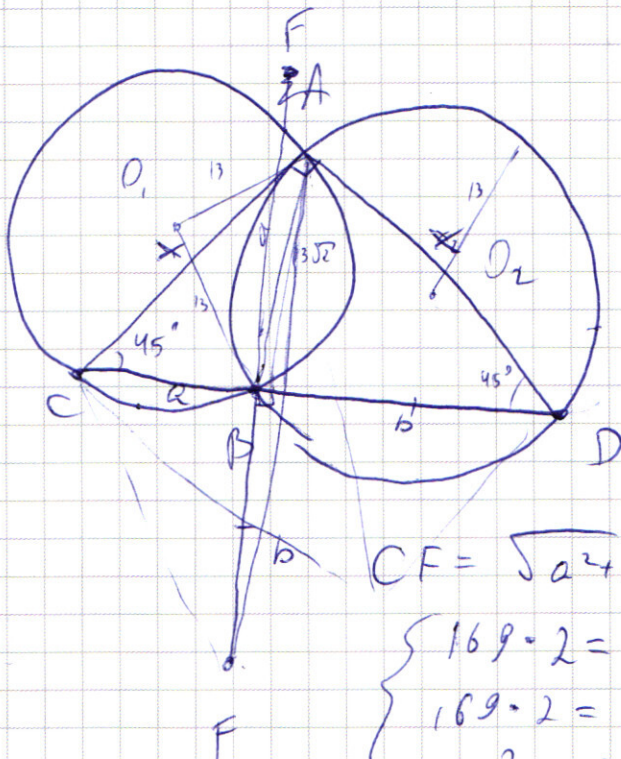
$$x^2 + y^2 - 12|x| - 16|y| = a - 100$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$$

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 16$$



$$BF = BD$$



$$2\alpha = 2\beta \Rightarrow \alpha = \beta$$

$$CF = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\begin{cases} 169 \cdot 2 = x_1^2 + a^2 - \sqrt{2} \cdot x_1 \cdot a \\ 169 \cdot 2 = x_2^2 + b^2 - \sqrt{2} \cdot x_2 \cdot b \end{cases}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$2x^2 = a^2 + b^2$$

$$a^2 - b^2 + \sqrt{2}(a - b) = 0$$

$$(a-b)(a+b-\sqrt{2}) = 0$$

$$169 \cdot 4 = a^2 + b^2 - \sqrt{2} \cdot x(a+b)$$

$$(a+b)^2 = 2x_1x_2$$

$$(a+b)^2 = 2x_1x_2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$16875 \div 5 = 3375$$

$$3375 \div 5 = 675$$

$$675 \div 5 = 135$$

$$135 \div 5 = 27$$

$$27 \div 3 = 9$$

$$9 \div 3 = 3$$

$$3 \div 3 = 1$$

$$16875 \div 5 = 3375$$

$$3375 \div 5 = 675$$

$$675 \div 5 = 135$$

$$135 \div 5 = 27$$

$$27 \div 3 = 9$$

$$9 \div 3 = 3$$

$$3 \div 3 = 1$$

$$85 + (3^8 - 1)x -$$

$$x - 4^2 (3^8 - 1) - 3^4 (3^4 - 1)$$

$$C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$$

$$5^4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1$$

$$9 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1$$

$$3 \cdot 10$$

$$22133$$

$$22313$$

$$22331$$

$$212$$

$$5^1 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3$$

$$2! \cdot 2! =$$

$$8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 =$$

$$8 \cdot 7 \cdot 5 + 8 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 = 1607 = 1120$$

$$8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 7 = 42 \cdot 42 = 1960$$

$$\frac{8!}{4! \cdot 3!} + \frac{8!}{4! \cdot 2!}$$

$$22133$$

$$2123$$

$$2132$$

$$2231$$

$$2321$$

$$2312$$

$$1223$$

$$3221$$

$$1232$$

$$3212$$

$$1322$$

$$3122$$

$$C = \frac{4!}{2!}$$

$$\cos 30^\circ = 2 \cos^2 15^\circ - 1$$

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2. \cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\cos(90^\circ) + \cos(180^\circ) = 2 \cos 135^\circ \cdot \cos 45^\circ = 2 \cdot \frac{-\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -1$$

$$2 \cos^2 5x - 1$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cdot \cos 2x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$\sqrt{2} (2 \cos^2 5x - 1)$$

$$\sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x)$$

$$\sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x)$$

$$5x = 2$$

~~$$\cos 2x + 2$$~~

$$\cos(5x+2x) + \cos(5x-2x) - \sqrt{2} \cos(2 \cdot 5x)$$

$$- \sqrt{2} (2 \cos^2 5x - 1)$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x - 2 \sin 5x \cos 2x - 2\sqrt{2} \cos^2 5x - \sqrt{2} = 0$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x - \sqrt{2} \cos 5x) - 2 \sin 5x \cos 2x - \sqrt{2} = 0$$

~~$$\cos 5x - \sin 5x$$~~

$$(\cos 5x - \sin 5x) (2 \cos 2x - \sqrt{2} \cos 5x - \sqrt{2} \sin 5x) = 0$$

$$\cos 5x - \sin 5x = 0$$

$$\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 5x + \sin 5x)$$