

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

Разложим 16875 на простые множители.

$$\begin{array}{r} 16875 \div 5 = 3375 \\ 3375 \div 5 = 675 \\ 675 \div 5 = 135 \\ 135 \div 5 = 27 \\ 27 \div 3 = 9 \\ 9 \div 3 = 3 \\ 3 \div 3 = 1 \end{array}$$

$16875 = 5^4 \cdot 3^3 \Rightarrow$ число, удовлетворяющее
условию должно состоять из 4-х 5-рок

3-х троек и девяти, или из 4-х 5-рок,
1-й тройки 1-й девятки и 2-х единиц.

В первом случае кол-во равно $C_8^1 \cdot C_7^3$ (кол-во
способов
выбрать места
единиц и 3-х 5-рок)

Во втором случае - $C_8^2 \cdot C_6^2$

$$\begin{aligned} n &= C_8^1 \cdot C_7^3 + C_8^2 \cdot C_6^2 = 8 \cdot \frac{7!}{4! \cdot 3!} + \frac{8!}{6! \cdot 2!} \cdot \frac{6!}{4! \cdot 2!} = \\ &= \frac{8 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{6} + \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{4} = 5 \cdot 56 + 42 \cdot 10 = \\ &= 280 + 420 = 700 \end{aligned}$$

Ответ: 700.

№ 2

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 4x + \sin 5x$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$\sqrt{2} \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \cos 10x$$

$$2 \cos 2x \sin(5x - \frac{\pi}{4}) = \cos 10x$$

$$\sqrt{2} \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - \cos^2 5x + \sin^2 5x = 0$$

$$(\cos 5x - \sin 5x)(\sqrt{2} \cos 2x - \cos 5x + \sin 5x) = 0$$

$$\cos 5x = \sin 5x$$

$$\sqrt{2} \cos 2x = \sqrt{2} \sin(5x + \frac{\pi}{4})$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} - 2x) = \sin(5x + \frac{\pi}{4})$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi}{2} - 2x = 5x + \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$7x = \frac{\pi}{4} - 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{28} - \frac{2\pi k}{7}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}, \frac{\pi}{28} - \frac{2\pi k}{7}, n, k \in \mathbb{Z}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} & (1) \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 & (2) \end{cases}$$

ОДЗ: $y > 0$

$x < 0$

$$1) \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

$$\lg\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = \lg(-x)^{\lg(-xy)}$$

$$\lg y \cdot (4\lg(-x) - 2\lg y) = \lg(-x) \cdot (\lg(-x) + \lg(y))$$

$$\lg y = b; \lg(-x) = a$$

$$b(4a - 2b) = a(a + b)$$

$$4ab - 2b^2 = a^2 + ab$$

$$a^2 + 2b^2 - 3ab = 0$$

$$a(a - b) - 2b(a - b) = 0$$

$$(a - b) = 0$$

$$a = 2b$$

$$\lg y = \lg(-x)$$

$$\lg(-x) = \lg y^2$$

$$\begin{cases} y = -x \\ -x = y^2 \end{cases}$$

$$2) \quad x = -y$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8 = 0$$

$$2y^2 + y^2 - y^2 + 4y - 8y = 0$$

$$y^2 + 2y - 4 = 0$$

$$D = 4 + 16 = 20$$

$$y_1 = \frac{-2 + 4\sqrt{5}}{2} = 2\sqrt{5} - 1$$

$$y_2 = \frac{-2 - 4\sqrt{5}}{2} = -1 - 2\sqrt{5} \quad (0 \Rightarrow \text{нест.})$$

$$x = 1 - 2\sqrt{5}$$

$$x = -y^2$$

$$2y^2 + y^3 - y^4 + 4y^2 - 8 = 0$$

$$y^4 - y^3 + 6y^2 + 8 = 0$$

$$y^2 - 2y = 0$$

$$y = 0 - \text{нест.}$$

$$y = 2$$

$$x = -2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~ 3 (продолжение)

$$x = -y^2$$

$$2y^2 + y^3 - y^4 + 4y^2 - 8y = 0$$

$$y = 0 - \text{корень}$$

$$2y + y^2 - y^3 + 4y - 8 = 0$$

$$y^3 - y^2 - 6y + 8 = 0$$

$$y = -1; -1 - 1 + 6 + 8 \neq 0$$

$$y = 2; 8 - 4 - 12 + 8 = 0$$

$$\begin{array}{r|l} y^3 - y^2 - 6y + 8 & y - 2 \\ \underline{y^3 - 2y^2} & y^2 + y - 4 \\ y^2 - 6y & \\ \underline{y^2 - 2y} & -4y + 8 \\ -4y + 8 & \\ \underline{-4y + 8} & 0 \end{array}$$

$$y^2 + y - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$y_1 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

$$y_2 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$$

$$< 0 \Rightarrow \text{корень}$$

$$y = 2 \Rightarrow x = -2^2 = -4$$

$$y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \Rightarrow x = -\frac{17 + 1 - 2\sqrt{17}}{4} = -\frac{18 - 2\sqrt{17}}{4} = \frac{\sqrt{17} - 9}{2}$$

$$\text{Ответ: } (-2; 2); (-4; 2); \left(\frac{\sqrt{17} - 9}{2}; \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \right)$$

$$\begin{cases} |x-6-y| + |y-6+x| = 12. & (1) \\ (|x|-6)^2 + (|y|-6)^2 = 9. & (2) \end{cases}$$

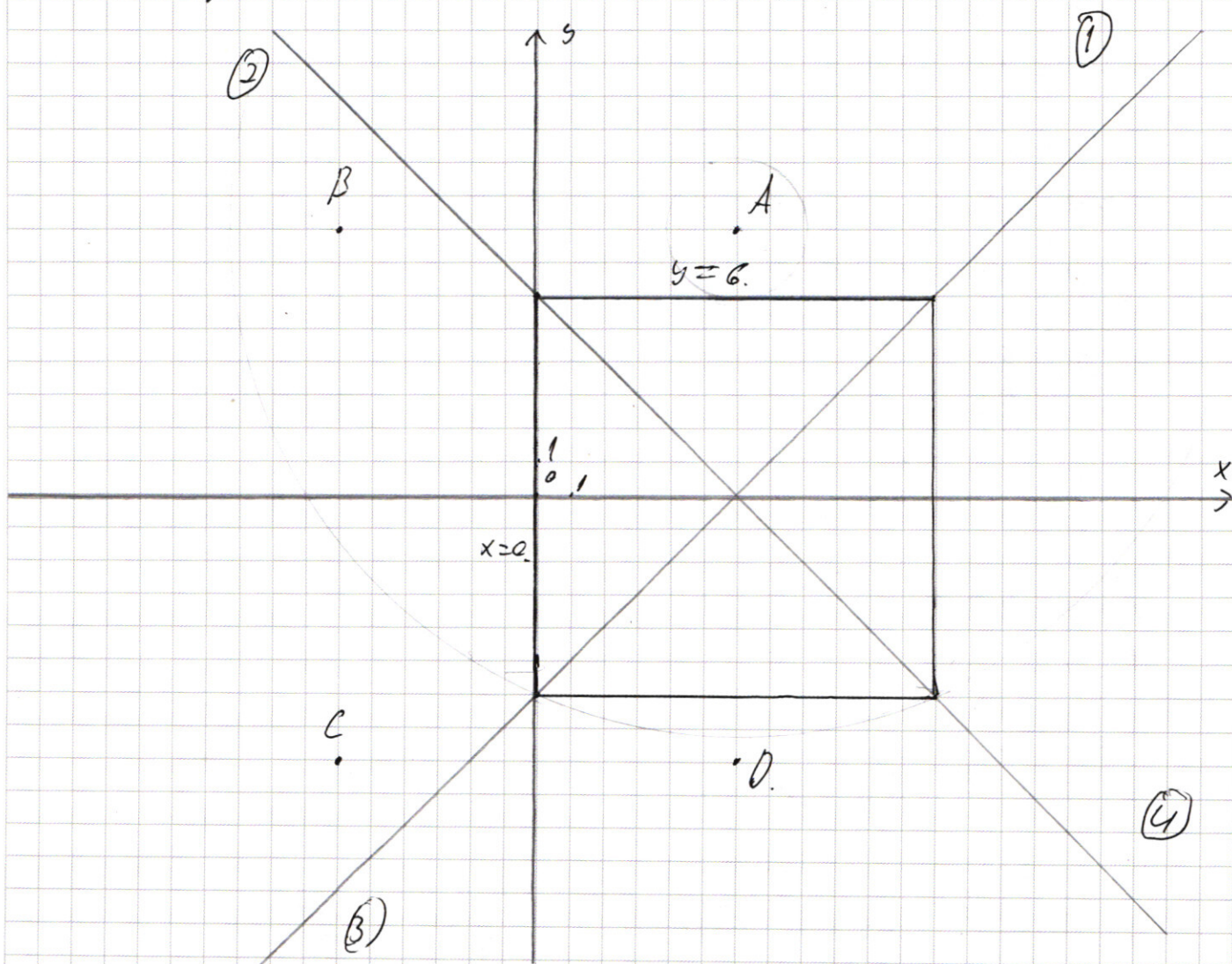
$$9 \geq 0.$$

$$1) |x-6-y| + |x-6+y| = 12$$

1-й случай отражается в о при $y = x - 6$

2-й — при $y = -x + 6$.

построим эти линии в коор. плоскости.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~ 5 (кроссечение)

Эти линии разделяют плоскость на 4 части.

$$① \quad y > x - 6 \quad y > -x + 6$$

$$y - x + 6 + x - 6 + y = 12$$

$$2y = 12$$

$$y = 6.$$

$$② \quad y > x - 6 \quad y < -x + 6$$

$$y - x + 6 - x + 6 - y = 12$$

$$-2x = 0$$

$$x = 0.$$

$$③ \quad y < x - 6 \quad y < -x + 6$$

$$x - 6 - y - x + 6 - y = 12$$

$$y = -6$$

$$④ \quad y < x - 6 \quad y > -x + 6$$

$$x - 6 - y + x - 6 + y = 12$$

$$x = 12$$

Графиком ур-я 1 является квадрат.

$$2) (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = 9$$

если (x_0, y_0) - р-н $\Rightarrow$

$(-x_0, -y_0); (x_0, -y_0); (-x_0, y_0)$ тоже решения.

$\Rightarrow$ графика ур-я 2 является

4 окружности с центрами в точках:

$A(6; 8)$ окр - ω_A

$B(-6; 8)$ окр - ω_B

$C(-6; -8)$ окр - ω_C

$D(6; -8)$ окр - ω_D и радиусами $\sqrt{9}$.

Если ω_A имеет общую точку с квадратом, то ч-д
тоже.

Аналогично с ω_B и ω_C .

2 решения $\Rightarrow \omega_A$ - 1 общая точка с квад, ω_B не
имеет общ. точ.

или ω_B - 1 общ. точ, ω_A - не имеет общ. точ.

1-й случай: $\sqrt{a} = 2$.

2-й случай: $\sqrt{a} = \rho(B)(12; -6) =$

$$= \sqrt{56} = \sqrt{(-6-12)^2 + (8+6)^2} = \sqrt{18^2 + 14^2} = \sqrt{320}$$

$$= \sqrt{320} = 2\sqrt{80}$$

$$a = 520$$

$$\begin{array}{r|l} 520 & 2 \\ 260 & 2 \\ 130 & 13 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times 14 \\ \hline 56 \\ 140 \\ \hline 196 \\ + 324 \\ \hline 520 \end{array}$$

Ответ: $a = 4; 520$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~ 4

$$\begin{cases} 5 \geq 3^x + 4 \cdot 3^{x+1} \\ 5 < 25 + (3^{x+1} - 1)x \end{cases}$$

$$25 + x \cdot 3^{x+1} - x > 3^x + 4 \cdot 3^{x+1}$$

$$(x-4)3^{x+1} > x-25+3^x$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{x+1} > 0 \text{ при любых } x$$

$$3^x > 0 \text{ при любых } x$$

$$25 + (3^{x+1} - 1)x > 0$$

$$x > \frac{-25}{3^{x+1} - 1}$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{x+1} > 10$$

~~$$\lg 5 \geq x \lg 3 + \lg 4 + 21 \lg 3$$~~

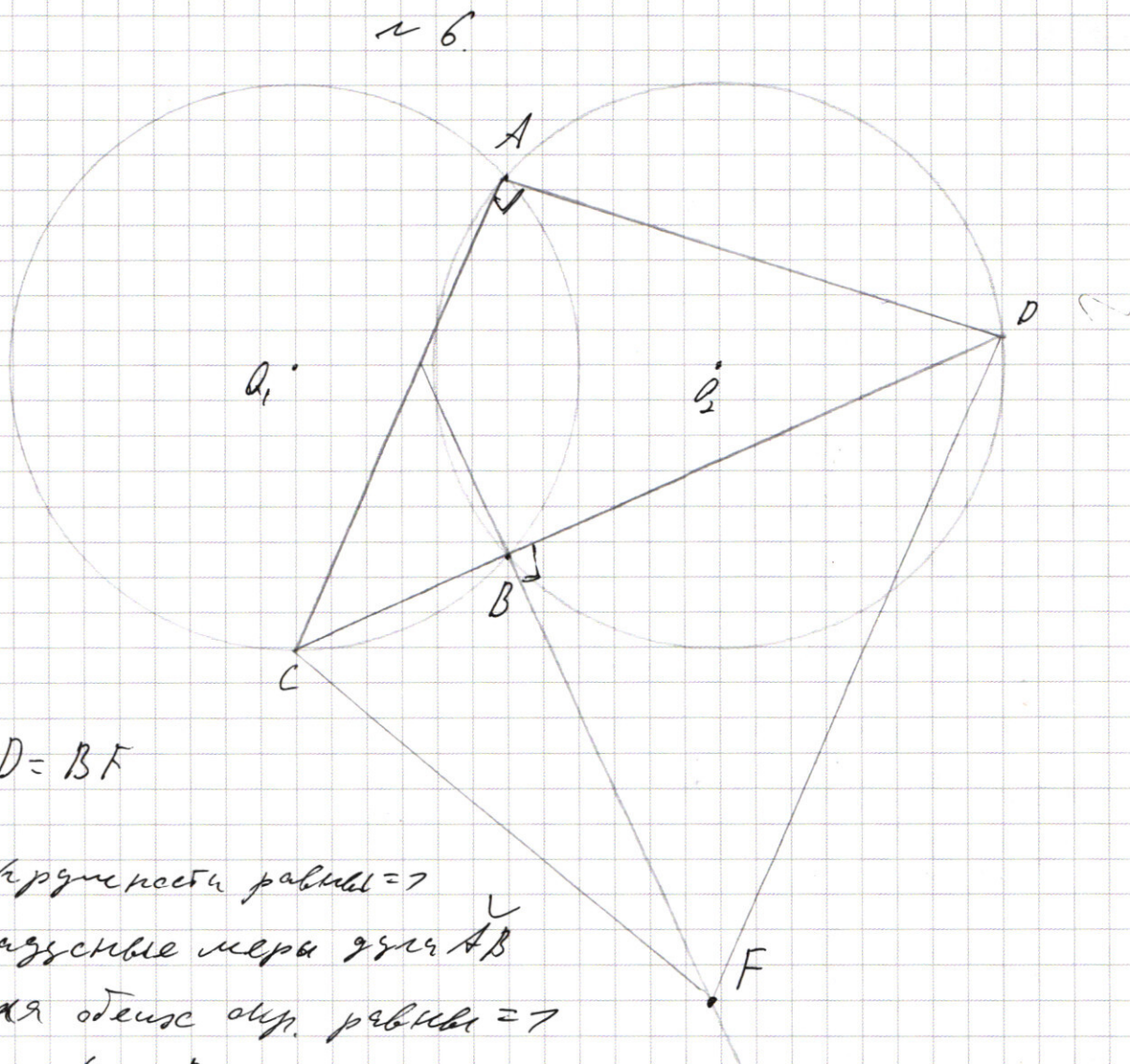
$$25 + (3^{x+1} - 1)x > 4 \cdot 3^{x+1}$$

$$x > \frac{4 \cdot 3^{x+1} - 25}{3^{x+1} - 1}$$

$$\frac{4 \cdot 3^{x+1} - 25}{3^{x+1} - 1} \geq 10$$

$$4 \cdot 3^{x+1} - 25 \geq 10 \cdot 3^{x+1} - 10$$

$$-75 \geq 6 \cdot 3^{x+1}$$



$$BD = BF$$

Строительные равенства = 7

угловые меры угла AB

для отнесения окр. равенства = 7

$$\Rightarrow \angle C = \angle D;$$

$$\angle C + \angle D = 90^\circ; \angle C = \angle D = 45^\circ; AC = AD.$$

$$\angle A Q_1 B = \angle A Q_2 B = 2\angle C = 90^\circ$$

$$AB = \sqrt{2R^2} = 13\sqrt{2}$$

пусть: $AC = a; BD = b; BC = c.$

$$AB^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$AB^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2a^2 = (b+c)^2 = b^2 + c^2 + 2bc.$$

$$a = \frac{b+c}{\sqrt{2}}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sim b$ (изрезанное)

$$2AB^2 = 2a^2 + b^2 + c^2 - \sqrt{2}a(b+c)$$

$$646 = 2b^2 + 2c^2 + 2bc - (b+c)^2$$

$$646 = b^2 + c^2 + (b+c)^2 - (b+c)^2 = b^2 + c^2$$

$$CF = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{646} = 2\sqrt{161} \approx 26,$$

$$c = 10.$$

$$b^2 = 646 - 100 = 546.$$

$$b = 24.$$

$$a = \frac{10 + 24}{\sqrt{2}} = \frac{34}{\sqrt{2}} = 14\sqrt{2}.$$

$$\angle BCF = 4.$$

$$S_{ACF} = \frac{1}{2} AC \cdot CF \cdot \sin \angle ACF$$

$$\angle ACF = 4 + \frac{\pi}{4}.$$

$$\sin(4 + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 4 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 4 = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin 4 + \cos 4)$$

$$\sin 4 = \frac{b}{CF} = \frac{24}{26} = \frac{12}{13}$$

$$\cos 4 = \frac{c}{CF} = \frac{10}{26} = \frac{5}{13}$$

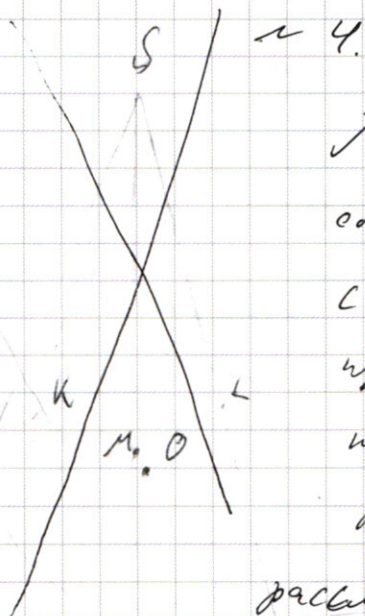
$$\sin \angle ACF = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{17}{13}$$

$$S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot 14\sqrt{2} \cdot 26 \cdot \frac{17}{\sqrt{2} \cdot 13} = 14^2 = 289$$

Ответ: 9) $CF = 26$; 10) $S_{ACF} = 289$.

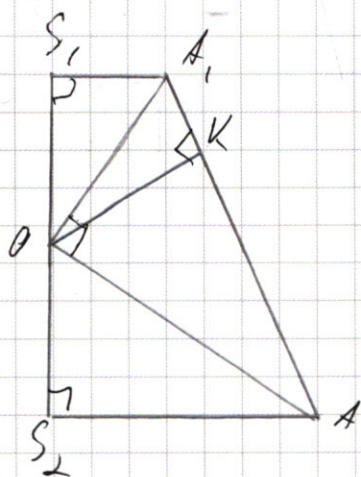
$$\begin{array}{r} 576 \\ 288 \\ 144 \end{array} \Bigg| 2$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times 14 \\ \hline 119 \\ + 140 \\ \hline 289 \end{array}$$



Плоскости сечения и трёхгр. угол.
образуют усечённый тетраэдр.
с $S_{\text{осн}}$ ЧЧЧ и высотой $2R$,
чтобы 2 точки пересечения
плоскостей сечения и SQ , SL и SA
будут A, B, C и A_1, B_1, C_1

рассмотрим сечение плоскостью
(SQK)



QA_1 и QA - биссектрисы

$$\angle S_1 QK + \angle S_1 A_1 K = \angle S_2 QK + \angle S_2 AK = 180^\circ$$

$$\angle A_1 QA = 90^\circ$$

$$QK^2 = A_1 K \cdot KA_2$$