МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6 ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 4 и 9.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12, \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)\, x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$16875 = 5^4 \cdot 3^3 \cdot 1$

Следовательно, 8-ми значное число будет состоять из четырёх „5", трех „3" и одной „1", или из четырёх „5", ~~двух~~ одной „3", одной „9" и двух „1".

В 1-ом случае можем расставить:

$$\frac{8}{1!} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4!} = 8 \cdot 7 \cdot 5 = 280$$

Во 2-ом случае:

$$\cancel{\frac{8!}{1}} \cdot \cancel{\frac{7!}{1}} \qquad \frac{8}{1!} \cdot \frac{7}{1!} \cdot \frac{\overset{3}{\cancel{6}} \cdot 5}{\cancel{2!}} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4!} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 = 280 \cdot 3$$

Всего: $280 + 280 \cdot 3 = 280 \cdot 4 = 1120$

Ответ: количество $= 1120$

№2

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cdot \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2\cos 5x \cos 2x - 2\sin 5x \cos 2x = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$\Updownarrow$$

$$2\cos 2x(\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} - 10x\right)$$

$$-2\cos 2x(\sin 5x - \cos 5x) = 2\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{2}(-2)\cos 2x \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right)$$

$$\cos 2x \cdot \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)\left(\cos 2x + \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)\right) = 0$$

$$2\sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(3,5x - \frac{\pi}{8}\right) \cdot \cos\left(1,5x - \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

$$\frac{2x - 5x + \frac{\pi}{4}}{2} = -1,5x + \frac{\pi}{8}$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \cos\left(3,5x - \frac{\pi}{8}\right) = 0 \\ \cos\left(1,5x - \frac{\pi}{8}\right) = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 5x - \frac{\pi}{4} = \pi n \\ 3,5x - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ 1,5x - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi l \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5} \\ x = \frac{5}{28}\pi + \frac{2}{7}\pi k \\ x = \frac{5}{12}\pi + \frac{2}{3}\pi l \end{array}\right., \text{где } n, k, l \in \mathbb{Z}$$

№3

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} & (1) \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 & (2) \end{cases}$$

2) $2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$

$-x^2 - x(y+4) + (2y^2 - 8y) = 0$

$x^2 + x\cdot(y+4) - (2y^2 - 8y) = 0$

$D = (y+4)^2 + 8y^2 - 32y = 9y^2 - 24y + 16 = (3y+4)^2$ $\quad 3y+4 \geq 0$

$x = \dfrac{-(y+4) \pm 3y+4}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x = -2y-4 \end{array}\right.$ $\quad \begin{cases} y \geq -\frac{4}{3} \\ y \neq 0 \end{cases}$

Если $x = y$, то:

1) $\lg(-xy) = \lg(-y^2) \Rightarrow -y^2 \leq 0$, следовательно, ~~такое~~ это не подходит по смыслу задачи

Тогда $x = -2y - 4$, $y = \dfrac{-x-4}{2}$

1) $\left(\dfrac{(-2y-4)^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (2y+4)^{\lg((2y+4)\cdot y)} \Rightarrow \left(\dfrac{16(y+2)^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (2y+4)^{\lg(2y+4)} \cdot (2y+4)^{\lg y} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{(2y+4)^{4\lg y}}{y^{2\lg y}} - (2y+4)^{\lg(2y+4)} \cdot (2y+4)^{\lg y} = 0 \Leftrightarrow \cancel{(2y+4)^{\lg y}\left(\dfrac{(2y+4)^{3\lg y}}{y^{2\lg y}} - (2y+4)^{\lg(2y+4)}\right) = 0}$

$\Rightarrow \underbrace{(2y+4)^{\lg y}}_{\geq 0} \cdot \left(\dfrac{(2y+4)^{3\lg y}}{y^{2\lg y}} - (2y+4)^{\lg(2y+4)}\right) = 0$

Тогда:

$$\frac{(2y+4)^{3\lg y}}{y^{2\lg y}} - (2y+4)^{\lg(2y+4)} = 0$$

$$\frac{(2y+4)^{3\lg y - \lg(2y+4)}}{y^{2\lg y}} - 1 = 0 \Rightarrow (2y+4)^{\lg\frac{y^3}{2y+4}} - y^{2\lg y} = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

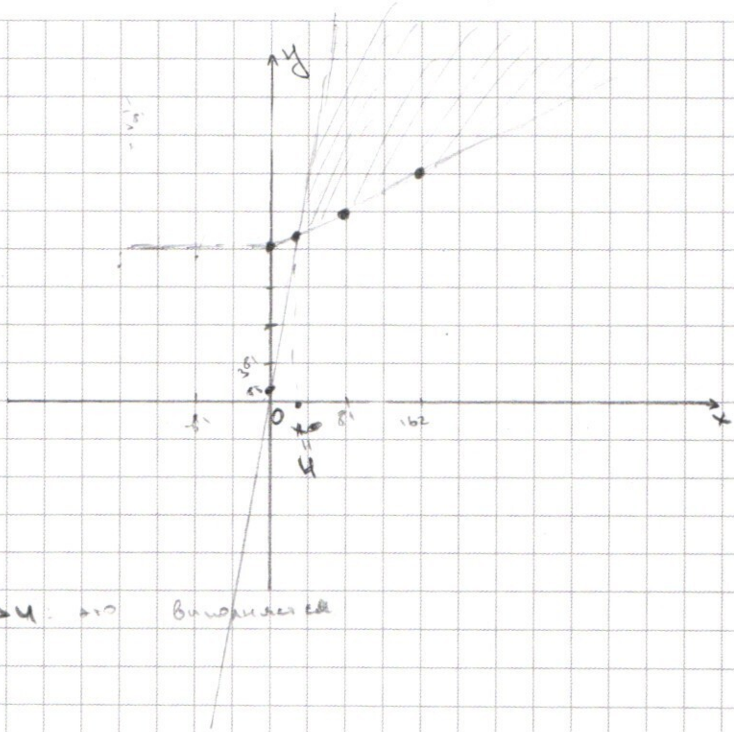
N 7

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1) \cdot x \end{cases}$$

$x = 81 \Rightarrow y < 85 \cdot 3^{81} \cdot 81 - 81$

$81 \cdot 3^{81} + 4$

при $x_0 = \ldots$ $y \geq$ $y <$



$x = 4 \Rightarrow$

$5^4 + 4 \cdot 3^{81} = 3^{81} \cdot 4$

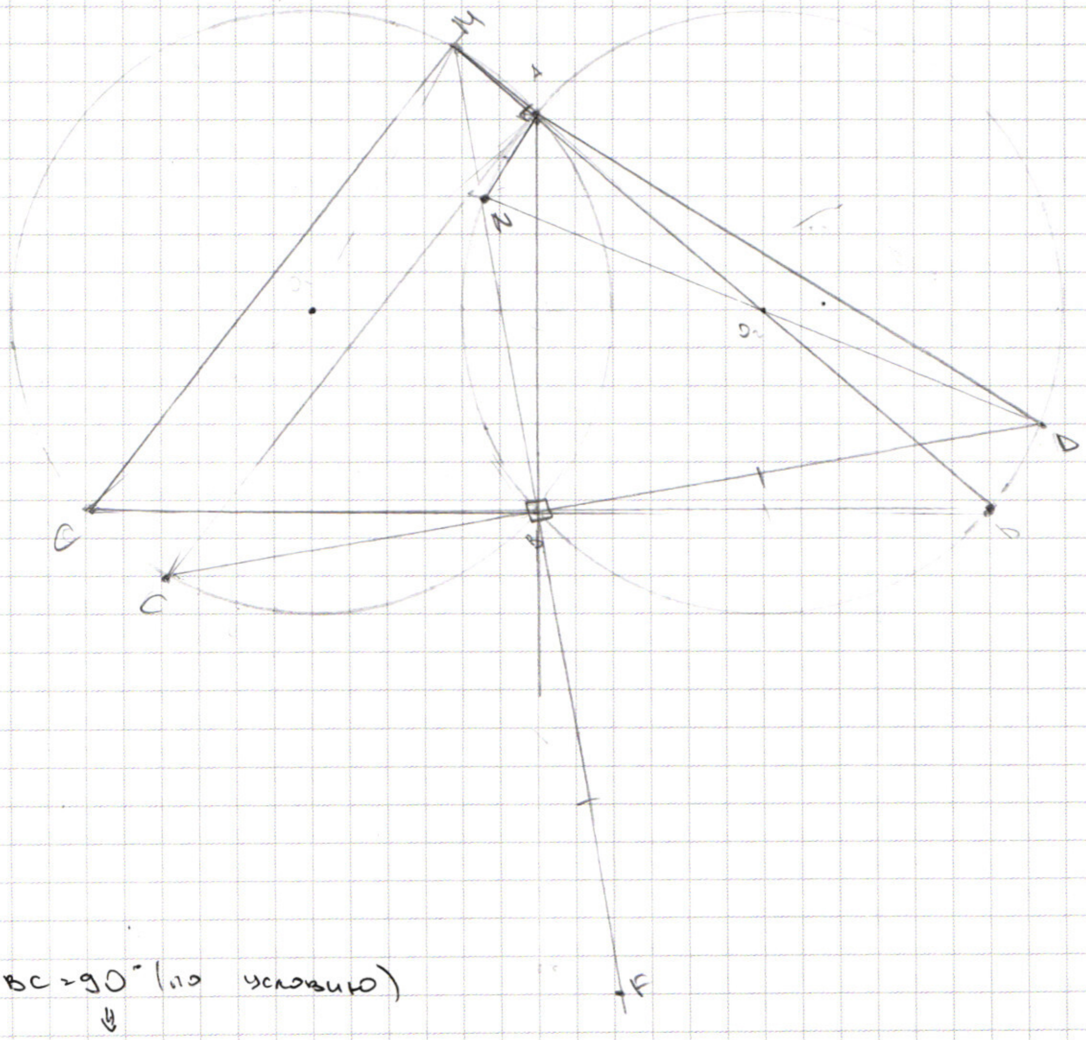
$85 + 3^{81} \cdot 4 - 4$

$= 4 \cdot 3^{81} + 81$

при x_0

при $x_0 \geq 4$: это выполняется

№6



а) $\angle MBC = 90^\circ$ (по условию)

$\Downarrow$

MC – диаметр.

Тогда $\angle MAC = 90^\circ$, но по условию $\angle CAD = 90^\circ \Rightarrow$ точки M, A и D лежат на одной прямой.

~~Так как~~ Проведем DN – диаметр второй окружности.

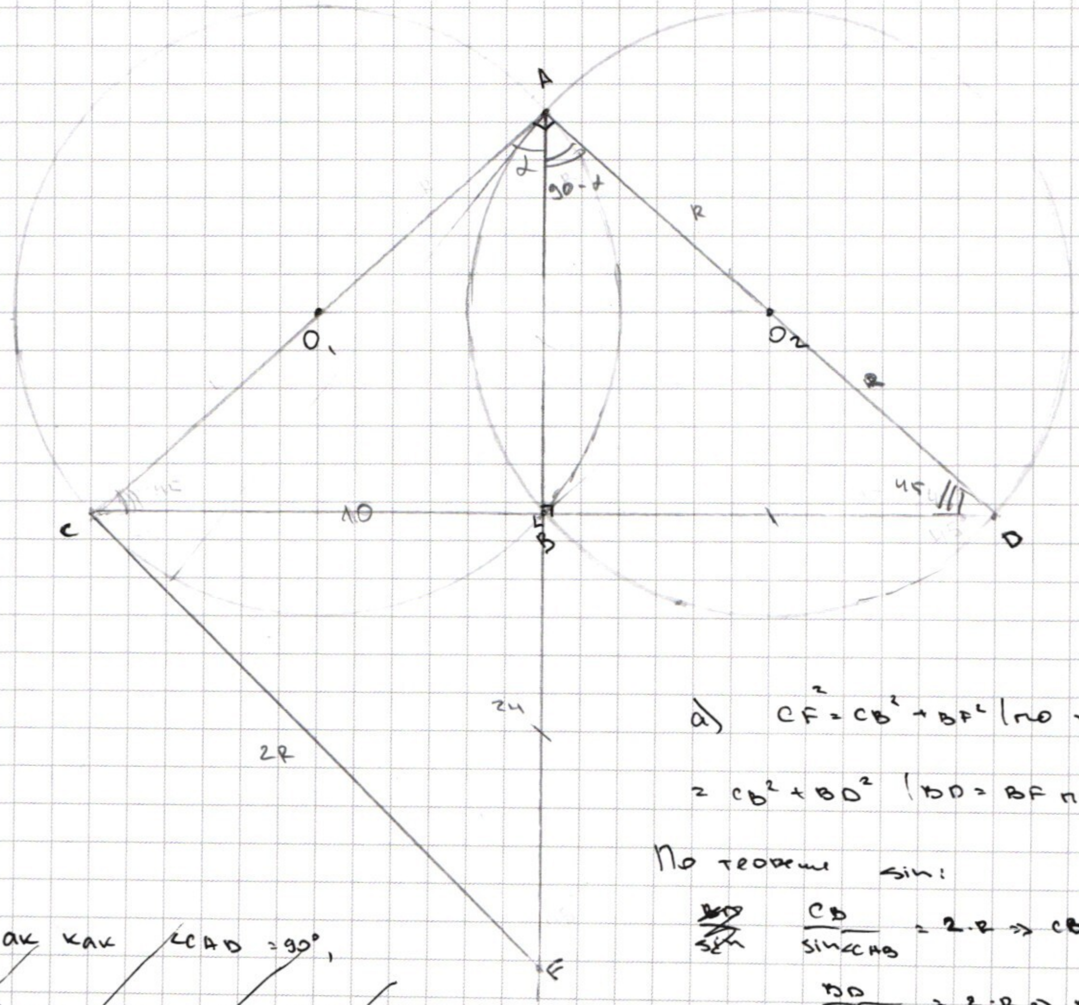
$N \in MB$ и $N \in DO_2$ (так как $\angle MBD = 90^\circ$, а $\angle NBD = 90^\circ$, так как опир. на диаметр). Тогда $\angle NAD = 90^\circ$, так как опирается на диаметр, получаем противоречие, так как $\angle CAD = 90^\circ$ и $\angle NAD = 90^\circ \Rightarrow$ прямые AN и CA совпадают и AD является диаметром окружности.

Следовательно, ~~рис~~ рисунок будет таким:

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



а) $CF^2 = CB^2 + BF^2$ (по теор. Пифагора) $= CB^2 + BD^2$ ($BD = BF$ по условию)

По теореме sin:

$\frac{CB}{\sin\angle CAB} = 2\cdot R \Rightarrow CB = 26\sin\alpha$

$\frac{BD}{\sin(90-\alpha)} = 2\cdot R \Rightarrow BD = 26\cos\alpha$

~~Так как $\angle CAD = 90°$, $CA = AD = 2R$, то $\angle ACD = \angle ADC = 45°$~~

~~Тогда DB - медиана, высота и биссектрисса и $AB = BF = BD$~~

~~Также в $\triangle CAF$: CB - медиана и высота $\Rightarrow AC = CF = AD$. Тогда $CF = 2R = 13\cdot 2 = 26$~~

~~б)~~

Тогда $CF = \sqrt{CB^2 + BD^2} = \sqrt{26^2\sin^2\alpha + 26^2\cos^2\alpha} = \sqrt{26^2} = 26$

Ответ: $CF = 26$

б) $\angle ACB = \angle ADB$ (так как дуги равны, ибо между точками перес. двух окружностей заключены равные дуги этих окружностей).

$\angle ACB + \angle ADB = 90°$, тогда эти углы = по 45°.

- $BF = \sqrt{CF^2 - CB^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} \Rightarrow BF^2 = 26^2 - 10^2 = 676 - 100 = 576 \Rightarrow BF = 24 = 2BD$
- Тогда $AC = CD \cdot \cos\alpha \Rightarrow AC = (CB + BD) \cdot \cos\alpha$

$AC = (10 + 24) \cdot \cos\alpha = \frac{34}{\sqrt{2}} = 17\sqrt{2}$ $34 \cdot \cos\alpha$ $\sin\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{10}{17\sqrt{2}}\right)^2}$

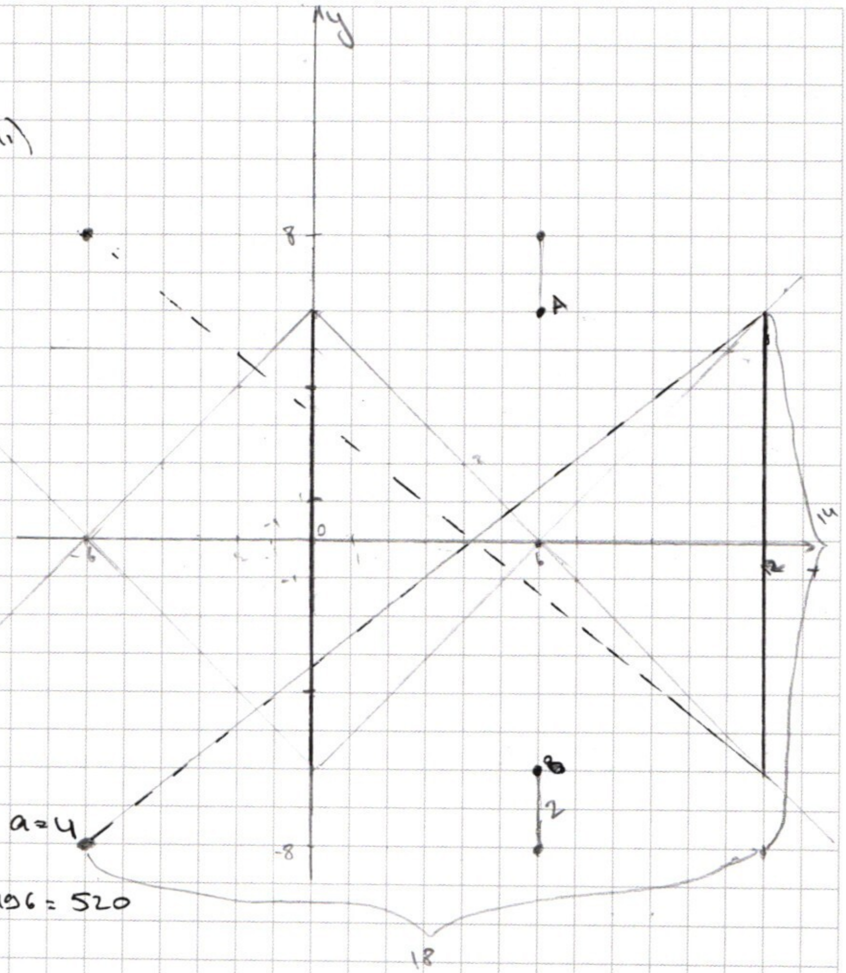
- ~~Тогда~~ $\cancel{S_{ACD}} =$ $AB = AC \cdot \sin 45 = 17\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 17.$

Тогда $S_{ACF} = \frac{1}{2} \cancel{\dots} \cdot \frac{1}{2} CB \cdot AF = \frac{1}{2} CB (AB + BF) = \frac{1}{2} \cdot \overset{5}{10} \cdot \overset{41}{(17 + 24)} = \overset{205}{\cancel{2040}}$

Ответ. $S = \cancel{2040}$ 205

№5

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 & (1) \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a & (2) \end{cases}$$



~~Прямые в точки~~

~~A~~ Прямые, нарисованные чёрной ручкой - решения 1-го уравнения + точки на графике.

~~Решениями~~ Решениями 2-го уравнения будут окружности с $R = \sqrt{a}$

Тогда ~~a~~ значения

будут только при $\sqrt{a} = 2 \Rightarrow a = 4$

также $a = 18^2 + 14^2 = 324 + 196 = 520$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} \cancel{\text{при } a = 4} \\ \cancel{\text{при } a = 520} \end{array}\right.$ при $a = \{4; 520\}$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\frac{8}{1!} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4!}$ $8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 280$

a b c d e f g h

1 6 8 7 5 | 5
3 3 7 5 | 5
6 7 5 | 5
1 3 5 | 5
2 7 | 3
9 | 3
3 | 3
1 | 1

2 2 2 1
5 5 5 3 3 3 1
5 5 5 9 3 1 1

1 | 2 2 2 1 1 1 1
1 3 5 5 5 5 5 5

$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

5 1 2
3 1
1 5
1 3

$\frac{4\pi+\pi}{8} = \frac{5\pi}{8}$

$3{,}5x = \frac{5\pi}{8} + \pi k$

$x = \frac{5\pi}{8 \cdot 3{,}5} + \frac{\pi k}{3{,}5}$

$\frac{5}{28}$

№2

$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$

$2\cos 5x \cos 2x - \sqrt{2}\cos 10x = 2\sin 5x \cos 2x$

$2\cos 2x\,(\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2}\cos 10x$

$\cos 5x + \sin(-5x)$

$2\sin\frac{\pi}{2} \ldots \cos\frac{\pi}{2}$

$\frac{5\pi}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{5 \cdot 7}{8 \cdot 7} \quad \frac{5}{28}$

$2\cos 2x$

$\cos 7x + \cos 3x = 2\cos 5x \cos 2x$

$\sin 7x + \sin 3x = 2\sin 5x \cos 2x$

$2\cos 2x = \sqrt{2}\,(\cos 5x - \sin 5x)\,(\cos 5x + \sin 5x)$

$\frac{\frac{5\pi}{8}}{3{,}5}$ $\frac{5}{12}$

$\cos 5x + \sin 5x$

$\cos 5x + \sin(\frac{\pi}{2} \ldots)$

$\sin 5x + \frac{\pi}{4}\cos(x - \frac{\pi}{4})$

$2\cos 2x = \sqrt{2}\,(\cos 5x + \sin 5x)$

$(\cos 5x - \sin 5x)(2\cos^2 x - \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}))$

$\lg y = \frac{1}{\log_y 10}$

$y^{-2\lg y} =$

$y^{-2\lg\frac{1}{y}}$

$y^{\frac{2}{\log_y 10}}$

№3

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} & (1) \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 & (2) \end{cases}$$

2) $2y^2 - y(x+8) - (x^2+4x) = 0$

$-x^2 - x(y+4) + (2y^2 - 8y) = 0$

$x^2 + x(y+4) - (2y^2 - 8y) = 0$

$D = y^2 + 8y + 16 + 8y^2 - 32y = 9y^2 - 24y + 16 = (3y+4)^2$

$x = \frac{-y-4 \pm (3y+4)}{2}$ $\left[\begin{array}{l} x = y \\ x = -2y - 8 \end{array}\right.$

$\lg(-xy) \ldots \quad -xy > 0$

если $x = y$, $\ldots$ $-x^2 > 0$ — не подходит

$x = (-2y-8)$, $y = 2y^2 - 8y$ $(-x)^{\lg y} \cdot x^{\lg y}$

$\ldots x^{\lg y} \cdot (-x)^{\lg y} = 1 + (-x)^{\lg y}$

$\frac{x^{4\lg y}}{y^{2\lg y}} = 1 + (-x)^{\lg y}$ $x^{4\lg y} \cdot y^{-2\lg y} = 1 + (-x)^{\lg y}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

№5

$$\begin{cases} |(x-6)-y|+|(x-6)+y|=12 \\ (|x|-6)^2+(|y|-6)^2=a \end{cases}$$

$|a-b|+|a+b|=12$

$x-6-y>x-6+y>0$

$2y<0$ >0

$2y=12$

$y=6$

$\begin{cases} x=6 \\ y=6 \end{cases}$ реш 1 ч.

$x-6-y>x-6+y$

$-y-y>$ $y<0$

$x-6+y>0$ $x-6>-y$

$|x-6-6|+|x-6+6|=12$

$((x-6)-y)^2+((x-6)+y)^2+2((x-6)^2-y^2)=144$

$(x-6)^2-2(x-6)y+y^2+(x-6)^2+2(x-6)y+y^2+2(x-6)^2-2y^2=144$

$4(x-6)^2=144$

$(x-6)^2=36$

$x-6=\pm 6$

$x=12$ $|6-y|+|6+y|=12$ - выполняется для $-6\le y\le 6$

$|-6-y|+|-6+y|=12$

$|y+6|+|y-6|=12$ для $-6\le y\le 6$ $\left[\begin{array}{l} x=12 \\ x=0 \end{array}\right.$

$|x-|y+6||+|x+|y+6||=12$ $\left[\begin{array}{l} x=12 \\ x=0 \end{array}\right.$

$|a-b|+|a+b|=12$

$a>b>0$ $a,b>0$ $a-b>0$

$a>b$

$a-b+a+b=$

$2a=12$ $a=6$

$y+6>0$

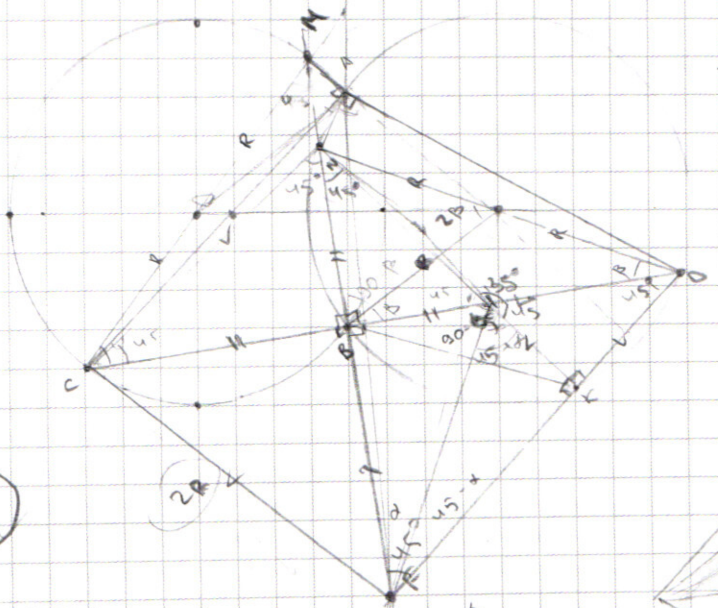
$y>-6$

при $y>-6$ и $x>y$ $x=6$ при $-x<y<6$ $x=6$

$\log_{10}100=2$

$\log_{10}\frac{1}{100}=-2$

№6.

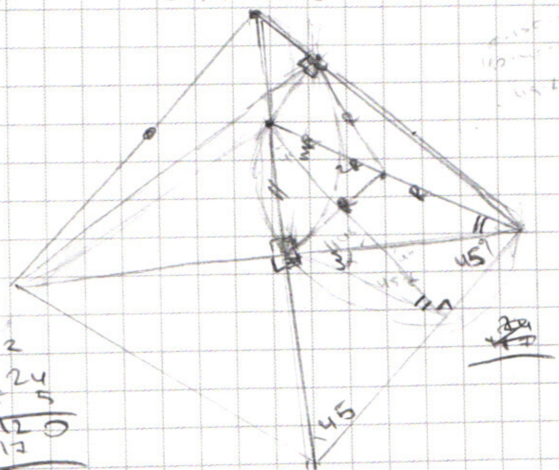


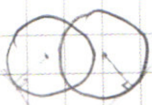
$R=13$

$24+17$; $24+17=41$

BFDLK

$FB\cdot FN=DB\cdot DC$





576

$18\cdot18=144+18 = 324$

$14\cdot14=56+14=196$

$24\cdot24=96+48=576$

$324+196=520$

$26\cdot26=156+52=676$

$24\cdot5=120$, $120\cdot17=840+120=2040$

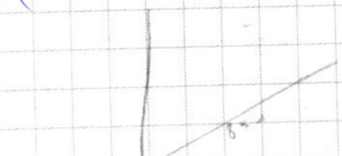
$$\begin{cases} y\ge 3^x+4\cdot3^{81} \\ y<85+(3^{81}-1)\cdot x \end{cases}$$

$85+(3^{81}-1)x$ $\underbrace{3^x+4\cdot3^{81}}_{\text{всегда}>0}$

Так как $3^x+4\cdot 3^{81}$ всегда >0, то

$3^x+4\cdot3^{81}>85+(3^{81}-1)\cdot x$

$3^x+4\cdot3^{81}-85-3^{81}x+x>0$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)