

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО М.

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФ:

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

$$x = -2y$$

$$\left(\frac{16y^2}{y^2}\right)^{\lg y} = (2y)^{\lg(2y^2)}$$

$$\lg(2y) = \lg 2 + \lg y$$

$$16 \cdot y^{2\lg y} = 2^{\lg 2y} \cdot y^{2\lg 2y}$$

$$2^{\lg 2} \cdot y^{2\lg 2} = 4^{\lg y}$$

$$4^{\lg 2} \cdot y^{2\lg 2} = 4^{\lg y} \cdot 4^{\lg 2} = 4^{\lg(\frac{y}{2})}$$

$$\lg_{10} 2 = \frac{1}{\lg_2 10}$$

$$x^{\frac{1}{\lg 10}} = x^{\frac{1}{\lg_2 10}}$$

$$x = y - 4$$

$$\left(\frac{(y-4)^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (y-4)^{\lg((y-4)y)}$$

$$\frac{1}{y} = y^{-2}$$

$$\left(\frac{y-4}{y}\right)^{\lg y} \cdot y^{-2\lg y} = (y-4)^{\lg((y-4)y)}$$

$$(y-4)^{\lg y - \lg((y-4)y)} = y^{2\lg y}$$

$$(y-4)^{\lg \frac{y^3}{(y-4)}} = y^{2\lg y}$$

$$(y-4)^{\lg \frac{y^3}{(y-4)}} = y^{2\lg y}$$

$$\frac{1.5}{2} = 10$$

$$1, 1, 1, 2, 2$$

$$\begin{array}{c} 11122 \\ 11212 \\ 11221 \\ 12112 \\ 12121 \\ 12211 \\ 21112 \\ 21121 \\ 21211 \\ 22111 \end{array}$$

$$x^2 + 36 - 12|x| + y^2 + 64 - 16|y| - a = 0$$

$$1) x \geq 0$$

$$x^2 - 12x + y^2 - 16|y| + 100 - a = 0$$

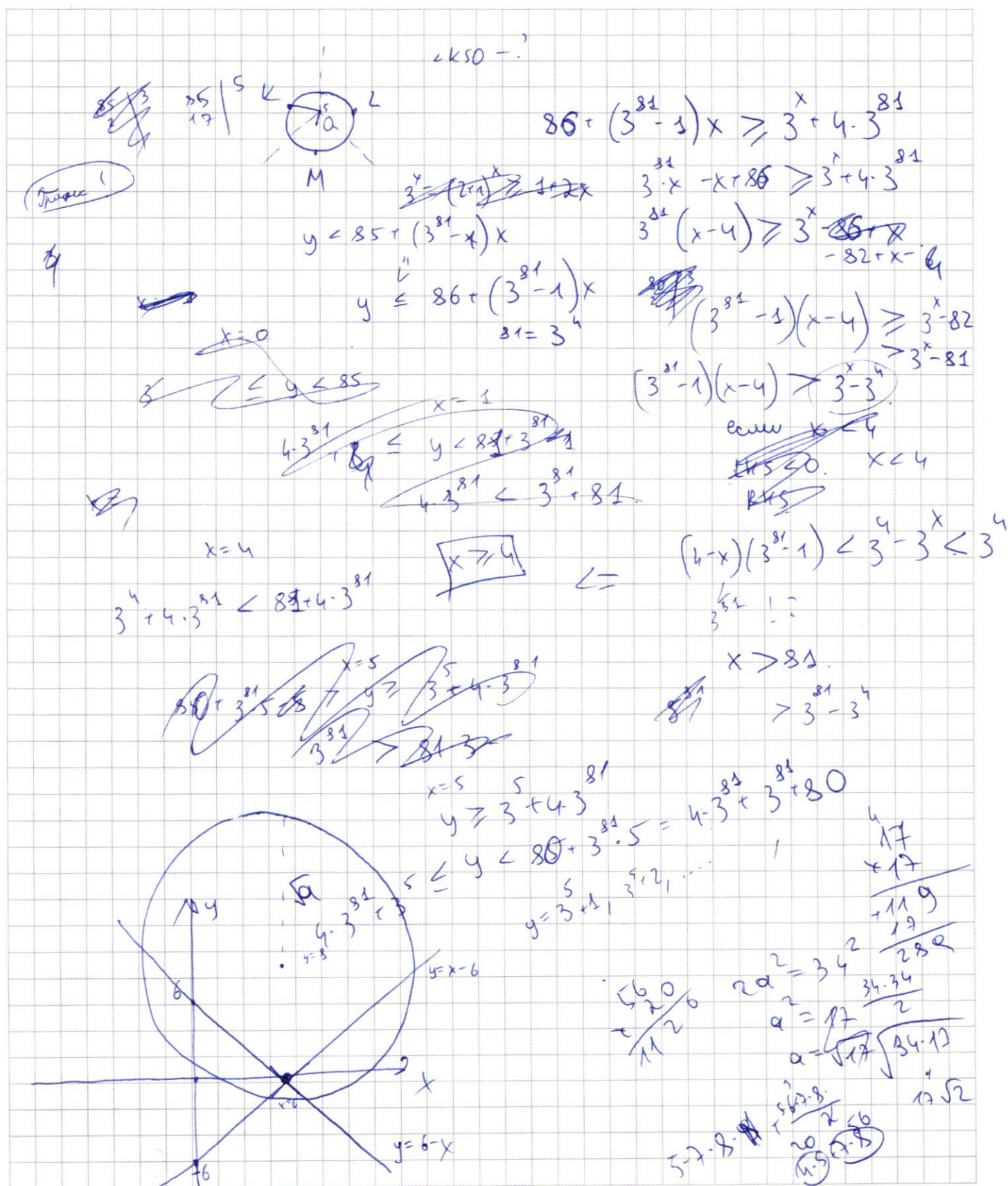
$$D = 144 - 4y^2 + 64|y| - 400 + 4a$$

$$\frac{1}{\lg_{10} 10}$$

$$\lg(-x) \cdot \lg y$$

$$\lg(-x) \cdot \lg(-x)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$B: \begin{cases} y \leq 6-x \\ y \geq x-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-6+y \leq 0 \\ x-6-y \leq 0 \end{cases}$$

Решение ур-я (1) на в данной области: $6-x-y=12$

$$\begin{cases} x=0 \\ -6 < y < 6 \end{cases}$$

таким образом, ~~тогда~~ где C и D:

$$C: \begin{cases} y \leq x-6 \\ y \leq 6-x \end{cases} \quad \begin{cases} x-6-y \geq 0 \\ x-6+y \leq 0 \end{cases}$$

$$D: \begin{cases} y \leq x-6 \\ y \geq 6-x \end{cases} \quad \begin{cases} x-6-y \geq 0 \\ x-6+y \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Решение (1): } \begin{cases} x-6-y-x+6-y=12 \\ y=-6 \quad 0 \leq x \leq 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-6-y+x-6+y=12 \\ x=12 \\ -6 < y < 6 \end{cases}$$

Итого, все решение ур-я (1) (выделено жирным цветом на рисунке) — квадрат ^{XYZT} с вершинами в точках $X(0;6)$, $Y(12;6)$, $Z(12;-6)$, $T(0;-6)$

Для ур-я (2) рассмотрим 4 случая:

$$1. \begin{matrix} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{matrix} \Rightarrow \text{ур-е (2): } (x-6)^2 + (y-8)^2 = a = R^2$$

ур-е окружности с центром в точке $(6,8)$ и радиусом R .

(Заметно, что $a \geq 0$, иначе окруж. либо вообще не существует.)

$$2. \begin{matrix} x \geq 0 \\ y < 0 \end{matrix} \Rightarrow (2): (x-6)^2 + (y+8)^2 = a = R^2 \rightarrow \text{ур-е окр. с центром в } (6;-8) \text{ и радиусом } R$$

$$3. \begin{matrix} x < 0 \\ y \geq 0 \end{matrix} \Rightarrow (2): (x+6)^2 + (y-8)^2 = a - \text{ур-е окр. с центром в } (-6;8) \text{ и радиусом } R$$

$$4. \begin{matrix} x < 0 \\ y < 0 \end{matrix} \Rightarrow 2: (x+6)^2 + (y+8)^2 = a - \text{ур-е окр. с центром в } (-6;-8) \text{ и радиусом } R$$

обозначим d — расстояние от центра W_1 до стороны XZ и YZ ^{и радиусов R_1 и R_2} соответственно, d — расст. от центра W_2 до стор. ZT и XY .

Заметим, что если радиусы W_1 и $W_2 = R_1 = R_2 > d$, то у исходной системы $\rightarrow$ 2 решения (м.к. точек пересечения будет ≥ 4).

Итак, если радиусы W_1 и $W_2 = R_1 = R_2 < d$, то у исходной системы вообще не будет решений (W_3 и W_4 также не пересекают $XYZT$).

$$\Rightarrow R = d = \sqrt{(6-6)^2 + (8-6)^2} = 2 \Rightarrow a = 4$$

Решительно, при $a=4$ ~~тогда~~ два решения — это:

$$\begin{cases} x=6 \\ y=6 \end{cases}$$

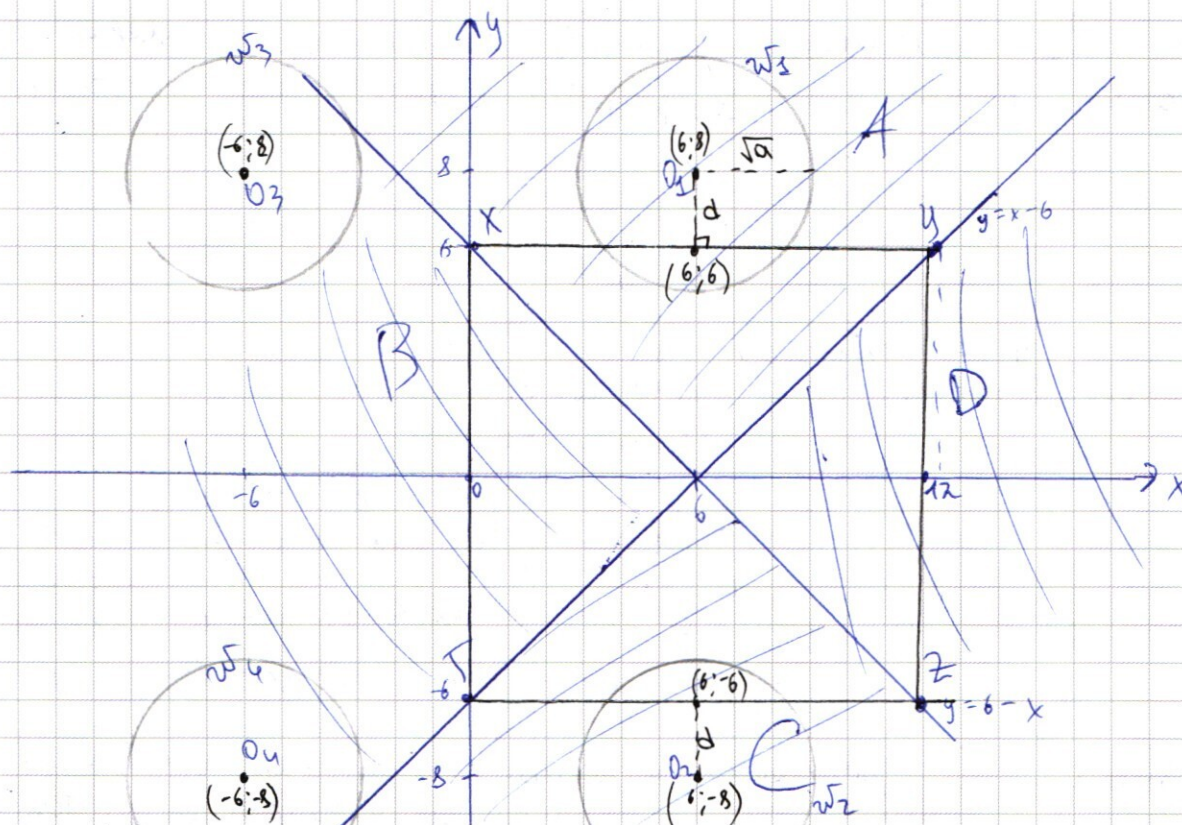
$$\begin{cases} x=-6 \\ y=-6 \end{cases}$$

Ответ: 4.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12, & (1) \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a. & (2) \end{cases}$$

Рассмотрим прямые $y = x-6$ и $y = 6-x$ на координатной плоскости:



Рассмотрим значения x и y в частях плоскости A, B, C, D на которые разбивает плоскость прямые $y = x-6$ и $y = 6-x$.

$$\begin{aligned} A: \quad & \begin{cases} y \geq x-6 \\ y \geq 6-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-6-y \leq 0 \\ x-6+y \geq 0 \end{cases} \\ & \begin{cases} y \geq x-6 \\ y \geq 6-x \end{cases} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Решениями ур-я (1) на данном участке плоскости будут:

$$y+6-x + x-6+y = 12 \Rightarrow \boxed{y=6, 12 \geq x \geq 0} \quad (\text{на рисунке отмечены черным цветом})$$

В случае $\nabla \nabla \nabla O_1 T$ (то есть w_1 и w_2 не пересекают $x y z t$)
 рассмотрим, когда w_3 и w_4 пересекают $x y z t$
 равно в одной точке:

$$R = \sqrt{a} = 03z. \left(\begin{array}{l} \text{no eqns } w_3 \wedge xyzt = z \\ w_4 \wedge xyzt = y \end{array} \right)$$

$$O_3Z = \sqrt{(12+6)^2 + (8+6)^2} = \sqrt{18^2 + 14^2} = \sqrt{324 + 196} = \sqrt{520}$$

$$\Rightarrow a = 520$$

$\Rightarrow a = 320$.
и равно два решения системы — это: $\begin{cases} x = 12 \\ y = -6 \end{cases}$

При $R = \sqrt{a} > 0,37$, элемент не сумм

При $k = \sqrt{a} < 0,32$, решений будет $m > 2$.

Omben: $a = 4,520$.

$$\begin{aligned} & \sqrt[8]{7} \\ & y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ & y < 85 + (3^{81} - 1)x \\ & \Rightarrow 85 + 3 \cdot x - x > 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ & 3^{81}(x-4) > 3^x + x - 81 - 4 \\ & (x-4)(3^{81} - 1) > 3^x - 3^4 \\ & \text{при } x=4, \quad 0 > 0 - \text{применяем} \\ & \text{если } x < 4, \quad \text{то} \quad -(3^{81}-1) > (x-4)(3^{81}-1) > 3^x - 3^4 > -3^4 \\ & \Rightarrow \boxed{x \geq 5}. \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} & (1) \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 & (2) \end{cases}$$

Рассмотрим уравнение (2) как квадратное относительно переменной x :

$$x^2 + (4+y)x - 2y^2 - 8y = 0.$$

$$D = 16 + 8y + y^2 - 4(-2y^2 - 8y) = 9y^2 - 24y + 16 = (3y - 4)^2$$

$$\Rightarrow x = \frac{-4-y \pm |3y-4|}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-4-y-3y+4}{2} = -2y, \quad x_2 = \frac{-4-y+3y-4}{2} = y-4.$$

1. $x = -2y$:

$$\left(\frac{16y^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (2y)^{\lg(2y^3)}$$

$$\Rightarrow (16y^2)^{\lg y} = (2y)^{\lg(2y^2)} = (2y)^{2(\lg 2 + \lg y)}$$

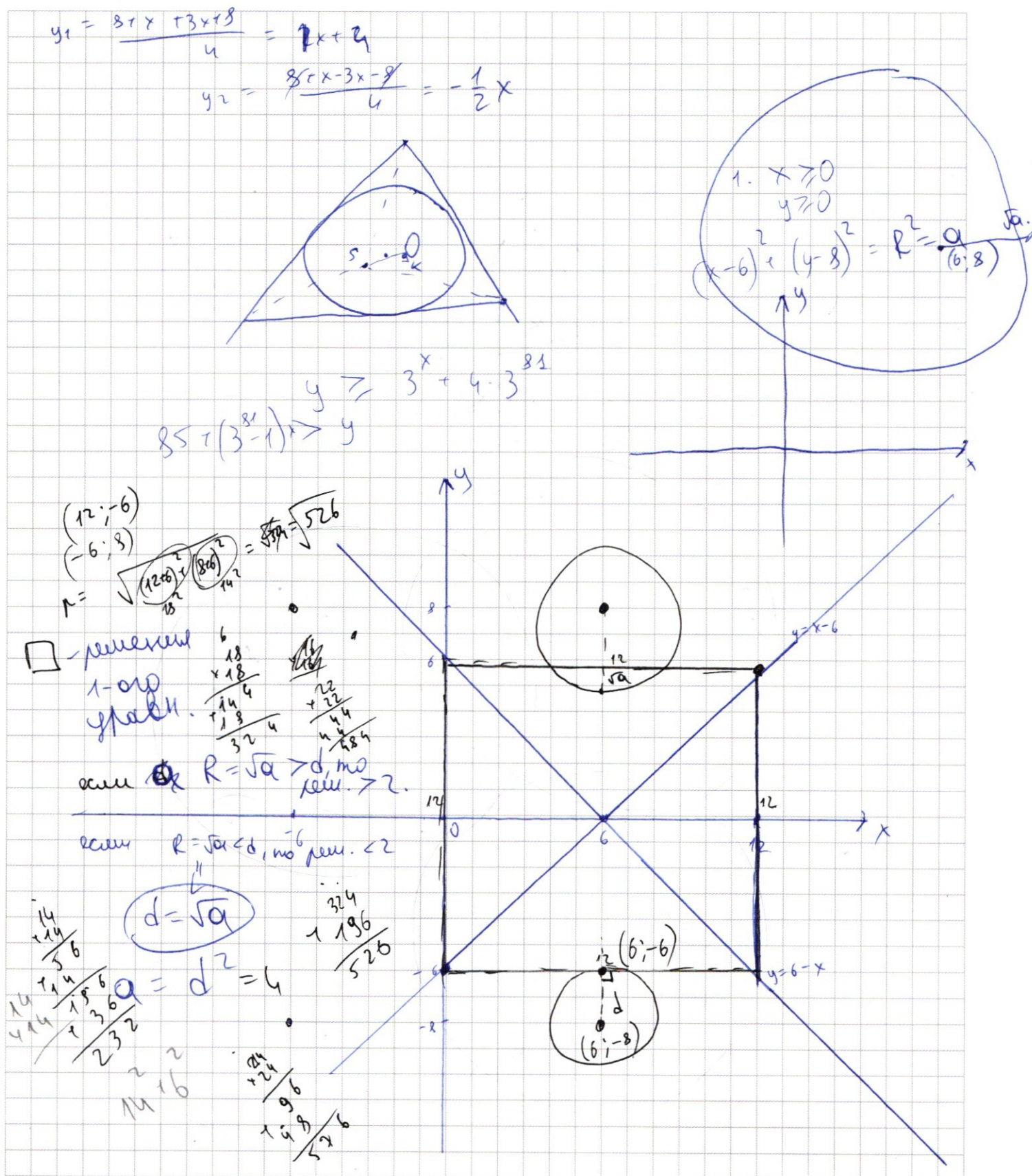
$$2^{4\lg y} \cdot y^{2\lg y} = 2^{2\lg 2} \cdot 2^{2\lg y} \cdot y^{2\lg 2} \cdot y^{2\lg y}$$

$$2^{2\lg y} = 2^{2\lg 2} \cdot y^{2\lg 2}$$

$$2^{2\lg(\frac{y}{2})} = y^{2\lg 2}$$

$$2^{\lg(\frac{y}{2})} = y^{\lg 2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$(x, y) \in \mathbb{Z}$$

$$y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{x-1}$$

$$85 + (3^x - 1)x > y$$

$$85 + 3^{x-1} \cdot x - x > 3^x + 4 \cdot 3^{x-1}$$

$$3^{x-1}(x-4) > 3^x + x - 85 = 3^x + x - 4 - 81$$

$$(x-4)(3^{x-1}-1) > 3^x - 3^4$$

$$\text{если } x \leq 4$$

$$1 - 3^4 > (x-4)(3^{x-1}-1) > 3^x - 3^4 \geq -3^4$$

$$! \Rightarrow \boxed{x \geq 5}$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

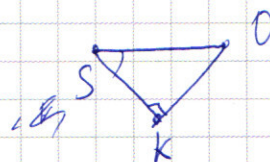
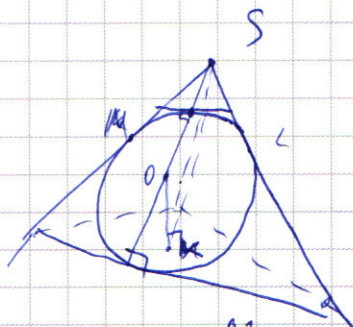
$$\cos 2-5x$$

$$(2\cos^2 5x - 1)$$

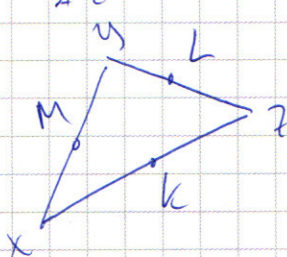
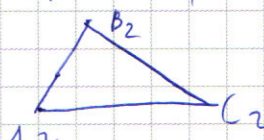
$$\text{при } x=4$$

$$0 > 0$$

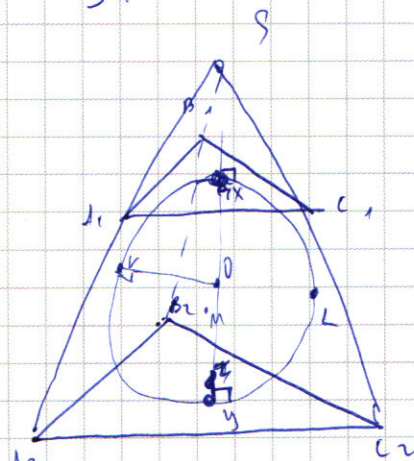
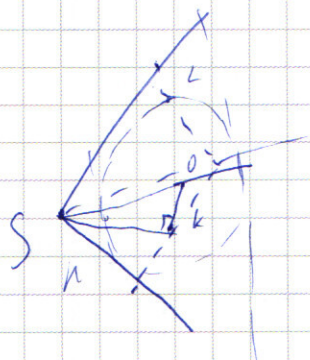
$$\cos 5x \sin 2x - \sqrt{2} (2\cos^2 5x - 1) = \sin 5x \cos 2x$$



1-е сечение
2-е сечение



$$k = \frac{4}{9}$$



$$\frac{SB}{SB_2} = \frac{SO}{SY} = \frac{SX + 2r}{SX + 2r} = \frac{8}{13}$$

$$\text{ctg } KSO = \frac{OS}{SK} = \frac{OS}{OS} = 1$$

$$\frac{OS}{OC} = \frac{SK + r}{r} = \frac{r + SX}{r} = \frac{SX}{r} + 1 = \frac{8}{5} + 1 = \frac{13}{5}$$

$$\frac{SX}{SY} = \frac{4}{9}$$

$$\frac{SX}{SX + 2r} = \frac{4}{9}$$

$$\frac{SX + 2r}{SX} = \frac{9}{4}$$

$$1 + \frac{2r}{SX} = \frac{9}{4}$$

$$\frac{2r}{SX} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{r}{SX} = \frac{5}{8}$$

$$\frac{SX + 2r - r}{SX + 2r} = \frac{r}{SX + 2r}$$

$$= 1 - \frac{r}{SX + 2r}$$

$$\frac{SX}{r} + 2 = \frac{1}{\frac{r}{SX + 2r}} = \frac{SX + 2r}{r} = \frac{SX}{r} + 2$$

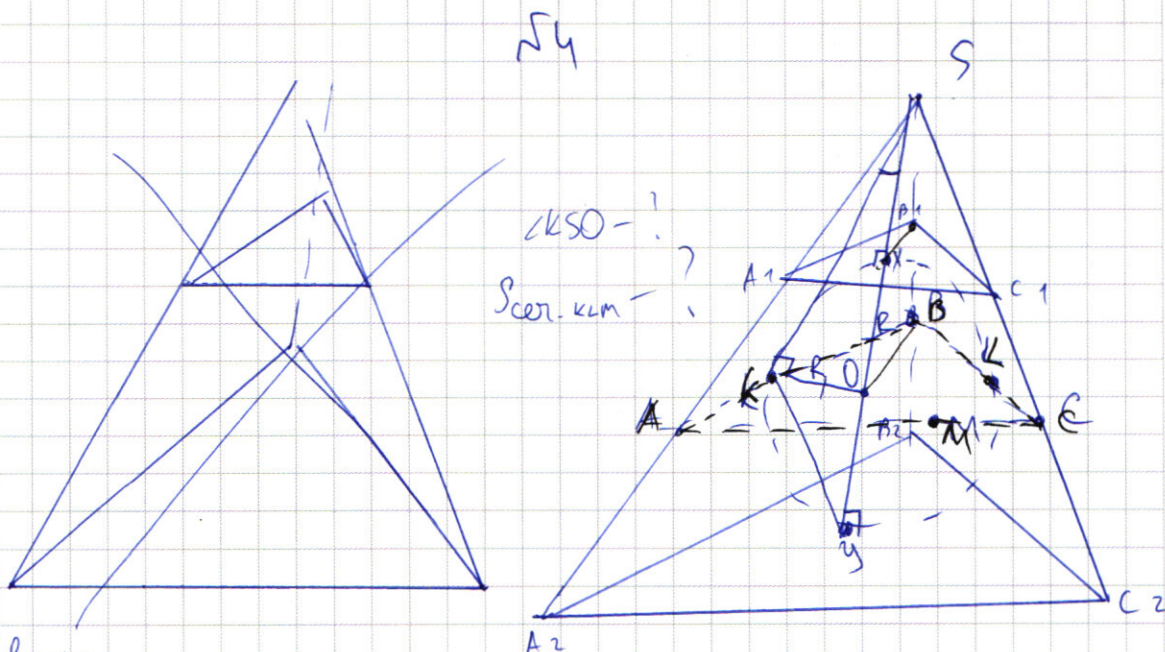
$$\frac{25}{8}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

м.к. по условию $S_{A_1B_1C_1} = 4$, то

$$S_{ABC} = \frac{25}{16} \cdot 4 = \frac{25}{4}$$

Ответ: $\angle KSO = \arccos \frac{5}{13}$, $S_{ABC} = \frac{25}{4}$.



1) По условию,
 $\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{A_2B_2C_2}} = \frac{4}{9} \Rightarrow$ коэффициент подобия $\Delta A_1B_1C_1$ и $\Delta A_2B_2C_2$

$$k = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{SA_1}{SA_2} = \frac{SX}{SY} = \frac{2}{3}$$

$$\Delta SA_1X \sim \Delta SA_2Y \Rightarrow \frac{SX}{SY} = \frac{A_1X}{A_2Y} = \frac{2}{3}$$

2) $\operatorname{ctg} \angle KSO = \frac{OS}{OK} = \frac{SX+R}{R} =$
 $= \frac{SX}{R} + 1 = 5$

$\Rightarrow \angle KSO = \arccos \operatorname{ctg} 5.$

$$\frac{SX}{SX+2R} = \frac{2}{3}$$

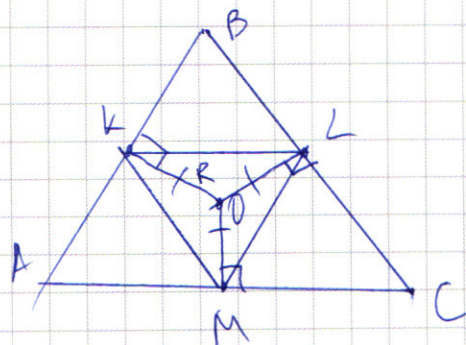
$$\frac{SX}{SX} + \frac{2R}{SX} = \frac{3}{2}$$

$$1 + \frac{2R}{SX} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{2R}{SX} = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{R}{SX} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{SX}{R} = 4$$

3) Середины сторон треугольника KLM:



рез $A \in SA_2$
 $B \in SB_2$
 $C \in SC_2.$

$\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_2B_2C_2$
 O - центр вписанной окружности $\Delta ABC.$

4) $k_1 = \frac{SO}{SB_1} = \frac{SO}{SB_2} = \frac{SO}{SX} = 1 + \frac{R}{SX} = \frac{5}{4} \Rightarrow R = \frac{S_{ABC}}{P_{ABC}}$
 Коэффициент подобия ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1 \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8$$

$$\frac{8!}{1 \times 1} = \frac{5 \cdot \cancel{6} \cdot 7 \cdot 8}{\cancel{6}} = 5 \cdot 7 \cdot 8$$

Возможные

каждого
человека.

$$\{1, 3, 9, 5\}$$

1223

$\cos 2\alpha$

$$\cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \sin \alpha =$$

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2 \sin 5x \cdot \cos 2x$$

$$2 \cos 5x \cdot \sin 2x - \sqrt{2}(2 \cos^2 5x - 1) = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$\cos(3x+7x) = \cos 3x \cdot \cos 7x - \sin 3x \sin 7x$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 3x \cos 7x + \sqrt{2} \sin 3x \sin 7x = \sin 2x + \sin 3x$$

$$n = \frac{24}{2}$$

$$\left(\frac{x}{y^2}\right)^{\log y} = (-x)^{\log(-x)}$$

$$2xy^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$-xy > 0$$

$$(16y^2)^{\log y} = (2y)^{\log 2y}$$

$$x = -2y$$

$$3y - 4 \left(\frac{2y}{x} \right) =$$

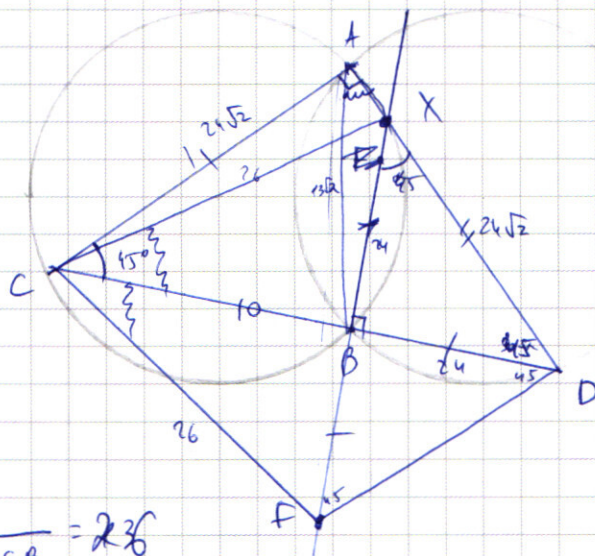
$$= (2y)^2 (2y^2)$$

$$\begin{aligned} (16y^2) &= (2y) \cdot (4y) \\ 2y^2 - (8+x)y - x^2 - 4x &= 0 \\ x^2 + (4+y)x + 8y - 2y^2 &= 0 \\ \Delta &= 16 + y^2 + 8y - 4(8y - 2y^2) = y^2 + 8y - 32y + 8y^2 + 16 = \\ &= 9y^2 - 24y + 16 = (3y-4)^2 \end{aligned}$$

$$y - 64 + x^2 + 16x - 8(-x^2 - 4x) = x^2 + 16x + 64 + 8x^2 + 32x = 9x^2 + 48x + 64 = (3x + 8)^2$$

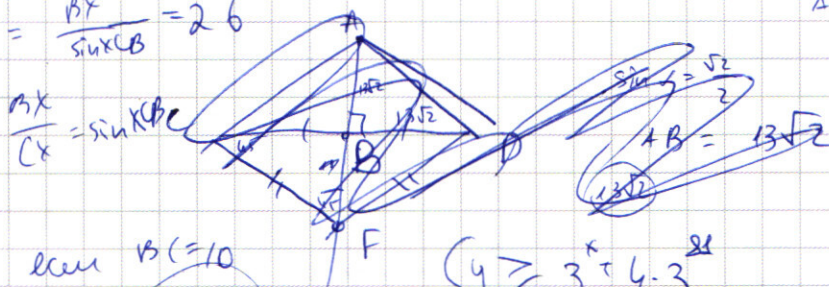
$$x = \frac{-(-4+y) \pm \sqrt{3y-4}}{2}$$

1. $3y - 4 \geq 0$
 $y \geq \frac{4}{3}$
 ~~$x = \frac{-4 - y + 3y - 4}{2}$~~
 $x = \frac{-4 - y + 3y - 4}{2} = y - 4$
 $3y - 4 < 0$
 $y < \frac{4}{3}$
 $x_1 = \frac{-4 - y + 3y - 4}{2} = y - 4$ $x_2 = -2y$



$$\frac{BX}{2 \sin \angle C B} = 236$$

$$CF = CX = \frac{BX}{\sin \angle C B} = 26$$



таким образом $BC=10$

$CF=26$

$$BX = \sqrt{26^2 - 100} = \sqrt{576} = 24$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 16 \\ \hline 96 \\ 156 \\ \hline 256 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 24 \\ \hline 96 \\ 156 \\ \hline 576 \end{array}$$

$$\begin{cases} y \geq 3 + 4 \cdot 3 \\ y < 85 + (3 - 1) \cdot x \\ 3 + 4 \cdot 3 < 3 \cdot x - x + 85 \end{cases}$$

$$S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot 24 \sqrt{2} \cdot 26 \cdot (\sin 45^\circ + \frac{1}{2}) =$$

$$= 12 \cdot 26 \cdot \sqrt{2} \left(\sin 45^\circ \cdot \frac{1}{2} + \cos 45^\circ \cdot \sin 9^\circ \right) =$$

$$= 12 \cdot 26 \cdot \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{5}{13} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{12}{13} \right) =$$

$$= 12 \cdot \sqrt{2} (5\sqrt{2} + 12\sqrt{2}) = 12 \cdot 17 \cdot 2 = 408$$

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = 0 \end{cases}$$

1) и 4)

$$\begin{aligned} x-6 &\geq 6-x \\ 2x &\geq 12 \\ x &\geq 6 \end{aligned}$$

$$x-6-y = x-6+y = 12 \Rightarrow x=12$$

$$6 \geq y \geq -6$$

$$36 + (|y|-8)^2 = 0$$

$$36 + y^2 + 64 - 16|y| = 0$$

$$y^2 - 16y + 100 - a = 0$$

2) и 3)

$$\begin{aligned} y-6-x + x-6+y &= 12 \\ y-6-x + x-6+y &= 12 \\ y &= 6 \end{aligned}$$

ровно 2 р-а

$$\begin{aligned} x-6-y &\geq 0 \\ 1) \quad x-6 &\geq y \\ x-6-y &< 0 \\ 2) \quad x-6 &< y \end{aligned}$$

$$x-6-y \geq 0$$

$$x-6 \geq y$$

3) $y \geq 6-x$

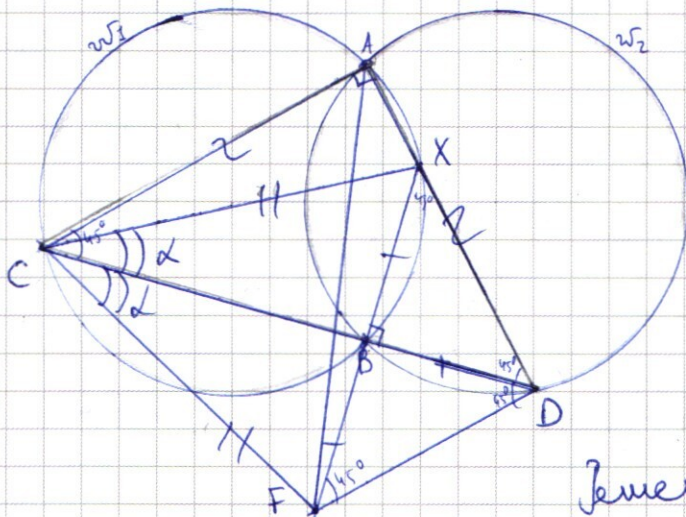
$$x-6-y < 0$$

4) $y < 6-x$

$$1) \text{ и } 2): x-6-y - x+6-y = 12 \Rightarrow y = -6$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6



$$w_1 \cap w_2 = A, B$$

$$R_{w_1} = R_{w_2} = 13$$

$$C \in w_1, D \in w_2$$

$$\angle CAD = 90^\circ$$

$$BF \perp CD, BF = BD$$

$$a) CF = ?$$

$$b) BC = 10, S_{ACF} = ?$$

Решение:

a) 1. По формуле радиуса опис. окружности для

$$\triangle ACB \text{ получаем: } \frac{AB}{2 \sin ACB} = R = 13$$

$$\frac{AB}{2 \sin ADB} = R = 13 \Rightarrow \sin ACB = \sin ADB = \sin(90^\circ - ACB) = \cos ACB$$

$$\Rightarrow \angle ACB = \angle ADC = 45^\circ \Rightarrow AB = 26 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 13\sqrt{2}$$

$$2. \text{ М.-к. } BF \perp CD, \text{ то } BF \cap w_1 = X \Rightarrow BF \perp AD$$

(по есть в силу того, что $AD \cap w_1 = X$)
 $\angle CAX = \angle XBC = 180^\circ$, то A, X, B, C - вписанной $\Rightarrow X \in w_1$, где $X = BF \cap AD$.

$$3. \text{ М.-к. } ACBX \text{ - впис., то } \angle BXD = \angle ACB = 45^\circ$$

$$\Rightarrow BD - \text{середина перпендикуляра к } XF$$

$$\Rightarrow CX = CF$$

$$4. \text{ Обозначим } \angle XCB = \alpha, \sin \alpha = \frac{BX}{CX} \Rightarrow CX = \frac{BX}{\sin \alpha}$$

по формуле радиуса опис. окруж. для $\triangle XCB$: $\frac{BX}{2 \sin \alpha} = 13 \Rightarrow \frac{BX}{\sin \alpha} = 26$

$$\Rightarrow CF = CX = 26$$

$$\delta) BC = 10$$

1. По теореме Пифагора для $\triangle CBX$:

$$BX = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24. \Rightarrow BD = BX = 24$$

2. М.к. в равнобедренном прямоугольном $\triangle CAD$ гипотенуза $CD = 34$, то катет $AC = 17\sqrt{2}$.

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{BX}{CX} = \frac{12}{13} \quad \cos \alpha = \frac{CB}{CX} = \frac{10}{13} = \frac{5}{13}$$

$$\begin{aligned} 3. \text{ Максим образом, } S_{ACF} &= \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CF \cdot \sin(45^\circ + \alpha) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 17\sqrt{2} \cdot 26 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos \alpha \right) = 17 \cdot 17 \cdot \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2} \cdot 12}{2 \cdot 13} + \frac{\sqrt{2} \cdot 5}{2 \cdot 13} \right) = \\ &= 17\sqrt{2} \left(\frac{17}{\sqrt{2}} \right) = 17^2 = 289 \end{aligned}$$

Ответ: а) $CF = 26$, б) $S_{ACF} = 289$.

51

$$A = \overline{a_1 a_2 \dots a_8}$$

$$a_1 \times \dots \times a_8 = 16875$$

Найти кол-во чисел A .

$$\begin{array}{r} 16875 \mid 3 \\ 5625 \mid 3 \\ 1875 \mid 3 \\ 625 \mid 5 \\ 125 \mid 5 \\ 25 \mid 5 \\ 5 \mid 5 \\ 1 \end{array}$$

$$a_1 \times \dots \times a_8 = 3^3 \cdot 5^4$$

М.к. $a_1, \dots, a_8$ — цифры, то каждая

из них может быть равна только числу

1, 3, 5 или 9.

М.к. их произведение $= 3^3 \cdot 5^4$, то все

возможные варианты для набора $\{a_1, a_2, \dots, a_8\}$

— это $\{1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5\}$ и $\{1, 1, 3, 5, 5, 5, 5, 9\}$.

Значит М.к. $\{a_i\}$ среди них должно быть ровно четыре

«3»-ки, «5»-ки $\leq$ одной «9»-ки.

Кол-во чисел будет равно кол-ву перестановок

элементов данных наборов без повторений: $\frac{8!}{3!4!} + \frac{8!}{2!4!} = 578 + 3578 = 2056 = 1120$

Ответ: 1120.