

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $16875 = 5^4 \cdot 3^3$ пятёрки в 8-ми клетках можно рас-
положить $C_8^4 = \frac{8!}{4! \cdot 4!}$ способами

тройки можно поставить в виде 3;3;3;1 или 3;9;1;1

$$N = C_8^4 (C_4^3 + 4 \cdot 3) = \frac{8!}{4! \cdot 4!} \left(\frac{4!}{3! \cdot 1!} + 12 \right) = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2} (4 + 12) =$$

$$= 10 \cdot 7 \cdot 16 = 1120 \quad \text{Ответ } N = 1120$$

2) $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x)$$

$$\begin{cases} \cos 5x = \sin 5x & \operatorname{tg} 5x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \cos 2x = \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x) & x \in \left\{ \frac{\pi k}{5} + \frac{\pi}{20}; k \in \mathbb{Z} \right\} \end{cases}$$

$$\sqrt{2} \cos 2x = \cos 5x + \cos \left(\frac{\pi}{2} - 5x \right) = 2 \cos \frac{\pi}{4} \cos \left(5x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\cos 2x = \cos \left(5x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\begin{cases} 2x = 2\pi k + 5x - \frac{\pi}{4} \\ 2x = 2\pi k - 5x + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x = 2\pi k + \frac{\pi}{4} \\ 7x = 2\pi k + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x = 2\pi k + \frac{\pi}{4} \\ 7x = 2\pi k + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Ответ

$$\begin{cases} x \in \left\{ \frac{\pi k}{5} + \frac{\pi}{20}; k \in \mathbb{Z} \right\} \\ x \in \left\{ \frac{2\pi k}{3} + \frac{\pi}{12}; k \in \mathbb{Z} \right\} \\ x \in \left\{ \frac{2\pi k}{7} + \frac{\pi}{28}; k \in \mathbb{Z} \right\} \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \left(\frac{x^2}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases} \quad y > 0 \quad x < 0$$

$$\frac{(-x)^{4\lg y}}{y^{2\lg y}} = (-x)^{\lg y + \lg(-x)}$$

$$(-x)^{4\lg y - \lg y - \lg(-x)} = y^{2\lg y}$$

$$(-x)^{3\lg y - \lg(-x)} = y^{2\lg y}$$

$$10^{\lg(-x)(3\lg y - \lg(-x))} = 10^{\lg y \cdot 2\lg y}$$

$$\lg(-x)(3\lg y - \lg(-x)) = 2\lg^2 y$$

$$2\lg^2 y - 3\lg y \lg(-x) + \lg^2(-x) = 0$$

$$\begin{cases} \lg y = 0 \Rightarrow \lg(-x) = 0 \\ \left(\frac{\lg(-x)}{\lg y}\right)^2 - 3\frac{\lg(-x)}{\lg y} + 2 = 0 \\ \lg y \neq 0 \end{cases}$$

$$y = 1; x = -1$$

$$\begin{cases} \frac{\lg(-x)}{\lg y} = 1; 2 \\ y \neq 1 \end{cases}$$

$$y = 1$$

$$2 - x - x^2 - 4x - 8 = 0$$

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$x = -2; -3 \quad (-2; 1)$$

$$(-3; 1)$$

~~не подходят~~

$$\begin{cases} \lg(-x) = \lg y \\ \lg(-x) = \lg y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x = y & x = -y \\ -x = y^2 & x = -y^2 \end{cases}$$

$$x = -y$$

$$2y^2 + y^2 - y^2 + 4y - 8y = 0$$

$$2y^2 - 4y = 0$$

$$2y(y - 2) = 0$$

$$y = 0; 2 \quad y > 0$$

$$y = 2 \quad x = -2$$

$$\text{Ответ} \quad (-2; 2)$$

$$(-4; 2)$$

$$\left(\frac{\sqrt{17}-2}{2}; \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$$

$$x = -y^2$$

$$2y^2 + y^3 - y^4 + 4y^2 - 8y = 0$$

$$-y^4 + y^3 + 6y^2 - 8y = 0$$

$$y(y^3 - y^2 - 6y + 8) = 0$$

$$y(y-2)(y^2+y-4) = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17 \quad y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$y = 0; \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}; 2 \quad y > 0 \Rightarrow y = 2; \frac{\sqrt{17}-1}{2}$$

$$x = -4; -\frac{18-2\sqrt{17}}{4}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$5) \begin{cases} |x-y-6| + |x+y-6| = 12 \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y \geq 6 \\ x+y \geq 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-12=12 & x=12 \\ y \in [-6; 6] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0; 12; y \in (-6; 6) \\ y = \pm 6; x \in [0; 12] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y \leq 6 \\ x+y \leq 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12-2x=12 & x=0 \\ y \in [-6; 6] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x=0; 12 & (|y|-8)^2 + 6^2 = a \quad y \in (-6; 6) \\ y=\pm 6 & (|x|-6)^2 + 2^2 = a \quad x \in (0; 12) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x-y \geq 6 \\ x+y \leq 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2y=12 & y=-6 \\ x \in [0; 12] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x=0; 12 & |y| = 8 \pm \sqrt{a-36} \quad y \in (-6; 6) \\ y=\pm 6 & x = 6 \pm \sqrt{a-4} \quad x \in (0; 12) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x-y \leq 6 \\ x+y \leq 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y=12 & y=6 \\ x \in [0; 12] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a=4 & \quad x=6 \quad y=\pm 6 \quad \text{2 решения} \\ \begin{cases} a > 4 \\ a < 36 \end{cases} & \quad y=\pm 6 \quad x = 6 \pm \sqrt{a-4} \\ & \quad \text{больше 2-x} \end{aligned}$$

$$a=36 \quad \text{больше 2x} \quad y=\pm 6 \quad x = 6 \pm \sqrt{32} \quad \text{больше 2x}$$

$$\begin{cases} a > 36 \\ a < 40 \end{cases} \quad y=\pm 6 \quad x = 6 \pm \sqrt{a-36} \quad \text{больше 2x}$$

$$a=40 \quad y=\pm 6 \quad x = 0; 12 \quad \text{больше 2x}$$

$$\begin{cases} a > 40 \\ a < 100 \end{cases} \quad x=0; 12 \quad y = \pm (8 - \sqrt{a-36}) \quad \text{больше 2x}$$

$$a=100 \quad y=0; \quad x=0; 12 \quad \text{2 решения}$$

$\alpha > 100$ нет решений

Ответ $\alpha = 4 \cdot 100$

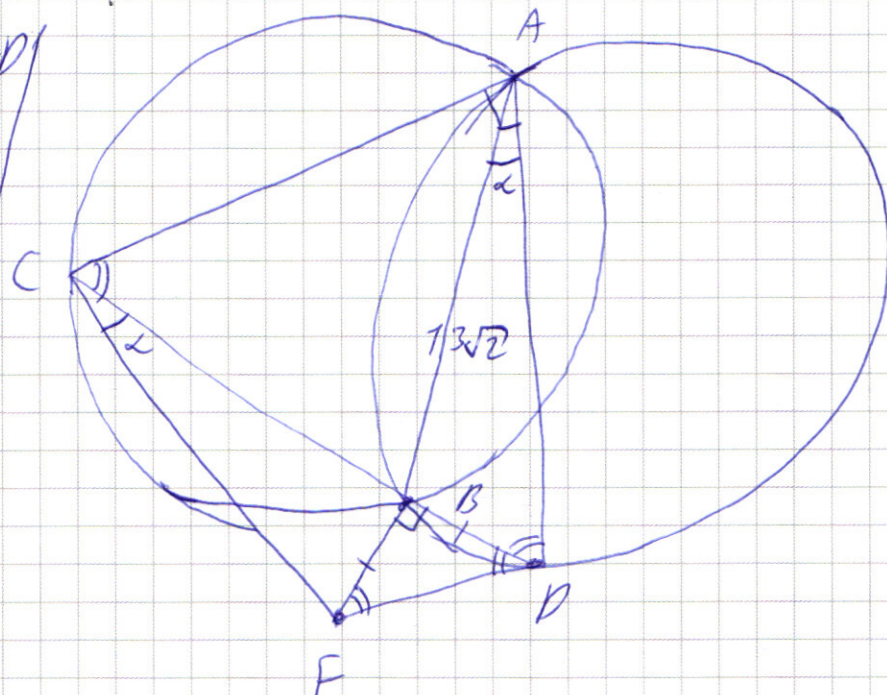
6) $R = 13$ $BF = BD$

$\angle CAP = 90^\circ$

5) $BC = 10$

a) $CF = ?$

5) $S_{ACF} = ?$



$$\frac{AB}{\sin \angle ACB} = 2R = \frac{AB}{\sin \angle ADC} \Rightarrow \angle ACB = \angle ADC = 45^\circ$$

$$AB = 13\sqrt{2}$$

$\angle BAD = \angle$

$$\frac{BD}{\sin \angle} = \frac{CB}{\sin(90^\circ - \angle)} \Rightarrow \tan \angle = \frac{BD}{BC} = \frac{FB}{BC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tan \angle = \tan \angle FCB \Rightarrow \angle FCB = \angle$$

$$\angle BFD = \angle BDF = 45^\circ \quad | \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle CFD \sim \triangle ABD \Rightarrow \frac{CF}{13\sqrt{2}} = \frac{FD}{BD} = \frac{BD\sqrt{2}}{BD} \Rightarrow CF = 26$$

a) Ответ 26

5) $BC = 10$ $AB^2 = CB^2 + AC^2 - 2AC \cdot CB \cos 45^\circ$

$$13^2 \cdot 2 = 10^2 + AC^2 - 10\sqrt{2} AC$$

$$AC = 17\sqrt{2}$$

$$CD = 34$$

$$BD = 24$$

$$S_{ACF} = S_{ACFD} - S_{ADF} = \frac{AC \cdot AD \cdot \sin \angle CAD}{2} + \frac{FB \cdot CD}{2} - \frac{AD \cdot DF \cdot \sin \angle ADF}{2}$$

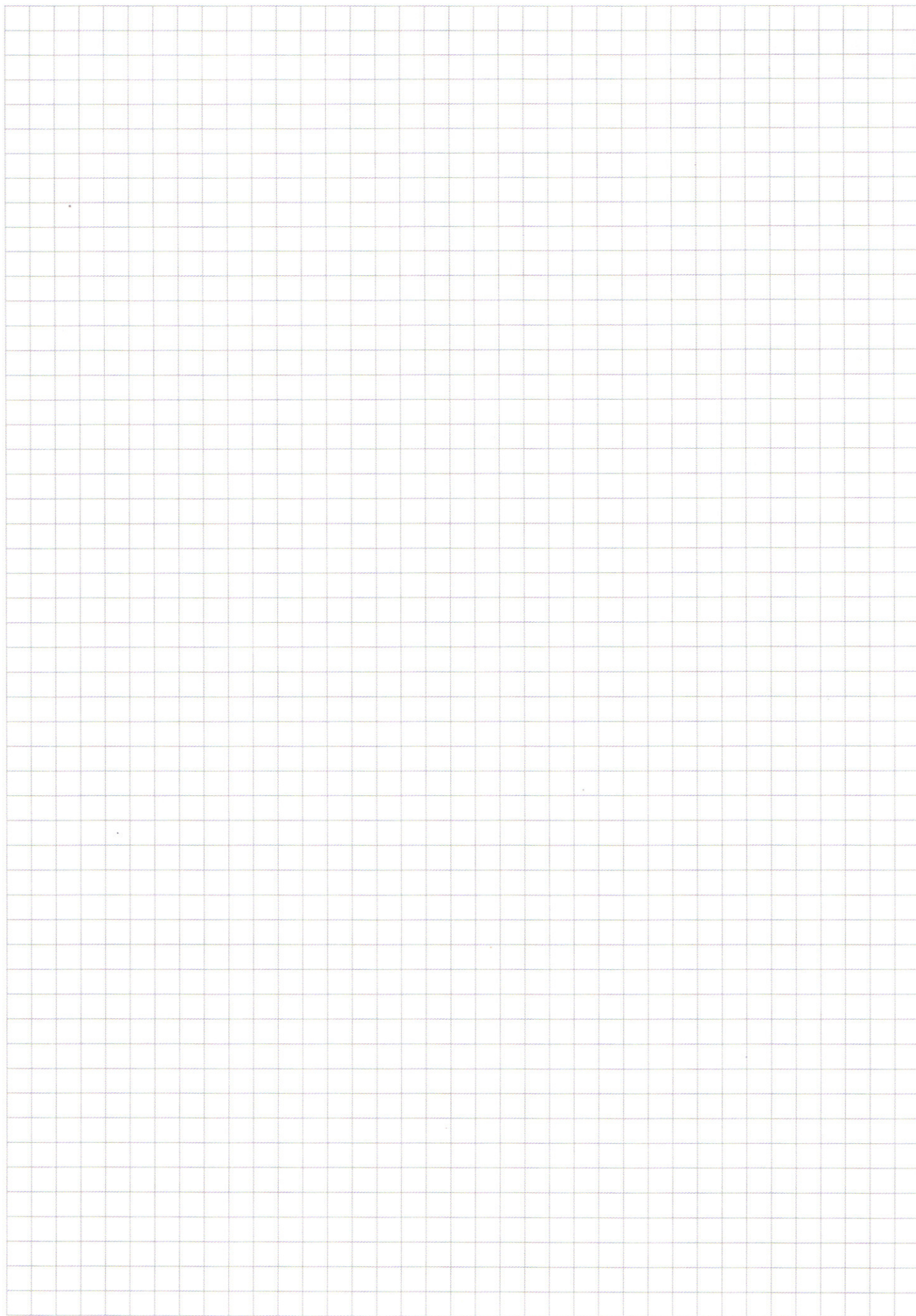
$$= \frac{17\sqrt{2} \cdot 24\sqrt{2}}{2} + \frac{24 \cdot 34}{2} - \frac{17\sqrt{2} \cdot 24\sqrt{2}}{2} =$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$= 17^2 + 17 \cdot 24 - 17 \cdot 24 = 17^2 = 289$$

П) Ответ 289



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

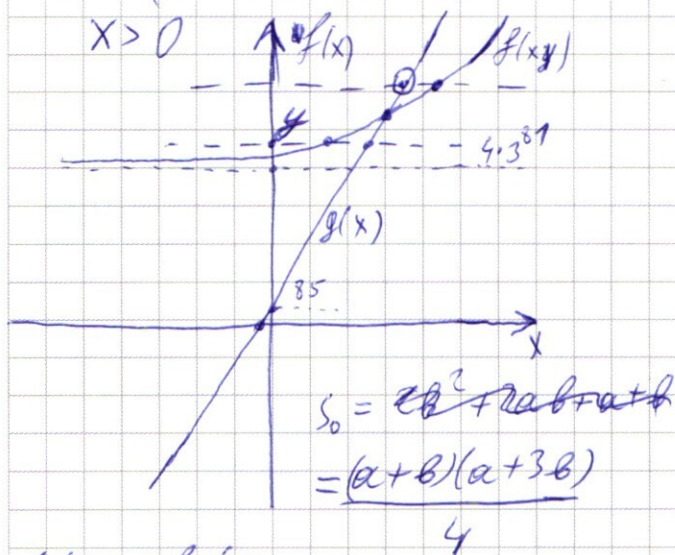
Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} = f_1(x) \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x = f_2(x) \end{cases}$$

$$85 + (3^{81} - 1)x > 3^x + 4 \cdot 3^{81}$$

$$x > 0$$

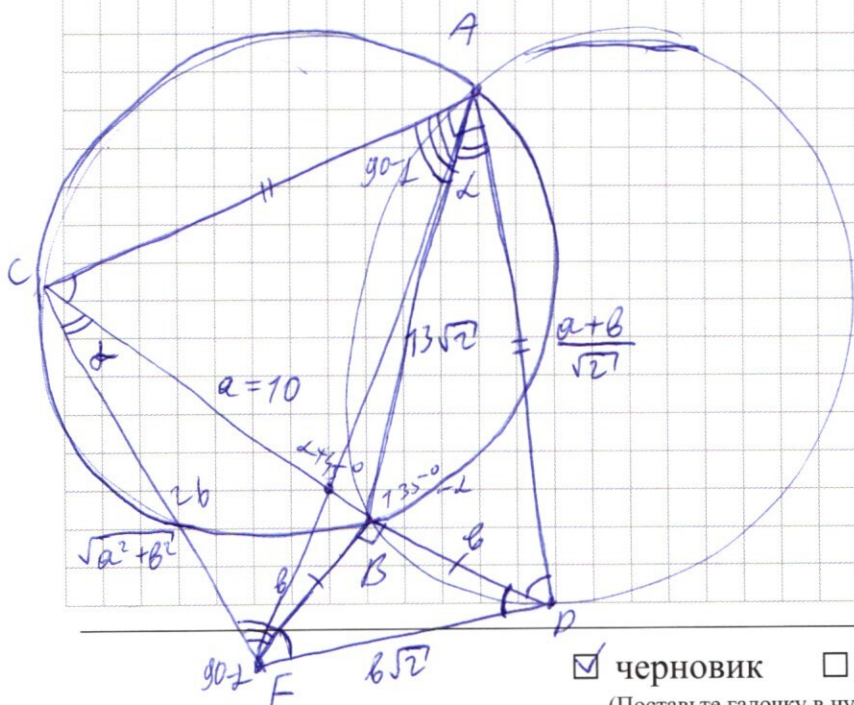


$$f_1(x) = f_2(x)$$

$$85 + (3^{81} - 1)x = 3^x + 4 \cdot 3^{81}$$

$$x = 3^4 \quad 85 + 3^{85} - 81 = 3^{85} + 4$$

$$5 \cdot 3^{81}$$



$$y = \text{const} \quad 16^9 \quad 338$$

$$\begin{cases} y \geq f_1(x) \Rightarrow y \geq 4 \cdot 3^{81} \\ y < f_2(x) \end{cases}$$

$$13^2 \cdot 2 = 10^2 + x^2 - \sqrt{2} \cdot 10x$$

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2$$

$$c = \frac{\sqrt{2}(a+b)}{2}$$

$$SAFD = \frac{b(a+b)}{2}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{b}$$

$$S_0 = \frac{b(a+b)}{2} + \frac{(a+b)^2}{4}$$

$$\frac{b}{\sin \angle} = \frac{a}{\sin(\frac{\pi}{2} - \angle)} = \frac{a}{\cos \angle}$$

$$x^2 - 10\sqrt{2}x - 238$$

$$D = 200 + 900 + 4 \cdot 38 =$$

$$= 200 + 1000 + 120 + 32 =$$

$$= 1152$$

$$13^2 \cdot 2 = \frac{b^2 + (a+b)^2}{2} - \sqrt{2}$$

$$2 \cdot 576 =$$

$$= 4(24\sqrt{2})^2$$

$$\frac{b\sqrt{2}}{b} = \sqrt{2} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{13\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{a^2+b^2} = 26$$

$$\frac{a^2+b^2+2ab}{4}$$

$$x = \frac{10\sqrt{2} + 24\sqrt{2}}{2} = 17\sqrt{2}$$

$$\begin{array}{r} 16875 \overline{) 5} \\ 3375 \overline{) 5} \\ 675 \overline{) 5} \\ 135 \overline{) 5} \\ 27 \overline{) 3} \\ 9 \overline{) 3} \\ 3 \overline{) 3} \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16875 \overline{) 5} \\ 15 \overline{) 3375} \\ 78 \overline{) 30} \\ 75 \overline{) 37} \\ 37 \overline{) 35} \\ 25 \end{array}$$

$$16875 = 5^4 \cdot 3^3$$

$$8 \cdot C_7^3 = 8 \cdot \frac{7!}{4! \cdot 3!} = 8 \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = 8 \cdot 7 \cdot 5 = 280$$

$$C_8^4 = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 2 \cdot 7 \cdot 5 = 70$$

$$C_4^3 = 4$$

$$70 \cdot (4 + 12) = 70 \cdot 16 = 1120$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$2(y-2)^2 - xy - x^2 - 4x = 0$$

$$2y^2 - (x+8)y - x^2 - 4x = 0$$

$$2y^2 - (x+8)y - x^2 - 4x = 0$$

$$2 \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x} - 1 - \frac{4}{x} - \frac{8y}{x^2} = 0$$

$$2 - x - x^2 - 4x - 8 = 0$$

$$-x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$D = 25 - 24 = 1$$

$$x = \frac{-5 \pm 1}{2} = -3; -2$$

$$2x^2 + x^2 - x^2 - 4x + 8x = 0$$

$$2x^2 + 4x = 0$$

$$2x(x+2) = 0 \quad x = -2; 0 \quad y = 2; 0$$

$$\left(\frac{x}{y^2} \right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$y > 0 \quad (-x)^{\lg y} = y^{2 \lg y} \cdot (-x)^{\lg(-xy)}$$

$$x < 0 \quad (-x)^{\lg y} - \lg y - \lg(-x) = 2 \lg y$$

$$3 \lg y - \lg(-x) = 2 \lg y$$

$$2 \lg y - \lg(-x) = 2 \lg y$$

$$(-x)^{\lg \frac{y^3}{(-x)}} = y^{\lg y^2}$$

$$-x = 10^{\lg(-x)} \quad y = 10^{\lg y}$$

$$10^{\lg \frac{y^3}{(-x)} \lg(-x)} = 10^{\lg y^2 \lg y}$$

$$(3 \lg y - \lg(-x)) \lg(-x) = 2 \lg^2 y$$

$$3ba - a^2 = 2b^2$$

$$a^2 + 2b^2 - 3ba = 0 \quad \left(\frac{a}{b} \right)^2 + 2 - 3 \frac{a}{b} = 0$$

$$D = 9 - 8 = 1$$

$$\frac{a}{b} = \frac{3 \pm 1}{2} = 1; 2$$

$$\lg(-x) = \lg y$$

$$\lg(-x) = \lg y^2$$

$$-x = y \quad -x = y^2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \beta \cos \alpha$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} \cos 10x = \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x)$$

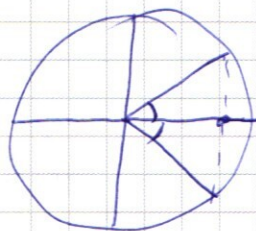
$$\cos 2x (\sin(\frac{\pi}{2} - 5x) - \sin 5x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 10x$$

$$\cos 2x \cdot 2 \sin(\frac{\pi}{4} - 5x) \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 10x$$

$$\cos 10x = 2 \cos 2x \sin(\frac{\pi}{4} - 5x)$$

$$\begin{cases} \tan 5x = 1 \\ 5x = \pi k + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{2} \cos 2x = \cos 5x + \sin 5x \end{cases}$$



$$2 \cos \frac{\pi}{4} \cos 2x = \cos 5x + \cos(\frac{\pi}{2} - 5x) = 2 \cos \frac{\pi}{4} \cos(5x - \frac{\pi}{4})$$

$$\cos 2x = \cos(5x - \frac{\pi}{4})$$

$$\begin{cases} 2x = 2\pi k + 5x - \frac{\pi}{4} \\ 2x = 2\pi k - 5x + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x = 2\pi k + \frac{\pi}{4} \\ 7x = 2\pi k + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3}\pi k + \frac{\pi}{12} \\ x = \frac{2}{7}\pi k + \frac{\pi}{28} \\ x = \frac{\pi k}{5} + \frac{\pi}{20} \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

$$|x-y-6| + |x+y-6| = 12$$

$$\begin{cases} x-y \geq 6 \\ x+y \geq 6 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-12=12 \\ x=12 \end{cases} \quad y \in [-6; 6]$$

$$\begin{cases} x-y \leq 6 \\ x+y \leq 6 \end{cases} \quad \begin{cases} 12-2x=12 \\ x=0 \end{cases} \quad y \in [-6; 6]$$

$$\begin{cases} x-y \geq 6 \\ x+y \leq 6 \end{cases} \quad \begin{cases} -2y=12 \\ y=-6 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 12 \end{cases} \quad x \in [0; 12]$$

$$\begin{cases} x-y \leq 6 \\ x+y \geq 6 \end{cases} \quad \begin{cases} 2y=12 \\ y=6 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 12 \end{cases} \quad x \in [0; 12]$$

$$a=100$$

$$y=0 \quad x \in [0; 12]$$

$$\begin{cases} x=0; 12 \quad y \in (-6; 6) \\ x \in (0; 12) \quad y = \pm 6 \end{cases}$$

$$x(x-6)^2 + 2^2 = a$$

$$(x-6)^2 = a-4 \quad |x-6| = \sqrt{a-4} \quad x = 6 \pm \sqrt{a-4}$$

$$a \geq 4$$

$$6^2 + (|y|-8)^2 = a \quad (|y|-8)^2 = a-36$$

$$|y| = 8 \pm \sqrt{a-36}$$

$$a^2 + b^2 + 2ab = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$ab \in [0; 2]$$

$$|y| = 8 - \sqrt{a-36}$$

$$a=40$$

$$x=0; 12$$

$$|y|=6 \quad y=\pm 6$$

$$\frac{AB}{\sin \alpha} = \frac{AB}{\sin(90-\alpha)} = 26$$

$$AB = 13\sqrt{2}$$