

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО М

11 класс

112

ВАРИАНТ 6

11233

1122
ШИФ

11233
11332

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.

$$\cos 60 + \cos 60 =$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 5x$$

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$\cos 60 + \sin 30 = 1$$

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

$$2 \cos 2x \cos 5x - \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$\sqrt{2} \cos 2x \cos 5x = \cos 5x + \sin 5x$$

$$2 \cos^2 2x = 1 + \sin 10x$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

52)

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2 \cos \frac{7x+3x}{2} \cos \frac{7x-3x}{2} - 2 \sin \frac{7x+3x}{2} \cos \frac{7x-3x}{2} = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$\sqrt{2} \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \sin 5x \cos 2x = \cos 10x$$

$$\sqrt{2} \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \cos^2 5x - \sin^2 5x$$

$$\overset{\textcircled{1}}{(\cos 5x - \sin 5x)} \left(\overset{\textcircled{2}}{\sqrt{2} \cos 2x - \cos 5x - \sin 5x} \right)$$

$$\left[\begin{array}{l} \textcircled{1}: \cos 5x = \sin 5x \\ \textcircled{2}: \sqrt{2} \cos 2x = \sin 5x + \cos 5x \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{28} + \frac{\pi n}{14}, n \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

$$\textcircled{1}: \cos 5x = \sin 5x \Rightarrow 5x = \frac{\pi}{4} + \pi n \quad x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\textcircled{2} \quad \sqrt{2} \cos 2x = \sin 5x + \cos 5x$$

$$2 \cos^2 2x = \sin^2 5x + 2 \sin 5x \cos 5x + \cos^2 5x$$

$$2 \cos^2 2x = 1 + \sin 10x$$

$$\sin 10x = 2 \cos^2 2x - 1$$

$$\sin 10x = \cos 4x$$

$$10x = \left(\frac{\pi}{2} - 4x \right) + \pi n$$

$$14x = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

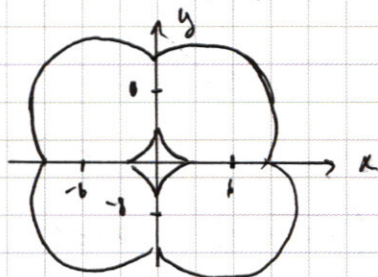
$$x = \frac{\pi}{28} + \frac{\pi n}{14}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}$$

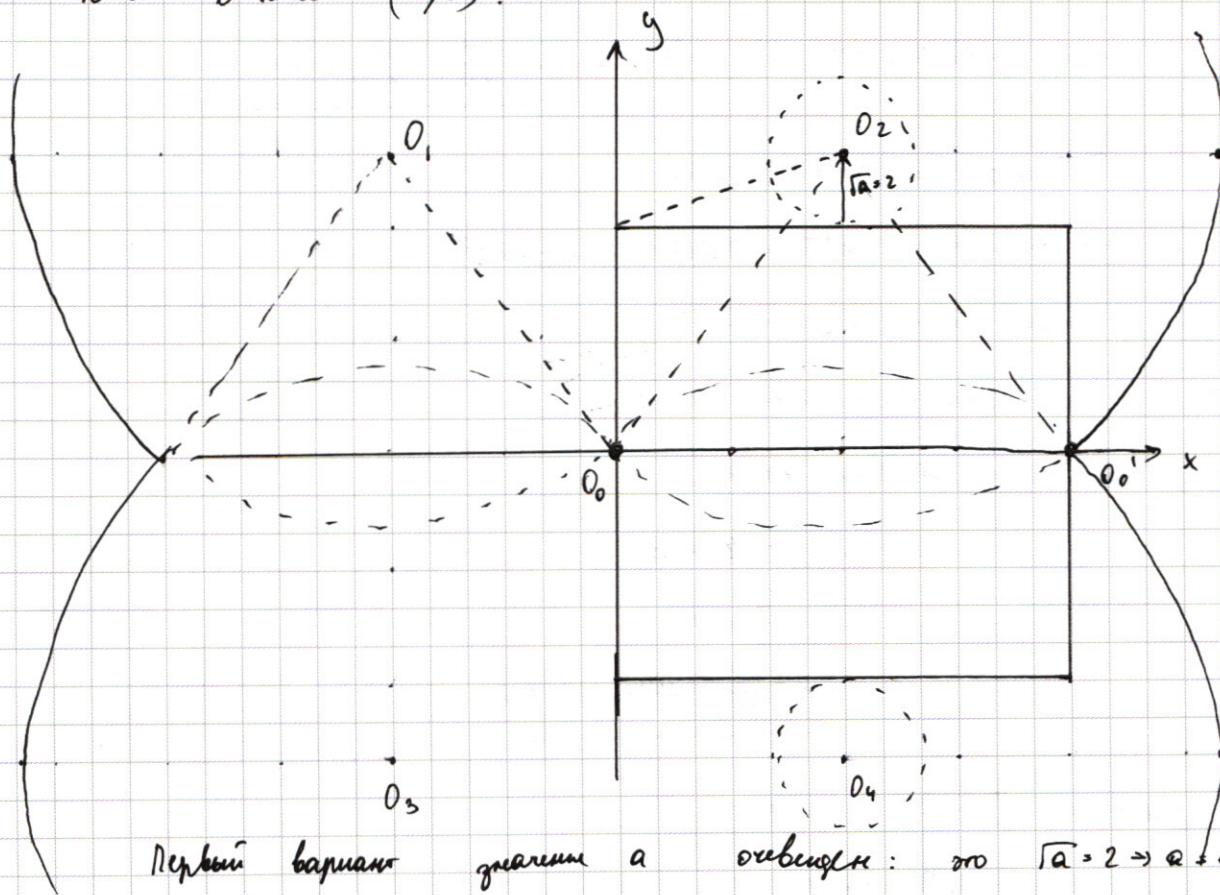
$$x = \frac{\pi}{28} + \frac{\pi n}{14}, n \in \mathbb{Z}$$

55)

Графиком второго уравнения будут 4 окружности с центрами $(\pm 6; \pm 8)$ и радиусами $\sqrt{a}$. Заметим также, что точки каждой из окружностей имеют только в её координатной четверти, то есть при данном a график будет выглядеть так: (рисунком см. ниже):



Графиком первого уравнения же будет квадрат стороной 12 в центре в точке пересечения прямых $x-6-y=0$ и $x-6+y=0$, то есть в точке $(6; 0)$.



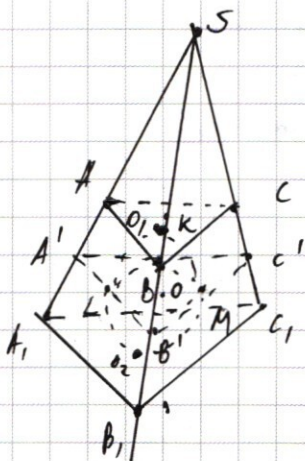
Первый вариант значения a очевиден: это $\sqrt{a} = 2 \Rightarrow a = 4$. Тогда обе правые окружности начнутся из центра квадрата

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Второй вариант имеет ось симметрии. При $\Gamma A \perp O_1 O_2 \perp O_3 \dots \perp 10$
каждая из окружностей будет «образом» одной координаты,
тогда у окружностей с центрами будет всего 2 точки
касания: O_0 и $O_0'(1/2)$. То есть $a = 100$ — это возможное a .

Ответ: $a = 4$ и $a = 100$

54)

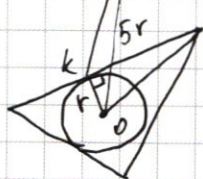


Носитель линии, перпендикулярной SO ABC и
 $A'B'C'$ ($S_{ABC} = 4$ $S_{A'B'C'} = 9$). Осе плоскости
эта линия перпендикулярна окружности основания, а
следовательно параллельна. Тогда S_{ABC} и
 $S_{A'B'C'}$ — подобные пирамиды (основания
параллельны, а угол при вершине общий).

Пусть сфера касается ABC и $A'B'C'$ в
точках O_1 и O_2 соответственно. Тогда $O_1 O_2 = 2r$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{SK^2}{SO_2^2} \Rightarrow SO_2 = 6r \quad SK = 4r \quad SO = 5r.$$

Тогда $S_{A'B'C'} = \frac{25}{4}$ ($S_{A'B'C'} = (\frac{5r}{6r})^2 \cdot 9$)



$$\tan \angle KSO = \frac{KO}{SO} = \frac{r}{5r} = \frac{1}{5}$$

$$\angle KSO = \arctan\left(\frac{1}{5}\right)$$

Ответ: $S_{\text{ит}} = \frac{25}{4}$ $\angle KSO = \arctan\left(\frac{1}{5}\right)$

$$\sqrt{1) \quad 16875 = 5^4 \cdot 3^3}$$

Всего возможных наборов цифр 2:

$$1 \ 1 \ 3 \ 3 \ 5555 \quad \text{число вариантов} \quad 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 72$$

$$1 \ 3 \ 3 \ 3 \ 5555 \quad \text{число вариантов} \quad 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 24$$

$$\text{Всего таких чисел} \quad 72 + 24 = 96.$$

Ответ: 96.

$$\sqrt{3) \quad \begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right) \lg y = (-x) \lg(-xy) \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases} \quad \textcircled{1}$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} -xy > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

Значит $-x$ на x_0 $x^4 = x_0^4$ т.е. число четное

$$\textcircled{1} \quad \left(\frac{x_0^4}{y^2}\right) \lg y = (x_0) \lg(xy) \quad \text{Прологарифмируем}$$

$$\lg\left(\frac{x_0^4}{y^2}\right) \lg y = \lg x_0 \lg(xy)$$

$$(4 \lg x_0 - 2 \lg y) \lg y = \lg x_0 (\lg x_0 + \lg y_0)$$

$$\lg^2 x_0 - 3 \lg x_0 \lg y + 2 \lg^2 y = 0 \Rightarrow \lg x_0 \left[\frac{\lg y}{2 \lg y} \right] \Rightarrow \begin{cases} x_0 = y \\ x_0 = \frac{1}{y^2} \end{cases}$$

$$2y^2 + x_0 y - x_0^2 + 4x_0 - 8y = 0$$

Пусть $x_0 = y$ Тогда

$$2y^2 + y^2 - y^2 + 4y - 8y = 0$$

$$2y^2 - 4y = 0$$

$$2y(y-2) = 0$$

$$\begin{cases} y=0 \\ y=2 \\ y>0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y=2 \Rightarrow x_0=2 \Rightarrow x=-2 \quad (-2; 2)$$

Пусть $x_0 = \frac{1}{y^2}$, тогда

$$2y^2 + y^3 - y^4 + 4y^2 - 8y = 0$$

$$y(6y + y^2 - y^3 - 8) = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

② $y^3 - 6y + y^2 + 8 = 0$

$y = 2$ — корень

$$8 - 12 - 4 + 8 = 0$$

$$\begin{array}{r} y^3 - y^2 - 6y + 8 \quad | \quad y - 2 \\ -y^3 + y^2 \\ \hline y^2 - 6y + 8 \\ -y^2 + 2y \\ \hline -4y + 8 \\ -4y + 8 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$x_0 = \left(\frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \right)^2$$

$$x = - \left(\frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \right)^2$$

$$\begin{cases} x = - \frac{9 + \sqrt{17}}{2} \\ x = - \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

$$\left(-\frac{9 + \sqrt{17}}{2}; -\frac{1 + \sqrt{17}}{2} \right) \quad y > 0 \quad \phi \text{ по ОДЗ}$$

$$\left(-\frac{9 - \sqrt{17}}{2}; -\frac{1 - \sqrt{17}}{2} \right)$$

Ответ: $(-2; 2)$ и $\left(-\frac{9 - \sqrt{17}}{2}; -\frac{1 - \sqrt{17}}{2} \right)$.

57 (написать) график функции

$$y = 3^x + 4 \cdot 3^{x-1}$$

$$y = 85 + (3^{x-1} - 1)x$$

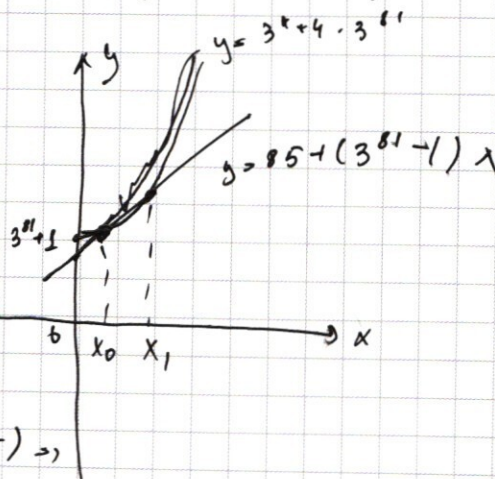
Точки пересечения

функций $x_0 = 4$ и $x_1 = 85$, то

на все пары корней

по x лежит на промежутке $(4; 85) \Rightarrow$

$\Rightarrow [5; 84]$.



Для любого $k = n$, $k \in [5; 84]$ количество пар корней равно:

$$3^{n(n-4)} - 3^n - n + 81$$

тогда сумма всех таких значений для n есть

$$(1 + \dots + 80) \cdot 3^{81} - 3^5 \dots - 3^{84} - 5 - \dots - 84 + 81 \cdot 80$$

$$= 3240 \cdot 3^{81} + 2840 - (3^5 + \dots + 3^{84})$$

$$S_1 = a_1(q-1)^n = 3^5 \cdot 2^{80}$$

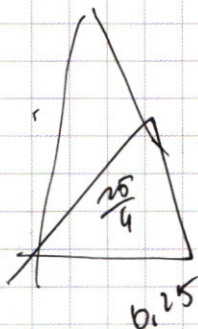
$$\underline{S_{\text{общ}} = 3240 \cdot 3^{81} + 2840 + 3^5 \cdot 2^{80}}$$

Ответ: $S_{\text{общ}} = 3240 \cdot 3^{81} + 2840 + 3^5 \cdot 2^{80}$

$$= 3^5 (3240 \cdot 3^{76} + 2^{80}) + 2840$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

[illegible]



$$\sqrt{36} = 6$$

L

2

4.3.3

4.3.2.2.1.1

72

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$2y^2 - 8y + 8 - x^2 - 4x - 4 = xy + 4$$

$$2(y-4)^2 - (x+2)^2 = xy + 4$$

$$y^2 - 2xy + x^2 + xy + 2x^2 + y^2 - 4x - 8y$$

$$(x+y)^2 + (y-4)^2 - 16 - xy$$

$$10^a + y$$

$$2 \log \frac{x^2}{y} \log y = \log x \log (-xy)$$

$$\log x = ?$$

$$(4 \log x - \log y) (\log y) = \log x (\log x + \log y)$$

$$(4a - b)b = a(a + b)$$

$$9 \log^2 y - 8 \log^2 y$$

$$4ab - b^2 = a^2 + ab$$

$$a^2 - 3ab + b^2 = 0$$

$$\frac{3 \log y \pm \log y}{2}$$

$$\frac{\log y}{2 \log y}$$

$$2y^2 + xy - x^2 + 4x - 8y = 0$$

$$y^3 - y^2 - 6y + 8 = 0$$

$$y^2 + xy + \frac{x^2}{4} = \frac{5x^2}{4} + 4x + \dots$$

$$8 - 4 - 12 + 8 \quad y = 2$$

$$y^2 - 8y + 16$$

$$16 + \frac{16}{25} =$$

$$1 + \sqrt{17}^2$$

$$1^2 + 16$$

$$\frac{18 + 25\sqrt{17}}{4}$$

$$\frac{9 + \sqrt{17}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{2} \cdot a = 2$$

$$= 16 \cdot \frac{26}{25}$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\left(y + \frac{x}{2}\right)^2 + (y-2)^2 + \left(x - \frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16 \cdot 26}{25}$$



черновик

☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 7x + \cos 3x = \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x = 2 \sin 5x \cos 2x = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$\sqrt{2} \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \cos^2 5x - \sin^2 5x$$

$$\cos 5x = \sin 5x$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}$$

$$\sqrt{2} \cos 2x = \sin 5x + \cos 5x$$

$$\sqrt{1 - \sin 10x}$$

$$1 - \sin 10x = 2 \cos^2 2x$$

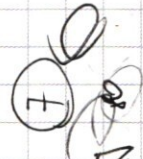
$$1 - \sin 5x = 2 \cos^2 x$$

$$\sin 5x = \sin (2x + 2x + x) =$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{x-1} < 85 + 3^{x-1} \Rightarrow x$$

$$3^{x-1} = (27)^{x-1}$$

$$(6 \cdot 8)$$



$$\sin x \cos 4x + \cos x \sin 4x = \sin 5x$$

$$2 \cos^2 2x - 1$$

$$2(\cos^2 x - \sin^2 x) - 1$$

$$\cos 4x = \cos 2(2x) = \cos^2 2x - \sin^2 2x = (\cos^2 x - \sin^2 x)^2 - 1$$

$$\sin 4x = 2 \sin 2x \cos 2x = 4 \sin x \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$(2(\cos^2 x - \sin^2 x)^2 - 1) \sin x + 4 \sin x \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) =$$

$$\sin x (2(\cos^2 x - \sin^2 x)^2 - 1 + 4 \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x)) =$$

$$\sin x (8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x - 2 - 1 + 8 \cos^3 x - 4 \cos x) =$$

$$\sin x (16 \cos^4 x - 8 \cos^2 x - 3)$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\log_a x$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{x-1} < 85 + (3^{x-1} - 1)x$$



$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$

$$\sin$$



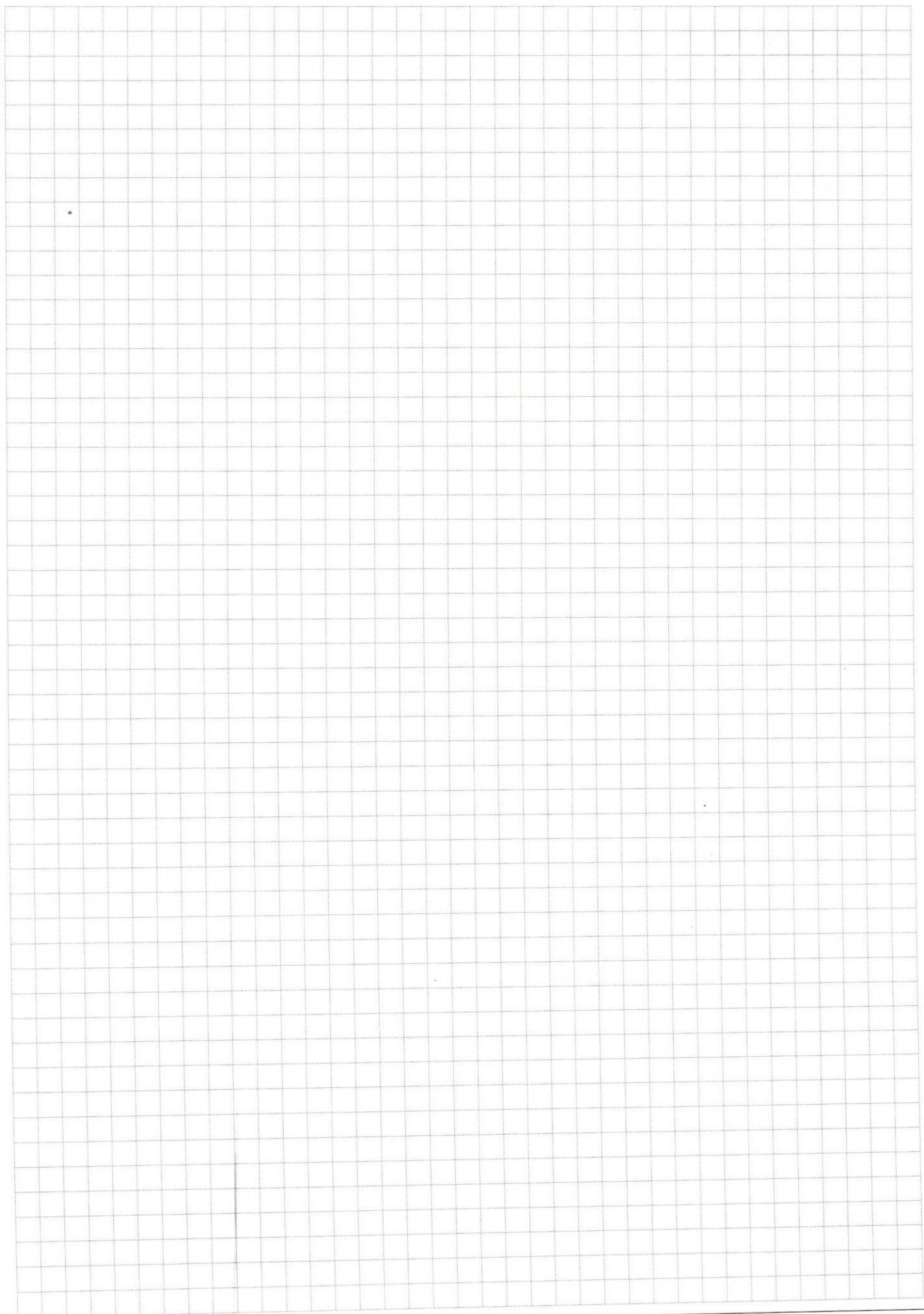
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)