

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

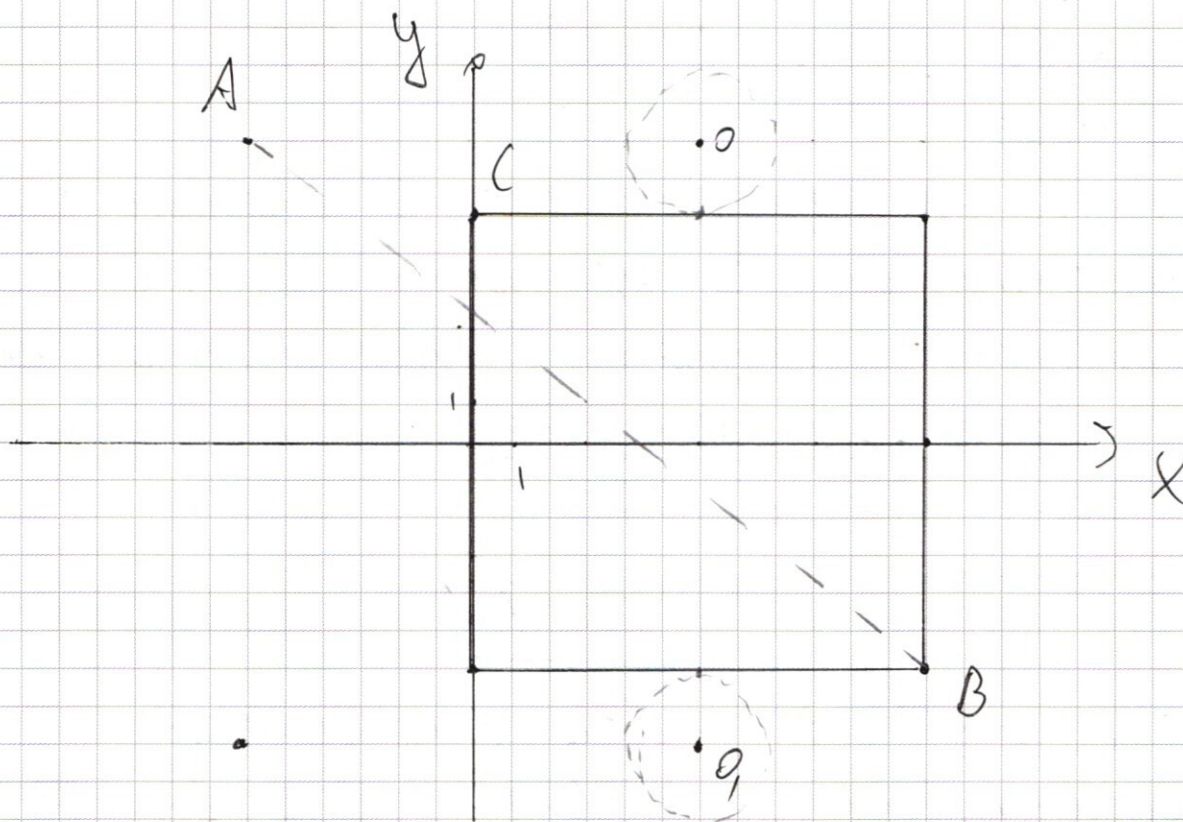
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5



① $|x-6-y| + |x-6+y| = 12$

1) $x-6-y \geq 0 \vee x-6+y \geq 0$ 2) $x-6-y \leq 0$ и $x-6+y \geq 0$

$$2x - 12 = 12$$

$$x = 12, y \in [-6; 6]$$

$$-x+6+y+x-6+y=12$$

$$y \geq 6, x \in [0; 12]$$

3) $x-6-y \geq 0$ и $x-6+y \leq 0$

$$y \leq -6$$

$$x \in [0; 12]$$

4) $x-6-y \leq 0$ и $x-6+y \leq 0$

$$x \leq 0$$

$$y \in [-6; 6]$$

$(|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a$ - четыре окружности
с центрами в точках $(6;8)$; $(-6;8)$; $(6;-8)$
 $(-6;-8)$ и с радиусом $\sqrt{a}$

такие имеют 2 решения:

1) $r=2 \Rightarrow a=4$

2) $r=AB$ $AB = \sqrt{18^2 + 14^2} = \sqrt{520}$

$a=520$

$r=AC$ не подходит, т.к. в таком случае
окружности с центрами в Т. О и О,
пересекают "квадрат" в двух местах каждой.
 $\Rightarrow$ более 2-х решений.

Ответ: $a=4; 520$

✓1

$16875 = 5^4 \cdot 3^3$ - всего 7 делителей

возможн пар: $5^4 \cdot 3^3 \cdot 1$ - $8 \cdot \frac{4!}{3!1!} = 280$

$5^4 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 = C_8^1 \cdot C_7^1 \cdot C_6^2 =$

$= 8 \cdot 7 \cdot \frac{5 \cdot 6}{2} = 840$

$n = 840 + 280 = 1120$

Ответ: $n = 1120$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} \cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x &= \sin 7x + \sin 3x \\ 2 \cos 5x \cdot \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x)(\cos 5x + \sin 5x) &= \\ &= 2 \sin 5x \cos 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x)(\cos 5x + \sin 5x) &= 0 \\ (\cos 5x - \sin 5x) (2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)) &= 0 \\ (\cos 5x - \sin 5x) (2 \cos 2x - 2 \sin(5x + \frac{\pi}{4})) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 5x - \sin 5x &= 0 \\ \sin(5x - \frac{\pi}{4}) &= 0 \end{aligned}$$

$$5x - \frac{\pi}{4} = 2\pi n \quad x = \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5}\pi n$$

$$5x - \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi k \quad x = \frac{5\pi}{4} + \frac{2}{5}\pi k$$

$$\begin{aligned} 2) \cos 2x &= \sin(5x + \frac{\pi}{4}) \\ \sin(\frac{\pi}{2} + 2x) &= \sin(5x + \frac{\pi}{4}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} + 2x &= 5x + \frac{\pi}{4} + 2\pi p \quad x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi p \\ \frac{\pi}{2} + 2x &= 5x + \frac{\pi}{4} + \pi + 2\pi p \quad x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ответ: } x &= \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5}\pi n ; \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{5}\pi k \\ x &= \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi p ; \quad x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi p, \quad n, k, p \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

√3

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

$$\begin{cases} 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases}$$

$$(4y^2 - 8y + 4) - (x^2 + 4x + 4) - 2y^2 - xy = 0$$

$$(2y-2)^2 - (x+2)^2 - y(2y+x) = 0$$

$$(2y-x-4)(2y-2+x+2) = y(2y+x)$$

$$(2y-x-4-y)(2y+x) = 0$$

$$y = x+4 \quad y = -\frac{x}{2}$$

$$\left(\frac{(-x)^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

$$\lg(y) \lg\left(\frac{(-x)^4}{y^2}\right)^{\lg y} = \lg(-x) \lg(-xy)$$

$$\lg y (\lg(-x)^4 - \lg y^2) = \lg(-x) \cdot (\lg(-x) + \lg(y))$$

$$\lg(-x) = a \quad \lg(y) = b$$

$$4ab - 2b^2 = a^2 + ab$$

$$a^2 - 3ab + 2b^2 = 0 \quad a_1 = 2b \quad a_2 = b$$

1) $y = -\frac{x}{2}$

$$\lg(-x) = 2 \lg\left(-\frac{x}{2}\right)$$

$$-x = \frac{x^2}{4} \quad x=0; y=0$$

$$x = -4; y = 2$$

$$-x = -\frac{x}{2} \quad x=0$$

2) $y = x+4$

$$\lg(-x) = \lg(x+4)$$

$$-x = x+4 \Rightarrow x = -2; y = 2$$

$$-x = (x+4)^2$$

$$x^2 + 9x + 16 = 0 \quad D = 17$$

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{17}}{2}, \text{ но } -x(x+4) > 0 \Rightarrow$$

$$x \in (-4; 0)$$

Ответ: $(-4; 2) \cup (-2; 2) \cup \left(\frac{-9+\sqrt{17}}{2}; \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\lg\left(\frac{x}{y^2}\right) \lg y = \lg(-x) \lg(-xy)$$

$$\lg y (\lg(-x) - \lg y^2) = \lg(-x) \cdot (\lg(-x) + \lg(y))$$

$$\lg(-x) = a \quad \lg(y) = b$$

$$4ab - 2b^2 = a^2 + ab$$

$$a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$$

$$0 = 9b^2 - 8b^2 = b^2$$

$$a_1 = \frac{3b + b}{2} = 2b$$

$$a_2 = \frac{3b - b}{2} = b$$

$$-x = x + 4$$

$$x = -2$$

$$\lg(-x) = 2 \lg(x + 4)$$

$$-x = x^2 + 8x + 16$$

$$x^2 + 9x + 16 = 0$$

$$D = 81 - 64 = 17$$

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\frac{x^2}{y} + x = x \left(\frac{x}{2} + 1 \right) = 0$$

$$\sin 7x + \cos 7x = 0$$

$$\sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$7x + \frac{\pi}{4} = 2\pi n$$

$$(a - b)(a - 2b) = 0 \quad 7x + \frac{\pi}{4} = \pi k \text{ или } 2\pi k$$

$$\lg(-x) = \lg(x + 4)$$

$$\sin 7x + \cos 7x = 0$$

$$2 \sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$7x + \frac{\pi}{4} = 2\pi n$$

$$7x + \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi n$$

$$\frac{-9 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$x = -2$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81}$$

$$3^x (1 + 4 \cdot 3^{81-x})$$

$$y < 85 + (3^{81} - 1) x$$

$$3^4 + 4 + 3^{81} \cdot x - x$$

$$\cos 4x + \sin 7x = 0$$

$$\sin 6x = -\cos 3x$$

$$\sin(2x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right)$$

$$\sqrt{2} \sin 4x - \cos 3x$$

$$\sqrt{2} \sin 3x = \sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{5\pi}{6}\right)$$

$$4x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

или

$$4x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$4x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$\left(\frac{(-2)^9}{1}\right)^{\lg 1} = 1$$

$$= 2^{\lg 2}$$

$$\left(\frac{(-2)^4}{2^2}\right)^{\lg 2}$$

$$2^{2 \lg 2} = 2^{\lg 4}$$

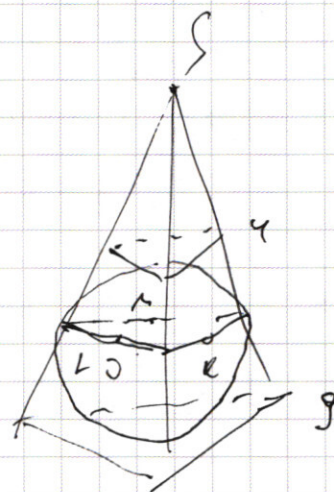
$$2 + 2 - 4 + 8 - 8 = 0$$

$$-x = \left(-\frac{x}{2}\right)^2$$

$$-x = \frac{x^2}{4}$$

$$x^2 + 4x = 0$$

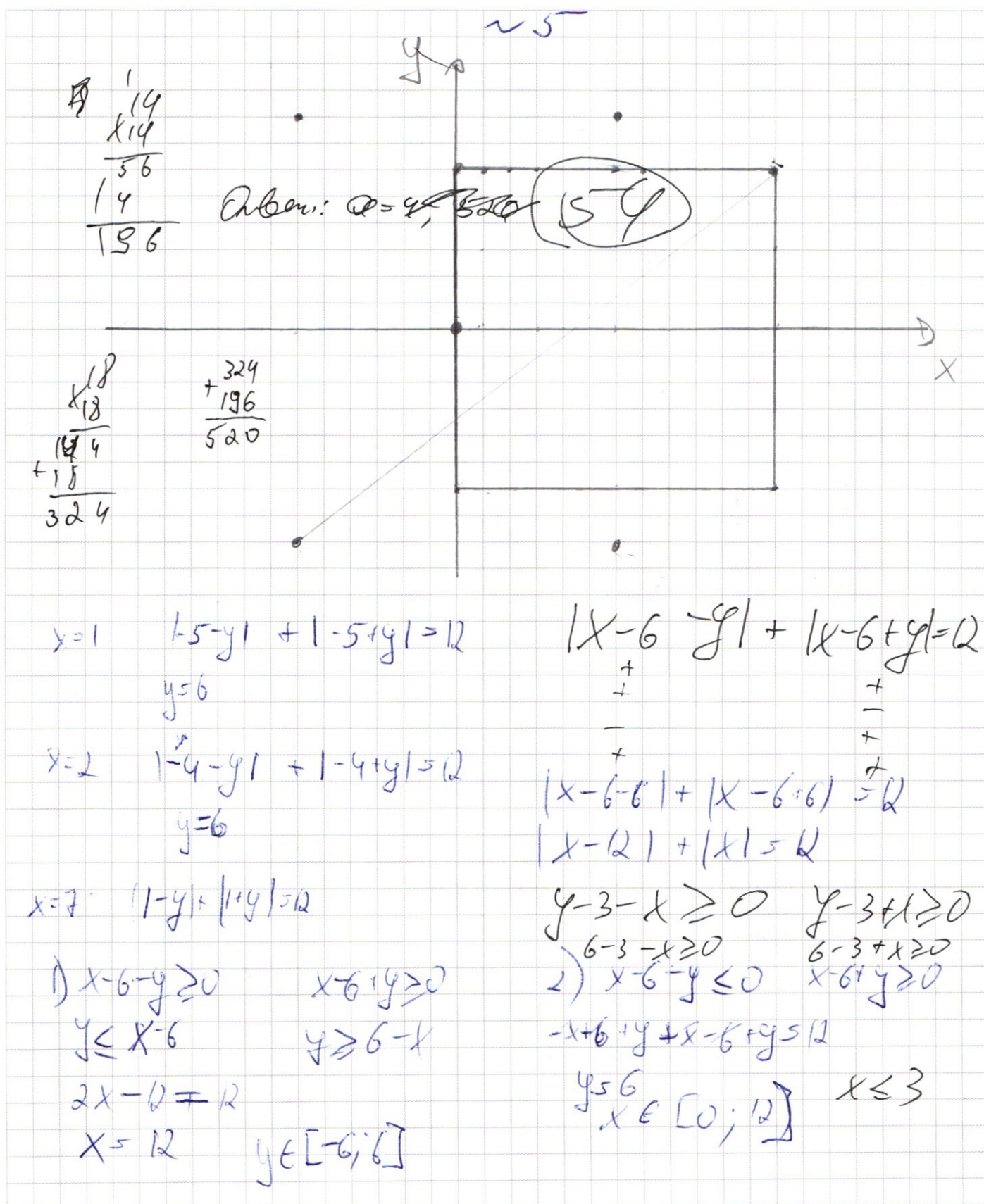
$$x(x+4) \quad y = 2$$



$$\left(\frac{4^4}{4^4}\right)^{4^3 \lg 2} = 4^{\lg 8}$$

$$x = -4$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$2 \cos 5x \cos x - \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x) =$$

$$= 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) (2 \cos 2x - 2 \sin$$

$$2 \cos 2x$$

$$C_1 C_2$$

$$\cos 2x = \sin \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right)$$

$$3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

$$7x = \frac{\pi}{4} +$$

$$- 2 \sin \left(5x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\sin 5x - \cos 5x = 0$$

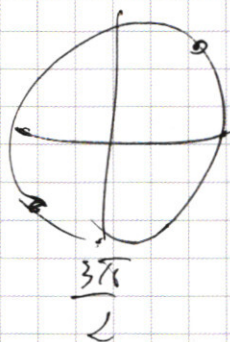
$$\sin \left(5x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\sin x \cos x$$

$$6x = \frac{\pi}{4}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

$$x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$$



$$\log \left(\frac{x}{x+4} \right)^{\log(x+4)^2} = \log(-x)^{\log(-x^2-4x)}$$

$$2 \log(x+4)^2 \cdot \log \left(\frac{x}{x+4} \right) = \log(-x) \cdot (\log(-x) + \log(x+4))$$

$$2 \log(x+4) \cdot (\log x - \log(x+4)) = \log(-x) (\log(-x) + \log(x+4))$$

unlog

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~1

$$\begin{array}{r}
 16875 \overline{) 5} \\
 \underline{-15} \\
 18 \\
 \underline{-15} \\
 37 \\
 \underline{-35} \\
 25 \\
 \underline{-25} \\
 0
 \end{array}$$

8 корней: $5^4 \cdot 3^3 \cdot 1$

$5^4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1$

$C_8^1 \cdot C_7^1 \cdot C_6^1 \cdot C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1 \cdot C_2^1 \cdot C_1^1 = 8! = 40320$

$\sin 7x + \sin 3x = 2 \sin 5x \cdot \cos 2x$

$$\begin{aligned}
 (4y^2 - 8y + 4) - (x^2 + 4x + 4) - 2y^2 - 4y &= 0 \\
 (2y - 2)^2 - (x + 2)^2 - y(2y + 4) &= 0 \\
 (2y - 2 - x - 2)(2y - 2 + x + 2) - y(2y + 4) &= 0
 \end{aligned}$$

$2y - x - 4 = y$

$y = x + 4$

1) $y = \frac{x}{2}$

$2y = x$

$\left(\frac{4x^2}{x^2}\right) \lg \frac{x}{2} + 5(-x) \lg \left(-\frac{x}{2}\right)$

2) $y = x + 4$

$\left(\frac{x^4}{(x+4)^2}\right) \lg x + 4 + 5(-x) \lg(-x(x+4))$

$16875 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3^3$

Всего 7 множителей

$133 \dots 3 \cdot 15$

$153 \dots 10$

$1553 \dots 6$

$15553 \dots 1$

$155553 \dots 1$

$1555553 \dots 1$

$15555553 \dots 1$

$155555553 \dots 1$

$1555555553 \dots 1$

$15555555553 \dots 1$

$155555555553 \dots 1$

$1555555555553 \dots 1$

$15555555555553 \dots 1$

$155555555555553 \dots 1$

$1555555555555553 \dots 1$

$$2 \cos 5x - \cos x - \sqrt{2} (2 \cos^2 5x - 1) = 2 \sin 5x \cdot \cos 2x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin x)$$

$$\sqrt{2} \cos 2x (\sin 5x - \cos 5x) = -\sqrt{2} \cos 10x$$

$$2 \cos 2x \sin(5x - \frac{\pi}{4}) = -\cos 10x$$

$$\left(\frac{x^2}{x+4}\right)^{\lg(x+4)^2} = (-x)^{\lg(-x^2-4x)}; \quad x \in (-4; 0)$$

$$\lg(x+4) = 0$$

$$10^0 = x+4$$

$$x^{2 \lg(x+4)^2} = (x+4)^{\lg(x+4)^2} \cdot (-x)^{\lg(-x^2-4x)}$$

$$r \leq 13$$

$$\cos 2 + \cos 3 = 2 \cos \frac{2+3}{2} \cdot \cos \frac{2-3}{2}$$

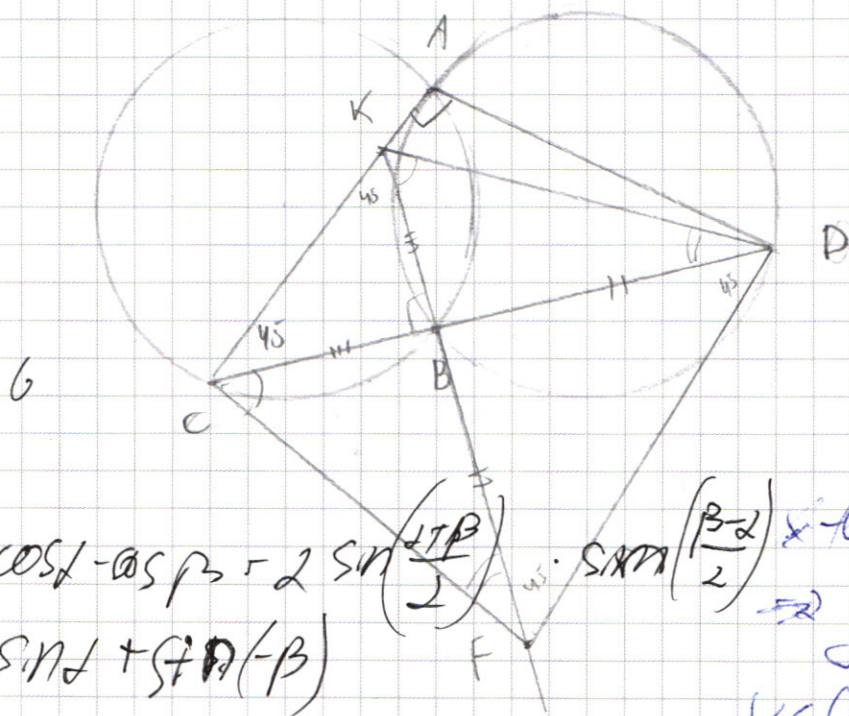
$$(-x)^{\lg(x)(x+4)}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \frac{\beta - \alpha}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)$$

$$\angle CAD = 90^\circ$$

$$AC = AD$$



$$3) x - 6 - y \geq 0 \quad x - 6 + y \leq 0$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\beta - \alpha}{2} \right)$$

$$x - 6 - y - x + 6 - y = 12$$

$$\Rightarrow y \leq -6$$

$$x \in [0; 12] \quad x \geq 0 \quad x \leq 12$$

$$4) x - 6 - y \leq 0 \quad x - 6 + y \leq 0$$

$$-x + 6 + y - x + 6 - y = 12$$

$$x = 0$$

$$y \geq 6$$

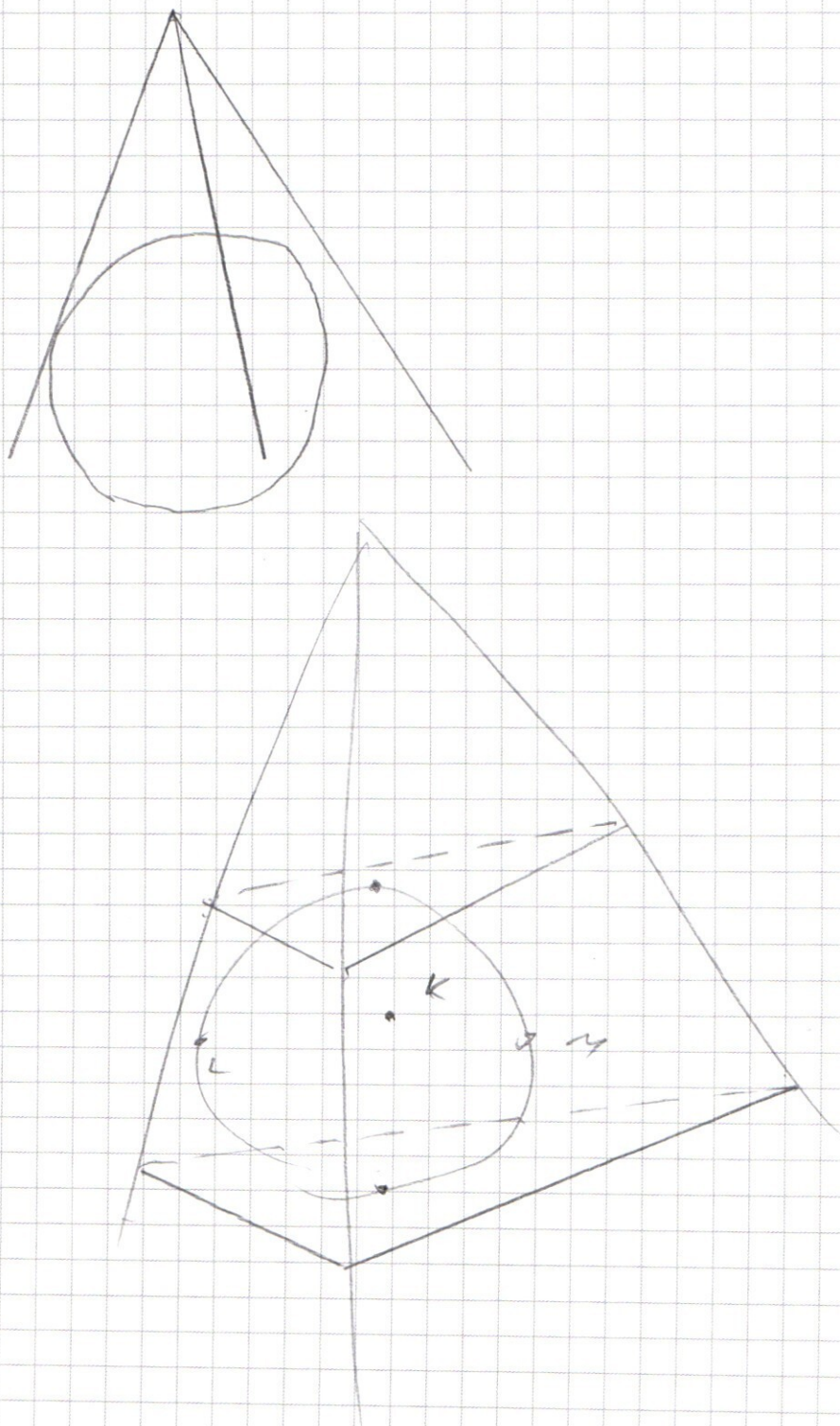
$$y \leq 6$$

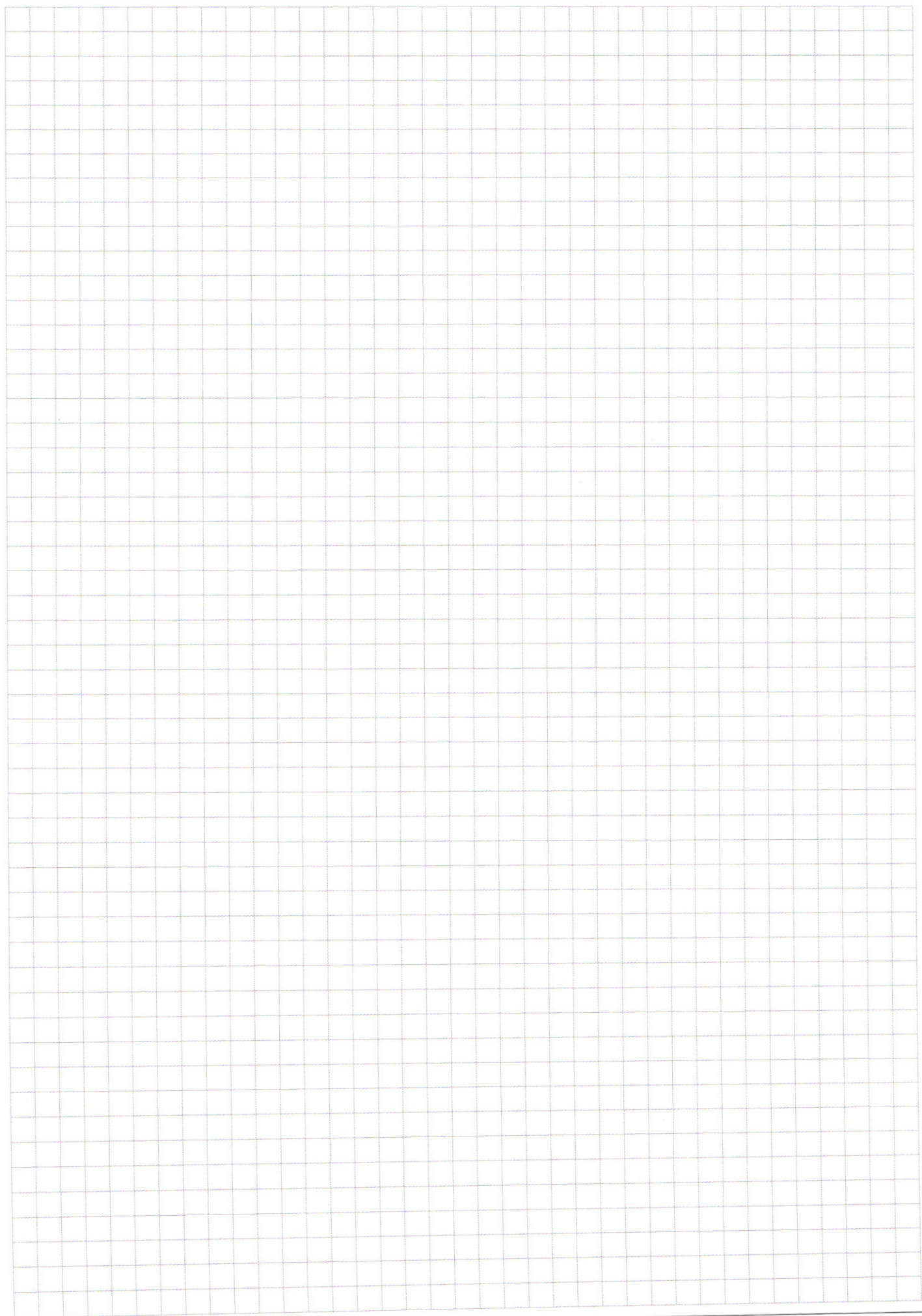
$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)