

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО М.

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФ:

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

11. Различным число 16875 на произведение простых чисел: $16875 = 3^3 \cdot 5^4$, т. е. нам нужно произведение 8-ми цифр, но это возможно в двух случаях:

1) одна 1, три 3 и четыре 5. Для такого случая кол-во восьмизначных чисел равно $\frac{8!}{3! \cdot 4!}$.

2) две 1, одна 3, одна 9 и четыре 5. Для такого случая кол-во восьмизначных чисел равно $\frac{8!}{2! \cdot 4!}$.

Значит всего восьмизначных чисел удовлетворяющих условию:

$$\frac{8!}{3! \cdot 4!} + \frac{8!}{2! \cdot 4!} = \frac{8! + 3 \cdot 8!}{3! \cdot 4!} = \frac{4 \cdot 8!}{3! \cdot 4!} = \frac{8!}{3! \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 8}{6} =$$

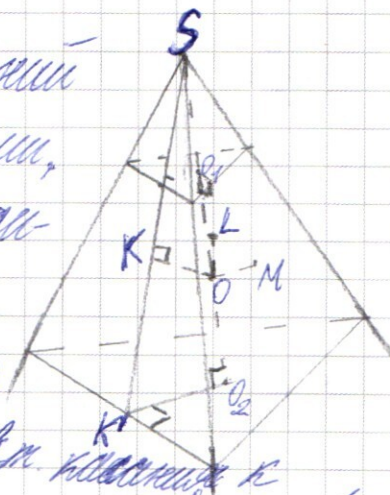
$$= 20 \cdot 56 = 1120$$

Ответ: 1120.

14. Пусть S_1 и S_2 — площади сечений цилиндрического утюга плоскостями, касающимися окружности и перпендикулярными прямой SO , при

$S_2 > S_1$. Тогда OO_1 и OO_2 это радиусы сферы проведенные в касании к сечениям с площадями S_1 и S_2 соответственно.

Т. е. эти сечения перпендикулярны SO и касаются



сферы, но точки S, O_1, O и O_2 лежат на одной прямой.

2) $\frac{S_1}{S_2} = \frac{4}{9} = k^2 \Rightarrow k = \frac{2}{3}$ - коэффициент подобия сечений 1 и 2, которые подобны, т.к. параллельны из-за взаимно перпендикулярности прямой SO .

3) Из-за подобия тетраэдров с основаниями в этих сечениях и общей вершиной S : $\frac{SO_1}{SO_2} = k = \frac{2}{3} \Rightarrow O_1O_2 = SO_2 - SO_1 = \frac{1}{3} SO_2$, но $OO_1 = OO_2 = \frac{1}{2} O_1O_2 = \frac{1}{6} SO_2 = R_{\text{сф.}}$

$$4) OS = SO_1 + O_1O = \frac{2}{3} SO_2 + \frac{1}{6} SO_2 = \frac{5}{6} SO_2$$

$$5) OK = R_{\text{сф.}} = \frac{1}{6} SO_2$$

$$6) \sin \angle KSO = \frac{OK}{SO} = \frac{\frac{1}{6} SO_2}{\frac{5}{6} SO_2} = \frac{1}{5} \Rightarrow \angle KSO = \arcsin \frac{1}{5}$$

$$7) KS = \sqrt{OS^2 - OK^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{6} SO_2\right)^2 - \left(\frac{1}{6} SO_2\right)^2} = \sqrt{\frac{24}{36} SO_2^2} = \frac{2\sqrt{6}}{6} SO_2$$

8) $\triangle KSO \sim \triangle O_2SK$ так как SK пересекает второе сечение в т. K' .

9) $\triangle KSO \sim \triangle O_2SK'$ по остроугольной вписанной т.к. ($\angle KSO$ - общий) $\Rightarrow$

$$\frac{KS}{SO} = \frac{SO_2}{SK'} \Rightarrow SK' = \frac{SO \cdot SO_2}{KS} = \frac{\frac{5}{6} SO_2 \cdot SO_2}{\frac{2\sqrt{6}}{6} SO_2} = \frac{5}{2\sqrt{6}} SO_2$$

10) $\triangle KSO = \triangle MSO = \triangle LSO$ по катету и гипотенузе (SO - общая, $OK = OM = OS = R_{\text{сф.}}$) $\Rightarrow$ т. K, M, L равноудалены от S и $O \Rightarrow$ равноудалены от пр. SO , значит $SO \perp (KML)$ в центре вписанной окр. для сечения (KML) и сечение $(KML) \perp SO$, значит тетраэдр с основанием, образованным сечением (KML) и вершиной S подобен тетраэдру с основанием,

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

образованным сечением 2, и формулой $S \cdot \frac{SK}{SK'} = k$
 $= \frac{2\sqrt{6}}{6} : \frac{5}{2\sqrt{6}} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{S_{KMJ}}{S_2} = k^2 \Rightarrow S_{KMJ} = k^2 \cdot S_2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot 9 = 5,76$

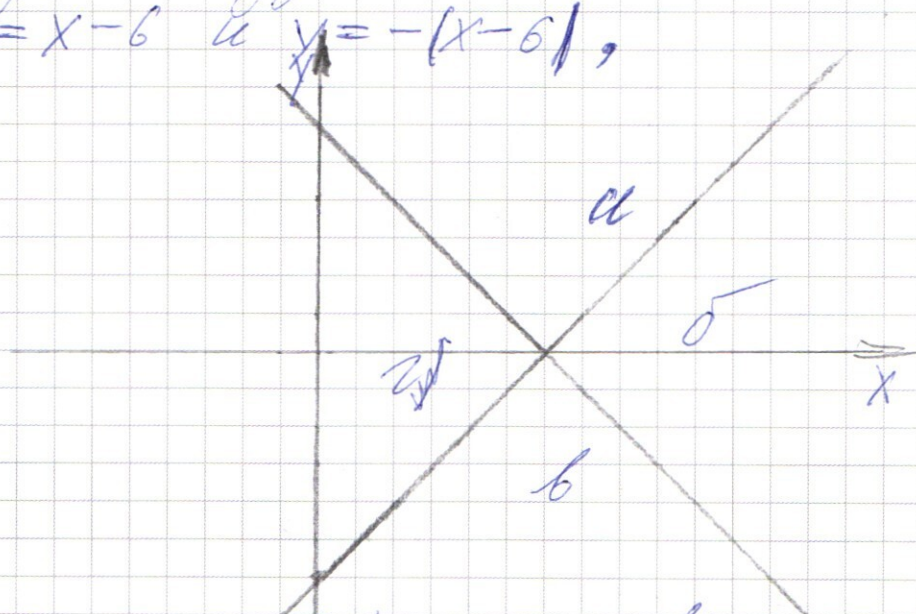
Ответ: $\angle KSO = \arcsin \frac{4}{5}$; $S_{KMJ} = 5,76$

15) $|x-6-y| + |x-6+y| = 12$

$[(x-6)^2 + (|y|-8)^2] = a$

1) Нуми модулей:

$y = x-6$ и $y = -(x-6)$,



а) если $x, y \in (\alpha)$, то

$-(x-6-y) + (x-6+y) = 12$
 $-x+6+y+x-6+y = 12$

$y = 6$

б) если $x, y \in (\beta)$, то

$x-6-y + x-6+y = 12$

$x = 6$

в) если $x, y \in (\gamma)$, то

$(x-6-y) - (x-6+y) = 12$

$x-6-y-x+6-y = 12$

$y = -6$

г) если $x, y \in (\delta)$, то

$-x+6+y-x+6-y = 12$

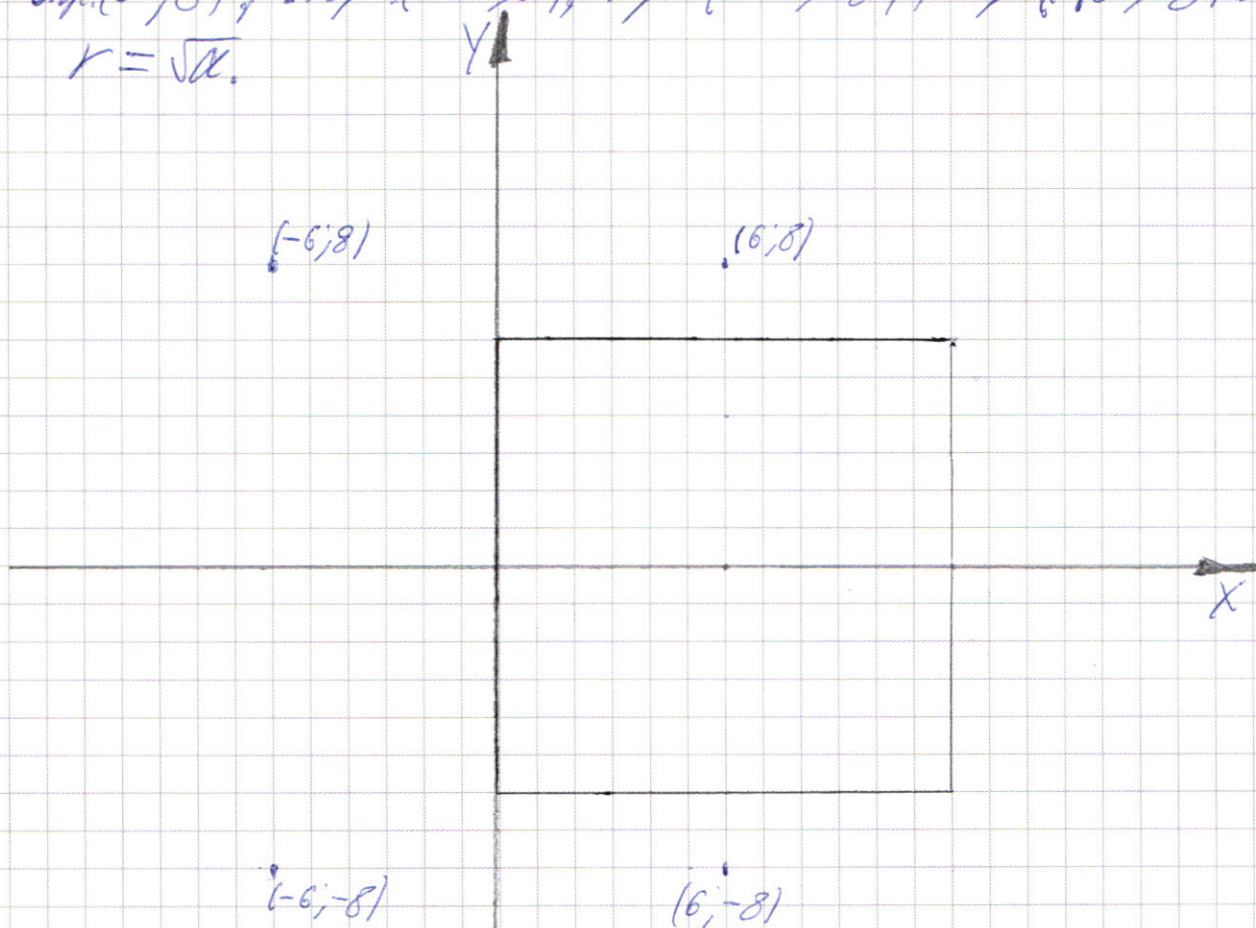
$x = 0$

$$2) (|x-6|)^2 + (|y-8|)^2 = a \Rightarrow a > 0 \text{ и } r = \sqrt{a},$$

где графически это 4 окр. с одинаковым r :

окр. $(6; 8)$, окр. $(-6; 8)$, окр. $(-6; -8)$, окр. $(6; -8)$ и

$$r = \sqrt{a}.$$



При $a=4$, окр. $(6; -8)$ и $(6; 8)$ имеют ^{по две точки} ровно две точки с решением (1) уравнения, т.к. они касаются ~~к~~ квадрата, который является решением (1) уравнения.

Ещё одно решение будет, когда окр. $(-6; -8)$ будет проходить чрез т. $(12; 6)$, а окр. $(-6; 8)$ — т. $(12; -6)$.

Найдем при каком a это возможно:

$$(12-6)^2 + (-6-8)^2 + (12-6)^2 + (6-8)^2 = a \text{ в окр. } (-6; -8),$$

$$x < 0 \text{ и } y < 0 \Rightarrow$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$1) \text{ так } a = (-x-6)^2 + (-x-8)^2$$

$$a = (-12-6)^2 + (-6-8)^2$$

$$a = 18^2 + 14^2$$

$$a = 520$$

Ответ: 4; 520.

$$2) \cos 4x + \cos 3x - \sqrt{2} \cdot \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x - \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 2 \sin 5x \cdot \cos 2x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x) = 0$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) (2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 5x - \sin 5x = 0 \\ 2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 5x - \sin 5x = 0 \\ 2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x) = 0 \end{cases}$$

$$1) \sin 5x = \cos 5x$$

$$\tan 5x = 1$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z}$$

$$3) \int \frac{xy^4}{x^2} dy = (-x) \ln(-xy)$$

$$\begin{cases} 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases}$$

$$1) \int \frac{xy^4}{x^2} dy = (-x) \ln(-xy)$$

$$\begin{cases} \lg y \cdot \lg \frac{x^4}{y^2} = \lg(-x) \cdot \lg(-x) \\ y > 0 \\ x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lg y (4 \lg(-x) - 2 \lg y) = (\lg(-x) + \lg y) \\ \lg(-x) \neq 0 \\ y > 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

$$-2 \lg^2 y + 4 \lg(-x) \lg y = \lg^2(-x) + \lg(-x) \lg y$$

$$\lg^2(-x) - 3 \lg(-x) \lg y + 2 \lg^2 y = 0$$

по м. Виета: Пусть t_1 и t_2 — решения уравнения
 тогда $bt^2 + bt + c = 0$, где $\begin{cases} t_1 = \lg(-x) \\ t_2 = \lg y \end{cases}$

По м. Виета:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 3 \lg y \\ t_1 \cdot t_2 = 2 \lg^2 y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 2 \lg y \\ t_2 = \lg y \end{cases}$$

сопр. замена:

$$\begin{cases} \lg(-x) = 2 \lg y \\ \lg(-x) = \lg y \end{cases} \begin{cases} 10^{2 \lg y} = -x \\ 10^{\lg y} = -x \end{cases} \begin{cases} 100y = -x \\ y = -x \end{cases} \begin{cases} x = -100y \\ x = -y \end{cases}$$

2) если $x = -100y$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$2y^2 + 100y^2 - 1000y^2 - 8y + 400 + 400y = 0$$

$$y^2 + 50y^2 = 5000y^2 - 4y + 200y = 0$$

3) если $x = -y$, то

$$2y^2 + y^2 - y^2 + 4y - 8y = 0$$

$$2y^2 - 4y = 0$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow y = 2$$

Ответ: 2;

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 16875 \overline{) 5} \\ \underline{15} \\ 18 \\ \underline{15} \\ 37 \\ \underline{35} \\ 25 \\ \underline{25} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3375 \overline{) 25} \\ \underline{25} \\ 84 \\ \underline{75} \\ 125 \\ \underline{125} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 135 \overline{) 5} \\ \underline{10} \\ 35 \\ \underline{35} \\ 0 \end{array}$$

$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1$$

$$\begin{array}{r} 11 \overline{) 443} \\ \underline{44} \\ 3 \end{array}$$

$$55559311$$

$$\frac{8!}{3! \cdot 4!} + \frac{8!}{4! \cdot 2!} = \frac{3 \cdot 8! + 8!}{4! \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 8!}{4! \cdot 3!} = \frac{8!}{3! \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{8} = 56 \cdot 20 = 1120$$

$$\sin 2 + \cos 3$$

$$\cos 2 + \cos 3$$

$$\begin{array}{r} \times 625 \\ \cdot 27 \\ \hline 4375 \\ 1250 \\ \hline 16875 \end{array}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin 2 \cdot \cos 3 = \frac{\sin(2+3) + \sin(2-3)}{2}$$

$$\cos 2 \cdot \cos 3 = \frac{\cos(2+3) + \cos(2-3)}{2}$$

$$\sin 2 \cdot \sin 3 = \frac{\cos(2+3) - \cos(2-3)}{2}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = x \\ \alpha - \beta = y \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{x+y}{2}$$

$$\beta = \frac{x-y}{2}$$

$$2 \cdot \cos 5x \cdot \cos 2x - \sqrt{2} \cdot \cos 10x =$$

$$= 2 \cdot \sin 5x \cdot \cos 2x$$

$$2 \cdot \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) =$$

$$-\sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x)$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) (2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)) = 2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

$$+ \sin 5x)$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cdot \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

$$(\cos 5x - \sin 5x)$$

$$1) \lg y \cdot \lg(x^4 y^{-2}) = \lg(-xy) \cdot \lg(-x)$$

$$y > 0 \quad -xy > 0 \Rightarrow -x > 0 \quad x < 0$$

$$\lg y \cdot (4 \lg(-x) + 2 \lg y) = (\lg(-x) + \lg y) \cdot \lg(-x)$$

$$z = \lg(-x) \quad t = \lg y$$

$$t(4z + 2t) = (z + t) \cdot z$$

$$4tz + 2t^2 = z^2 + tz$$

$$2t^2 + 3tz - z^2 = 0$$

$$2) 2y^2 - 8y + 8 - x^2 - 4x - 4 - xy - 4$$

$$y(2x + x) - 2xy - x^2 - 4(2y + x)$$

$$\frac{144 \cdot 4}{100}$$

$$5,76$$

$$5,76$$

$$SO_2 = \frac{1}{3} SO_2$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} = k$$

$$\frac{5}{6} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{\sqrt{24}}{6} \quad SO_2 = SO_2 + 2R$$

$$\frac{SK}{SO} = \frac{SO_2}{SK'}$$

$$SK \cdot SK' = SO_2 \cdot SO_2 = \frac{1}{3} SO_2$$

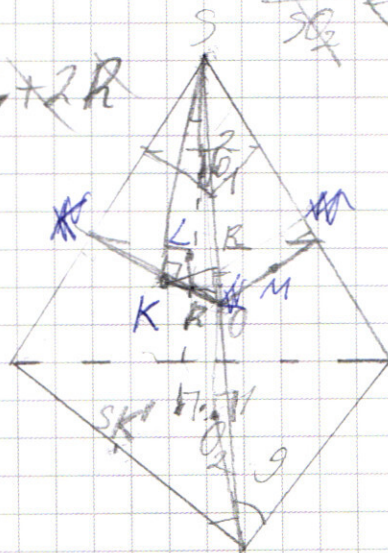
$$\frac{2\sqrt{6}}{6} \cdot SK = \frac{5}{6} \quad SK = \frac{5}{6} SO_2$$

$$SK = \frac{5}{2\sqrt{6}} SO_2$$

$$OK = \frac{1}{6} SO_2$$

$$SO = \frac{2}{3} SO_2 + \frac{1}{6} SO_2 = \frac{5}{6} SO_2$$

$$\frac{4 \cdot 6}{6 \cdot 5} = \frac{4}{5} \Rightarrow S_{KLM} = \frac{16}{25} \cdot 9 = \frac{144 \cdot 4}{100}$$



$$\text{др } \sin \frac{1}{5}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$|x-6-y| + |x-6+y| = 12$$

Окр. $(6; 8)$, Окр. $(-6; 8)$, Окр. $(-6; -8)$, Окр. $(6; -8)$

$$r^2 = 64$$

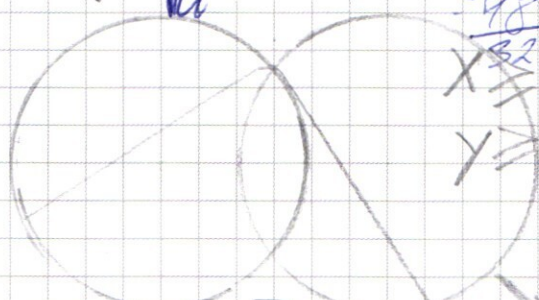
$$r = \sqrt{64}$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times 18 \\ \hline 144 \\ + 98 \\ \hline 324 \end{array}$$

$$x \geq 0, \text{ КОО}$$

$$y \geq x-6, \text{ КОО}$$

$$18^2 + 14^2 = 324 + 196 = 520$$



$$y \geq x-6$$

$$x-6 \geq y \geq -(x-6)$$

$$y = -(x-6)$$

$$1) \quad y-x+6-x+6-y=12$$

$$x=0$$

$$2) \quad x-6-y-x+6-y=12$$

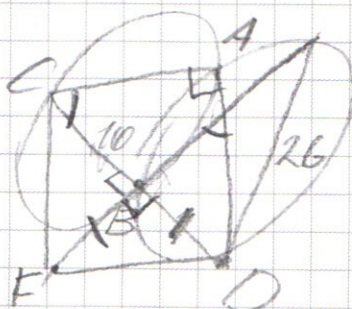
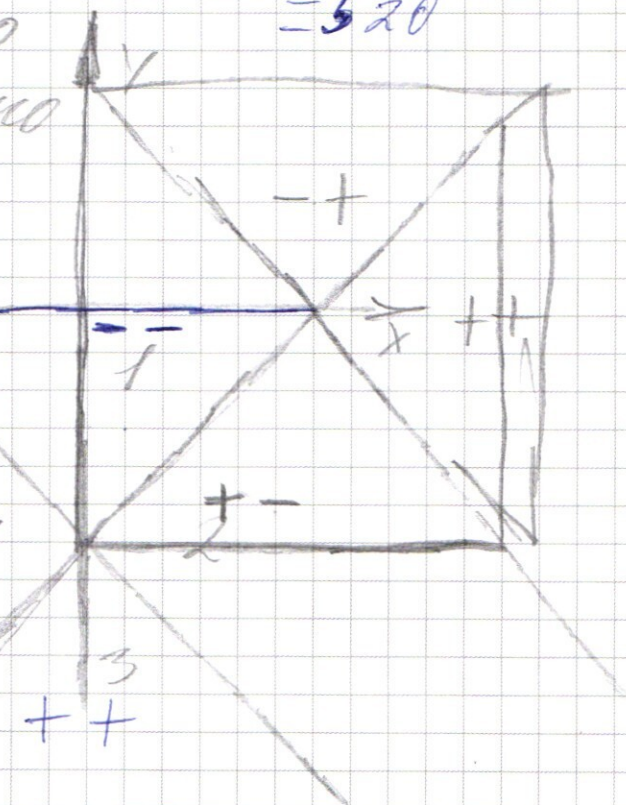
$$2y$$

$$3) \quad x-6-y+x-6+y=12$$

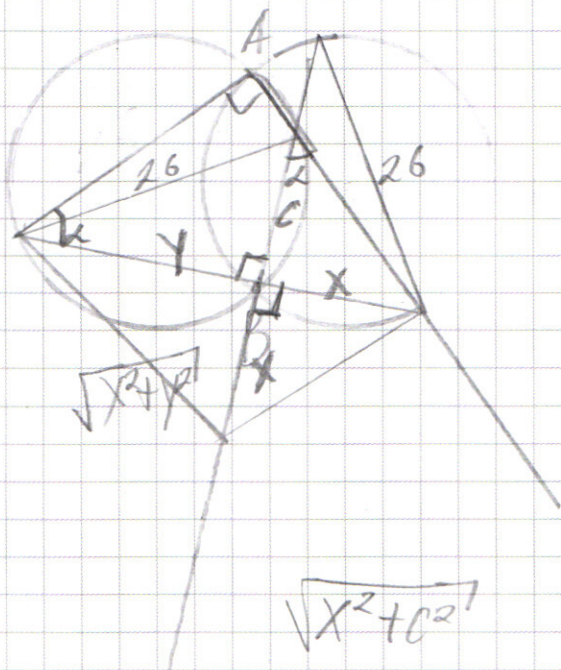
$$x=12$$

$$4) \quad x-x+6+x-6+y=12$$

$$y=6$$



$$y=13$$



$$y \geq 3x + 4.381$$

$$y < 85 + (381 - 1)/x$$

$$10^2 y y = -x$$

$$100y = -x$$