

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Заметим, что $16875 = 3^3 \cdot 5^4$

тогда число может состоять только
из двух наборов цифр: 5, 5, 5, 5, 3, 3, 3, 1

или 5, 5, 5, 5, 9, 3, 1, 1

Тогда вариантов:

$$\frac{8!}{4! \cdot 3!} + \frac{8!}{4! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3} + \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2} =$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 Вариантов Вариантов
 числа числа
 состоящих состоящих
 из цифр из цифр
 только 1 набора только 2 набора

$$= 5 \cdot 7 \cdot 8 + 5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 3 =$$

$$= 5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 4 = 1120$$

Ответ: 1120.

~ 5 (начало)

Заметим, что

$$|x-6-y| = |y+6-x|$$

тогда

$$|y+6-x| + |x-6+y| = 12$$

пусть $y+6-x=a$, $x-6+y=b$, тогда

$$|a| + |b| = 12$$

с учетом 4 варианта раскрытия модулей

$$a \geq 0 \quad b \geq 0 \quad (1)$$

$$a \geq 0 \quad b \leq 0 \quad (2)$$

$$a \leq 0 \quad b \geq 0 \quad (3)$$

$$a \leq 0 \quad b \leq 0 \quad (4)$$

$$(1) \quad a+b=2y=12$$

тогда сразу возможен

при $y=6$, $y \geq x-6$ ($a \geq 0$), $y \geq 6-x$ ($b \geq 0$),

тогда подходят точки, где $x \in [0; 12]$, $y=6$

$$(2) \quad a-b=12-2x=12 \Rightarrow$$

$x=0$, $y \geq x-6$, $y \leq 6-x$,
это точки $x=0$, $y \in [-6; 6]$

$$(3) \quad -a+b=7x-12=12 \Rightarrow$$

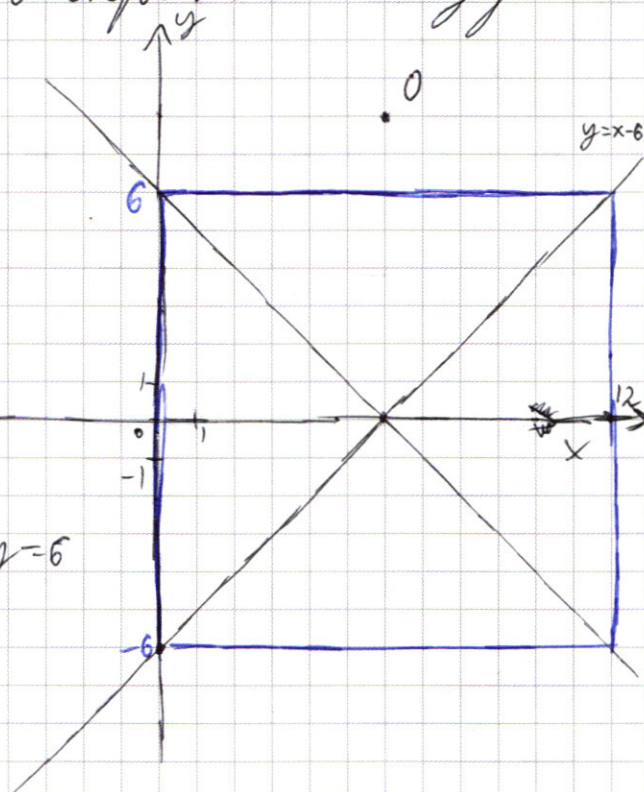
$x=12$, $y \leq x-6$, $y \geq 6-x$
это точки $x=12$, $y \in [-6; 6]$

$$(4) \quad -a-b=-2y=12 \Rightarrow$$

$y=-6$, $x \in [0; 12]$, тогда все точки принадлежащие 1

уравнению лежат на сторонах квадрата (на рисунке)

Одна-второе уравнение получается так: строится
окружность с центром в т. $O(6, 6)$ и радиусом $\sqrt{a}$ и берутся те точки,
которые принадлежат четверти и отбрасываются
относительно осей x и y



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 (продолжение)

Теперь заметим, что точки, являющиеся
решением первой системы ~~и~~ симметричны
относительно оси $x \rightarrow$ если есть пересечение
окружности в 1 четверти, то оно будет и во 2-ой,
тогда возможные случаи: окружность касается
прямой $y=6$, тогда она касается $y=-6$ и будет 2
решения, тогда $a=4$, т.к. $r=2$ или окруж-
ность пересечет в 1 четверти в точках $(0,0)$ и $(2,0)$,
тогда это же и будут т. пересечения
во второй четверти, тогда $\sqrt{a} = \sqrt{6^2 + 8^2} \Rightarrow a=100$
Ответ: 4; 100.

✓ 7 (много)

$$y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81}$$

$$85 + (3^{81} - 1)x > y,$$

тогда

$$85 + (3^{81} - 1)x + y > 3^x + 4 \cdot 3^{81} + y \Rightarrow$$

$$85 + (3^{81} - 1)x > 3^x + 4 \cdot 3^{81} \Rightarrow (x - 4) \cdot 3^{81} > 3^x + x - 85$$

заметьте, что при $x=4$ и $x=85$ достигается равенство

рассмотрим $x \in \{1, 2, 3, 0\}$, тогда заметим, что ни одно из этих значений не подходит в неравенство, а

$$x=3 \quad -3 \cdot 3^{81} < -55$$

$$x=2 \quad -2 \cdot 3^{81} < -74$$

$$x=1 \quad -3 \cdot 3^{81} < -81$$

$x=0 \quad -4 \cdot 3^{81} < -84$, тогда рассмотрим функцию $y=3^x$, при $x \in \mathbb{Z}, x < 0$, она с увеличением x на 1 уменьшается не более чем на 1, т.е.

$0 < 3^x < 1$, при $x \in \mathbb{Z}, x < 0$, функция при x увеличении на 1 уменьшается на 1, а значит

3^x уменьшается не более, чем на 2, а $f(x) = (x-4) \cdot 3^{81}$ уменьшается на 3^{81} при увеличении x на 1 $\Rightarrow$ при $x < 0$ неравенство не может выполняться, т.е. функция слева убывает быстрее, а изначально была меньше (при $x=0 \quad (x-4) \cdot 3^{81} < 3^x + x - 85$)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~ 71 процентное ~

$$(x-9) \cdot 3^{81} > 3^x + x - 85$$

при $x > 85$ $3^x + x - 85 > (x-9) \cdot 3^{81}$, т.е. при увеличении x на 1 3^x растет на $2 \cdot 3^x$, т.е. $3^{x+1} - 3^x = 2 \cdot 3^x$, а x на 1, а функция слева растет ~~по экспоненте~~ на 3^{81} , значит функция справа растет быстрее, а при $x = 85$ равенство $\Rightarrow$ при $x > 85$ решений пер-ва не (- будет).

рассмотрим целые числа от 5 до 80 включительно левая функция больше, чем 3^{81} , правая меньше,

$$x=81 \quad 77 \cdot 3^{81} > 3^{81} - 4$$

$$x=82 \quad 78 \cdot 3^{81} > 3^{82} - 3$$

$$x=83 \quad 79 \cdot 3^{81} > 3^{83} - 2$$

$$x=84 \quad 80 \cdot 3^{81} > 3^{84} - 1$$

$$x=85 \quad 81 \cdot 3^{81} = 3^{85}$$

$$\Downarrow$$

$$x \in \mathbb{Z} \text{ и } x \in [5; 84]$$

Теперь будем искать кол-во возможных y для каждого x .

$$y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81}$$

$$y \leq 85 + 3^{81} \cdot x - x$$

кол-во возможных y это

$$3^{81} \cdot x - 4 \cdot 3^{81} - 3^x - x + 85$$

посчитаем для $3^{81} \cdot x - 4 \cdot 3^{81}$ для $x \in \mathbb{Z}, x \in [5; 84]$

кол-во возможных значений

это арифм. прогрессия для $x=5$ 3^{81} значений

$$x=6 \quad 2 \cdot 3^{81}$$

$$x=7 \quad 3 \cdot 3^{81}$$

$$\dots$$

$$x=84 \quad 80 \cdot 3^{81}$$

тогда сумма всех членов равна $\frac{81 \cdot 3^{81} \cdot 80}{2} = 3^{85} \cdot 40$

теперь посчитаем сколько значений мы должны вычесть для 3^x это тоже прогрессия

$$\text{это } \frac{3^5 \cdot (3^{80} - 1)}{2} = \frac{3^{85} - 3^5}{2}$$

теперь посчитаем сколько мы должны вычесть для x это арифм. прогрессия

$$\frac{(5+84) \cdot 80}{2} = 40 \cdot 89$$

и прибавить $80 \cdot 85$

$$\text{тогда пар } 3^{85} \cdot 40 - \frac{3^{85} - 3^5}{2} = 40 \cdot 89 + 80 \cdot 85 =$$

$$= \frac{3^{85} \cdot 80 - 3^{85} + 3^5 - 80 \cdot 89 + 80 \cdot 170}{2} = \frac{3^{85} \cdot 79 + 80 \cdot 81 + 3^5}{2}$$

$$= \frac{3^{85} \cdot 79 + 83 \cdot 3^4}{2}$$

$$\text{Ответ: } \frac{3^{85} \cdot 79 + 83 \cdot 3^4}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Рассмотрим второе уравнение системы,
умножив его на t^3

$$x^2 + x(y+4) + 8y - 2y^2 = 0$$

$$D = (y+4)^2 - 4 \cdot (8y - 2y^2) =$$

$$= y^2 + 8y + 16 - 32y + 8y^2 = (3y+4)^2$$

$$x = \frac{-(y+4) \pm (3y+4)}{2}$$

$$x = -2y \quad \text{или} \quad x = -y-4$$

подставим $x = -2y$ в I-ое уравнение системы

$$(16y^2)^{1/2} = 2y^{1/2}$$

$$(4y)^{1/2} = 2y^{1/2}$$

$$2y = t^2$$

$$2t^{1/2} = t^{1/2}$$

$$2t^{1/2} - t^{1/2} = 0 \Rightarrow t^{1/2} (2 - t^{1/2}) = 0, \text{ так } t^{1/2} \neq 0, \text{ то}$$

$$t^{1/2} (2 - t^{1/2}) = 0$$

$$t \neq 0, \text{ тогда } t^{1/2} = 2 \Rightarrow (4y)^{1/2} = 2 \Rightarrow 4y = 2^2 = 4 \Rightarrow y = 1$$

$$(2y)^{1/2} = 2 \Rightarrow 2y = \sqrt{2} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = -\sqrt{2}$$

при $x = y - 4$
получаем, что

$$(4-y)^{4 \lg y} = (4-y)^{\lg 4y - y^2} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$(4-y)^{4 \lg y - \lg 4y - y^2} = y^{2 \lg y}$$

поэтому заметим, что подходит $y = 2$
 $x = -2$, а других решений нет

$$\text{Ответ: } (-2; 2), \left(-\sqrt[4]{2}; \frac{\sqrt[4]{2}}{2} \right)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~ 2

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2 \cdot \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \cos 2x \sin 5x$$

$$2 \cdot \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2} \cdot (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x) = 0$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) (2 \cos 2x - \sqrt{2} \cdot (\cos 5x + \sin 5x)) = 0$$

Заметим, что

$$\cos 5x + \sin 5x = \cos(5x - \frac{\pi}{4}) \cdot \sqrt{2},$$

тогда

$$2 \cos 2x - \sqrt{2} \cos(5x - \frac{\pi}{4}) = 2 \cos 2x - 2 \cos(5x - \frac{\pi}{4})$$

$$= -2 \sin(\frac{7}{2}x - \frac{\pi}{8}) \cdot \sin$$

тогда

$$\cos 5x = \sin 5x$$

$$\rightarrow 5x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos 2x - \cos(5x - \frac{\pi}{4}) = 0 \rightarrow -2 \cdot \sin(\frac{7}{2}x - \frac{\pi}{8}) \cdot \sin(\frac{\pi}{8} - \frac{3}{2}x) = 0$$

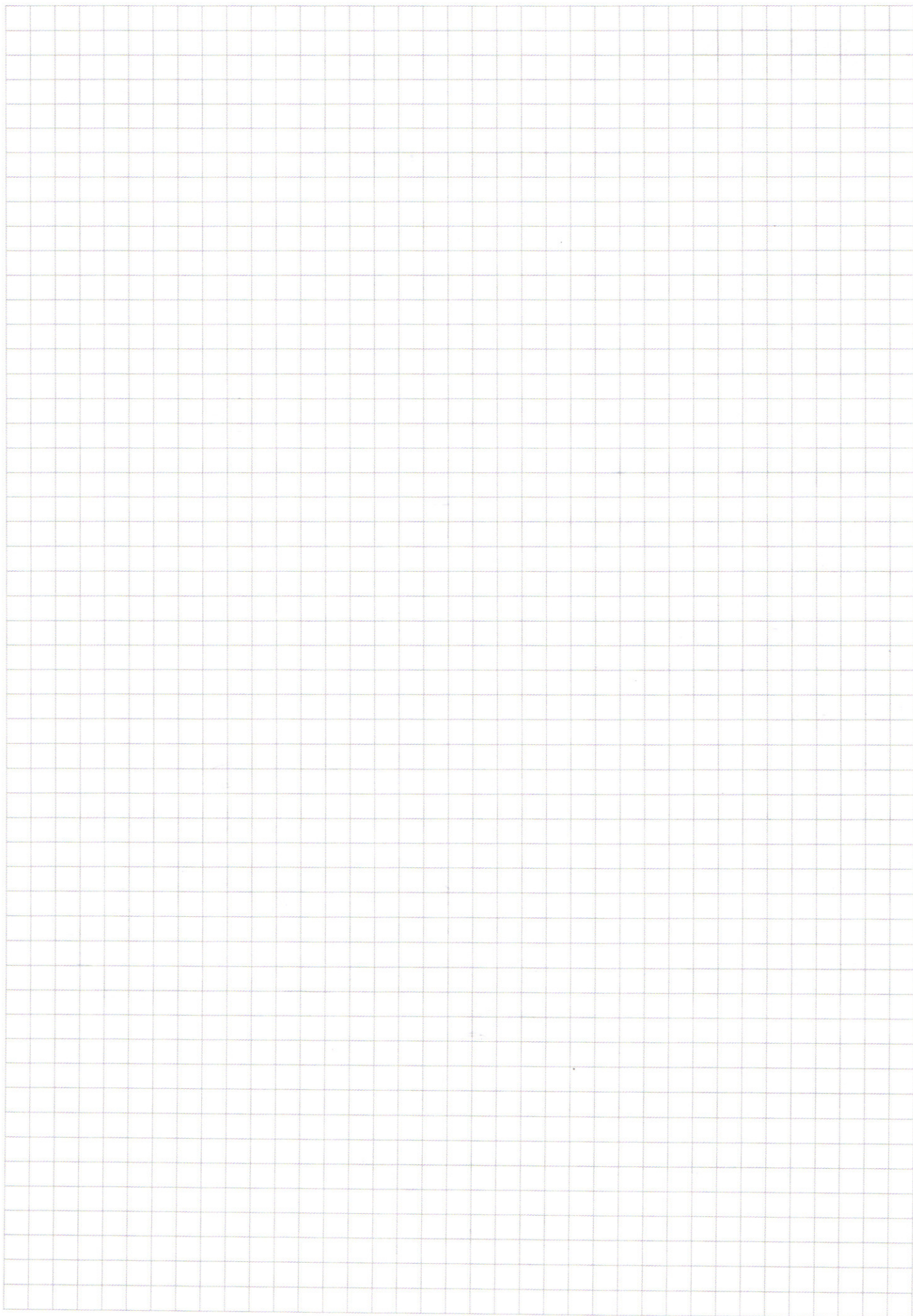
$$\sin(\frac{7}{2}x - \frac{\pi}{8}) = 0 \rightarrow \frac{7}{2}x - \frac{\pi}{8} = \pi k \Rightarrow 7x = 2\pi k + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x \in \frac{\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin(\frac{\pi}{8} - \frac{3}{2}x) = 0 \rightarrow -\frac{3}{2}x = \pi m - \frac{\pi}{8} \Rightarrow x \in \frac{2\pi m}{3} + \frac{\pi}{12}, m \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x \in \frac{\pi}{28} + \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}$

$$x \in \frac{\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x \in \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi m}{3}, m \in \mathbb{Z}$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \quad \text{N3}$$

$$x^2 + x(y+4) + 8y - 2y^2 = 0$$

$$D = (y+4)^2 - 4(2y^2 + 8y) =$$

$$= y^2 + 8y + 16 + 8y^2 - 32y =$$

$$9y^2 - 24y + 16 = (3y - 4)^2$$

$$x = \frac{-(y+4) \pm (3y-4)}{2}$$

$$y \neq 4$$

$$x = \frac{-y-4+3y-4}{2}$$

$$x = \frac{-y-4-3y+4}{2}$$

$$x = y - 4$$

$$x = -2y$$

$$x = y - 4$$

$$\left(\frac{x}{y^2} \right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

$$(x+2y)(x-y+4) = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta =$$

или

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta =$$

$$= 2\cos^2 \alpha - 2\sin^2 \beta =$$

или

$$(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) =$$

$$= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + \cos^2 \beta - \sin^2 \beta =$$

$$= \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta -$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\cos \alpha + \cos \beta =$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \quad 2 \cdot (\cos \frac{\alpha + \beta}{2}) (\sin \frac{\alpha - \beta}{2})$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \quad \sin \alpha + \sin \beta$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} - \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (1 - \sin^2 \alpha) / (1 - \sin^2 \beta) - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad 1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \quad \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha + \beta) = \frac{\cos \beta \cdot \sin \alpha + \cos \alpha \cdot \sin \beta}{2} + \frac{\cos \alpha \cdot \sin \beta - \cos \beta \cdot \sin \alpha}{2}$$

$$= \frac{\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha}{2} - \frac{\sin \beta \cos \alpha - \sin \alpha \cos \beta}{2}$$

$$\sin \alpha (\cos \beta - \cos \alpha) - \cos \alpha (\sin \beta - \sin \alpha) =$$

$$= (1 - \cos \alpha) / (1 - \sin \beta) - \cos \alpha \sin \beta =$$

$$\cos \beta \sin \alpha + \cos \alpha \sin \beta - \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta = (1 - \cos^2 \alpha) - \sin^2 \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \cos \alpha \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \cos \beta \sin \beta -$$

$$- \sin \alpha \sin \beta \cos \alpha + \cos \alpha \sin \beta \cos \beta \quad \sin^2 \beta (\cos \alpha \sin \alpha)$$

$$\cos(\alpha + \beta) (\sin \alpha + \beta) = \frac{\cos \beta \cdot \sin \alpha}{2} + \frac{\sin \alpha \sin \beta}{2} + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{2} +$$

$$+ \frac{\sin \beta \sin \alpha}{2} \quad \sin \alpha (\cos \alpha + \cos \beta) - \sin \beta (\cos \alpha + \cos \beta)$$

$$\sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha = \sin(\alpha - \beta)$$

$$\cos(\alpha - \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \cos \beta \cos \alpha \sin \alpha - \cos \alpha \cos \beta \sin \beta +$$

$$\sin \alpha \cos \beta \sin \beta - \sin \beta \sin \alpha \cos \alpha$$

или

$$\sin 7x + \sin 3x = 2 \cos(2x) \cdot \sin 5x$$

~~(X)~~

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$x < 0$$

$$2y^2 - 8y - xy - x^2 - 4x = 0$$

$$D = (x-8)^2 + 4(2)(x^2+4x)$$

$$x^2 - 16x + 64 + 8x^2 + 32x =$$

$$= 9x^2 + 16x + 64 =$$

~7

$$y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81}$$

$$y < 85 + 3^{81} \cdot x - x$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{81} + y < 85 + 3^{81} \cdot x - x + y$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{81} < 85 + x(3^{81} - 1)$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{81} - x \cdot 3^{81} - 85 + x < 0$$

$$x \cdot 3^{81} + 85 > 3^x + 4 \cdot 3^{81} + x$$

$$x = 4 \text{ знак равенства}$$

$$x = 5$$

или

$$(x-7) \cdot 3^{81} > 3^x + x - 85$$

$$x = 85 \text{ знак равенства}$$

$$81 \cdot 3^{81} \cdot 3^{85}$$

$$82 \cdot 3^{81} \cdot 3^{86} = 3 \cdot 3^{85}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y \geq 3^5 + 4 \cdot 3^{81}$$

$$y \leq 5 \cdot 3^{81}$$

$$y \geq 3^6 \cdot 4 \cdot 3^{81}$$

$$y \leq 6 \cdot 3^{81} \quad \sim 2$$

$$3^{81} = 3^x \cdot 3^{81-x}$$

$$\cos 7x + \cos 3x = \sqrt{2} (\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x)$$

$$y \geq 3^x (3^{81-x} \cdot 4 - 1)$$

$$2 \cdot \cos 5x \cos 7x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 (\cos 7x \sin 5x$$

$$2 \cdot \cos 5x + \cos 7x - \sqrt{2} \cos 5x + \sqrt{2} \sin^2 5x - 2 (\cos 7x \sin 5x = 0$$

при

$$x \cdot 3^{81} - 4 \cdot 3^{81} - 3x \cdot \cos 5x$$

$$2 (\cos 7x (\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2} \cos 10x = 0$$

$$\frac{b^2 (q^n - 1)}{q - 1}$$

$$2 \cos 7x (\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) ($$

$$(\cos 5x + \sin 5x) = 0$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) (2 \cos 7x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x))$$

$$= \sqrt{2} (\cos 5x - \frac{\pi}{4}) \cdot 2$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \cdot$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 2 \sin^2 \frac{\beta}{2}$$

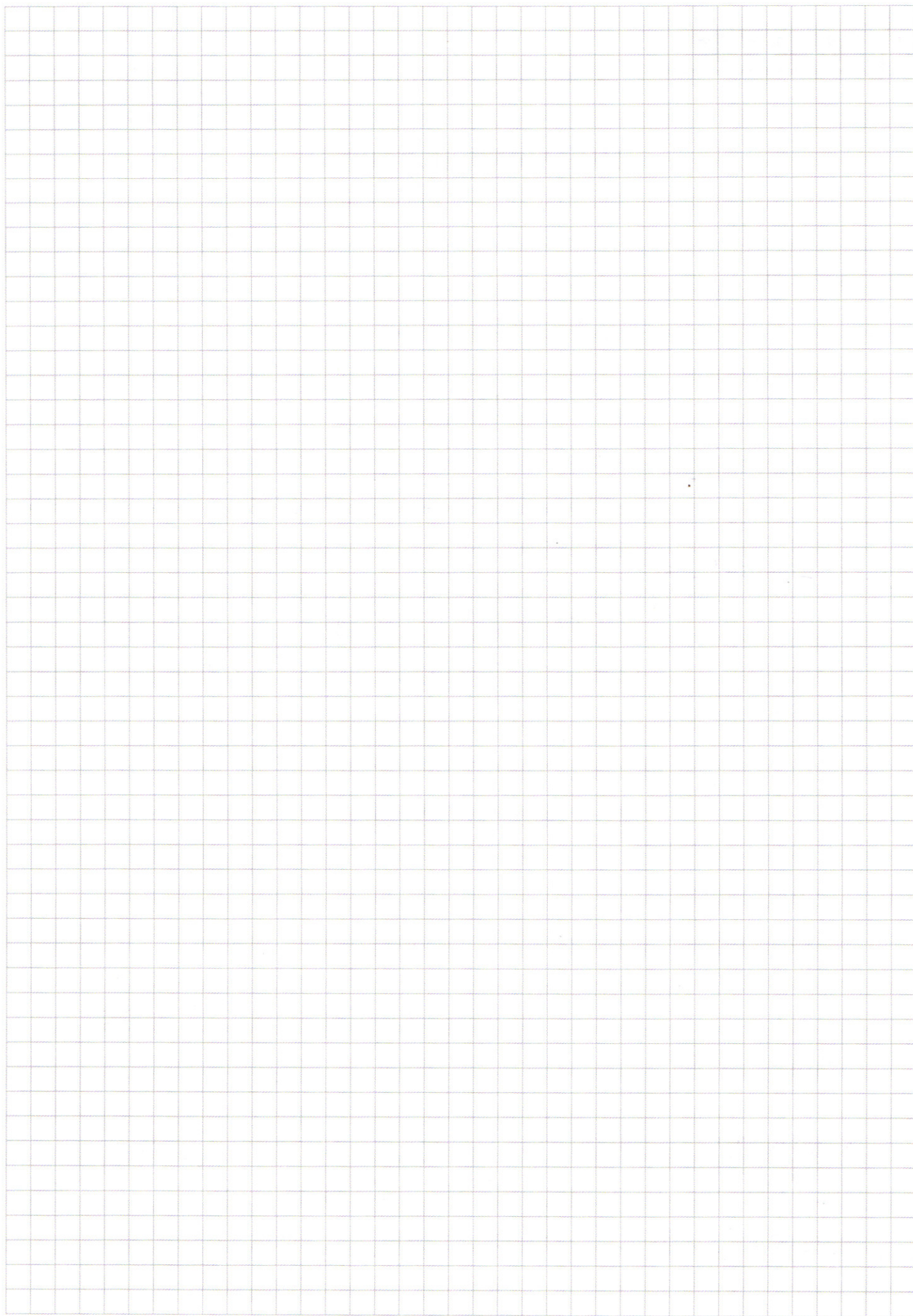
$$\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\beta}{2} = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\beta}{2}$$

$$2 \cos \frac{\alpha}{2} - 2 \cos \frac{\alpha}{2} = 2$$

$$\sin(x+y) \cdot \sin(x-y) = \sin^2 x \cos^2 y - \cos^2 x \sin^2 y =$$

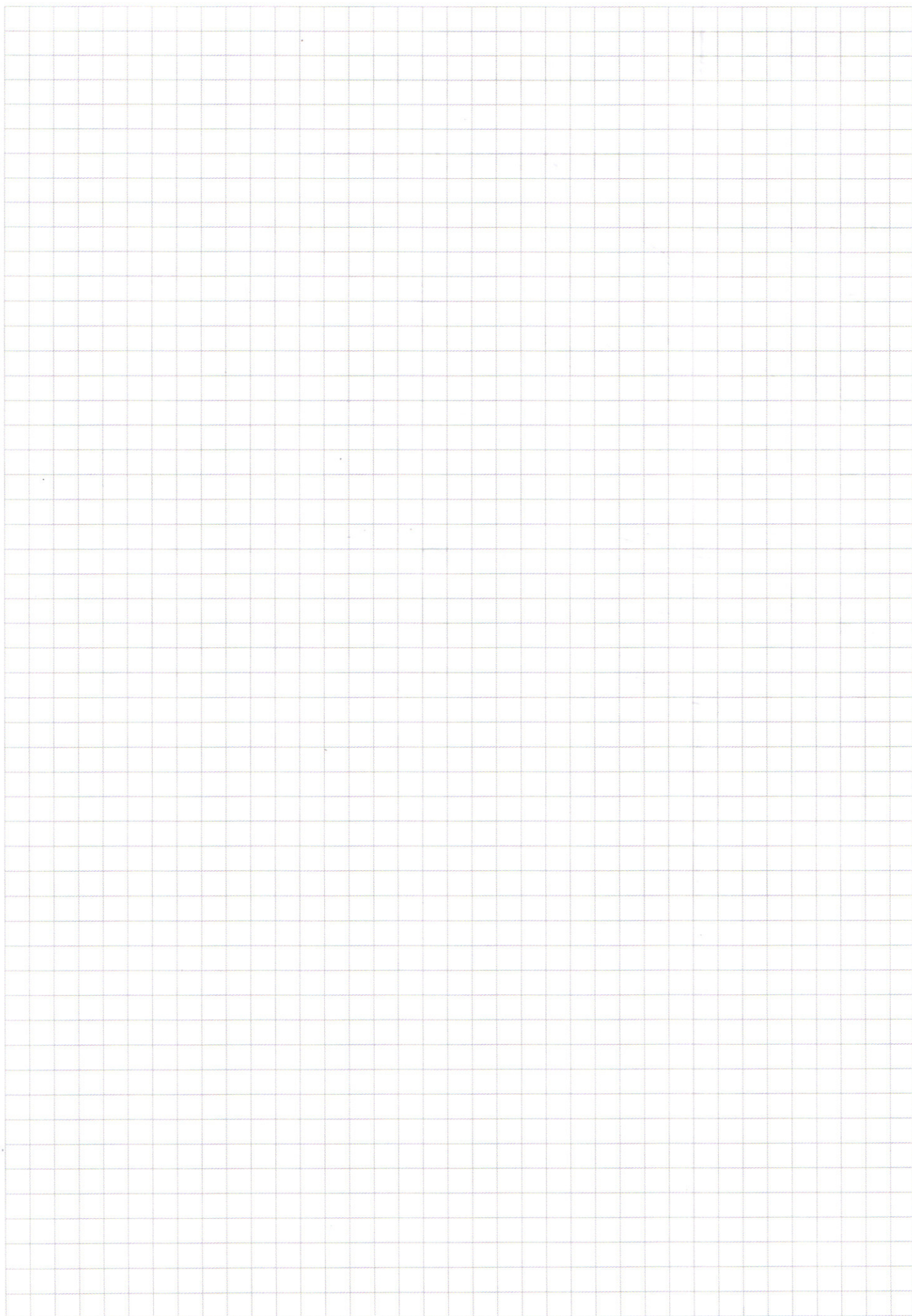
$$= 1 - \cos^2 x - \sin^2 y = \sin^2 x \cos^2 y - \cos^2 x$$

$$\sin(\alpha + \beta) (\alpha - \beta) = \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha$$



☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

пусть $x = -2y$

$$(16y^2)^{\lg y} = 2y^{\lg 2y^2}$$

$$(4y)^2 \lg y = (2y)^{\lg 2y^2}$$

$$2y = t \quad \lg y = \lg \frac{t}{2} \quad \lg \frac{t^2}{2}$$

$$2t \lg \frac{t}{2} = t \lg \frac{t^2}{2}$$

$$2t \lg \frac{t}{2} = t \lg \frac{t^2}{2} \rightarrow 0$$

$$t \lg \frac{t}{2} (2 - t \lg \frac{t}{2}) = 0$$

$$\lg \frac{t}{2} = \lg \frac{t^2}{4} = \lg 2$$

$x = y - 4$

$$\left(\frac{x}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(1-xy)}$$

$$\left(\frac{x}{y^2}\right)^{\lg y}$$

$$x^{\lg y} = (-x)^{\lg(1-xy)} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$x^{\lg y} - \lg y = y^{2 \lg y}$$

$$\ln$$

$$(y-y)^{\lg y - \lg(y-y^2)} - y^{2 \lg y} = 0$$

$$|a| + |b| = 12$$

$$a - b = 12 - 2x \quad (1)$$

$$a + b = 2y \quad (2)$$

$$-a + b = 2x - 12 \quad (3)$$

$$-a - b = -2y \quad (4)$$

$$a = y - x + 6$$

$$b = x + y - 6$$

$$(1) \ a > 0, \ b < 0$$

$$y - x + 6 > 0$$

$$\Rightarrow y > x - 6$$

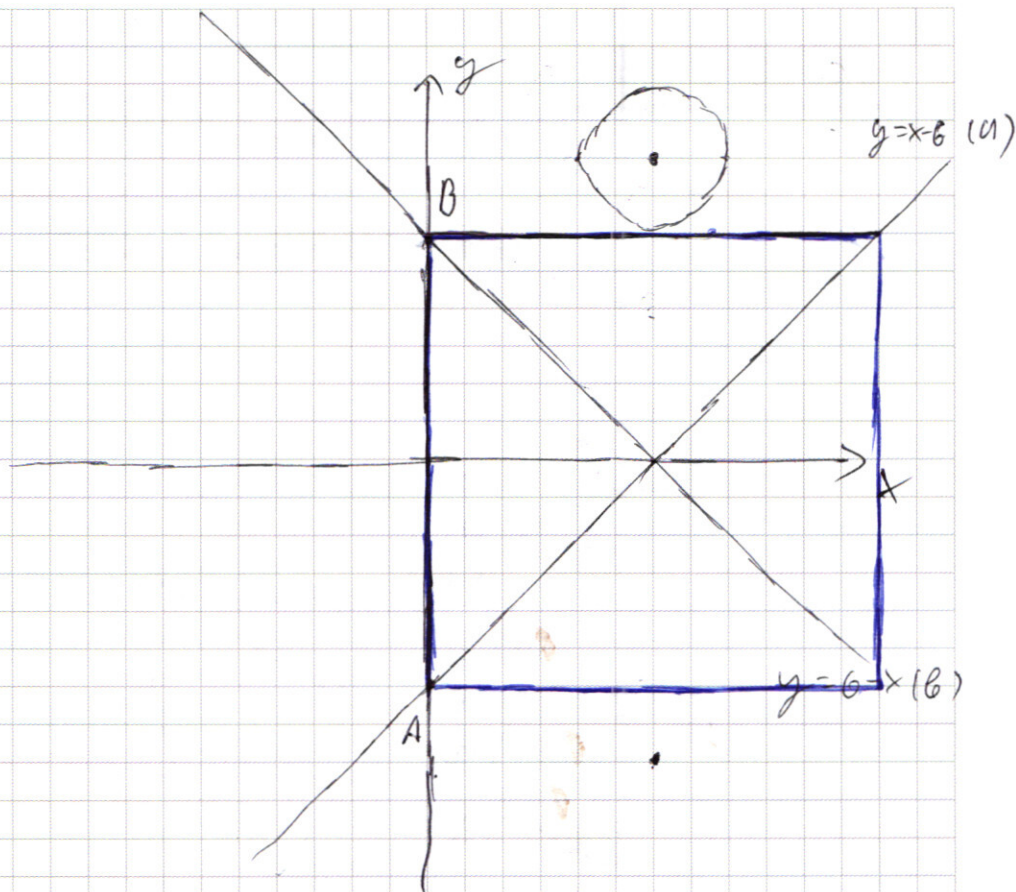
$$y - 6 + x < 0$$

$$y < 6 - x$$

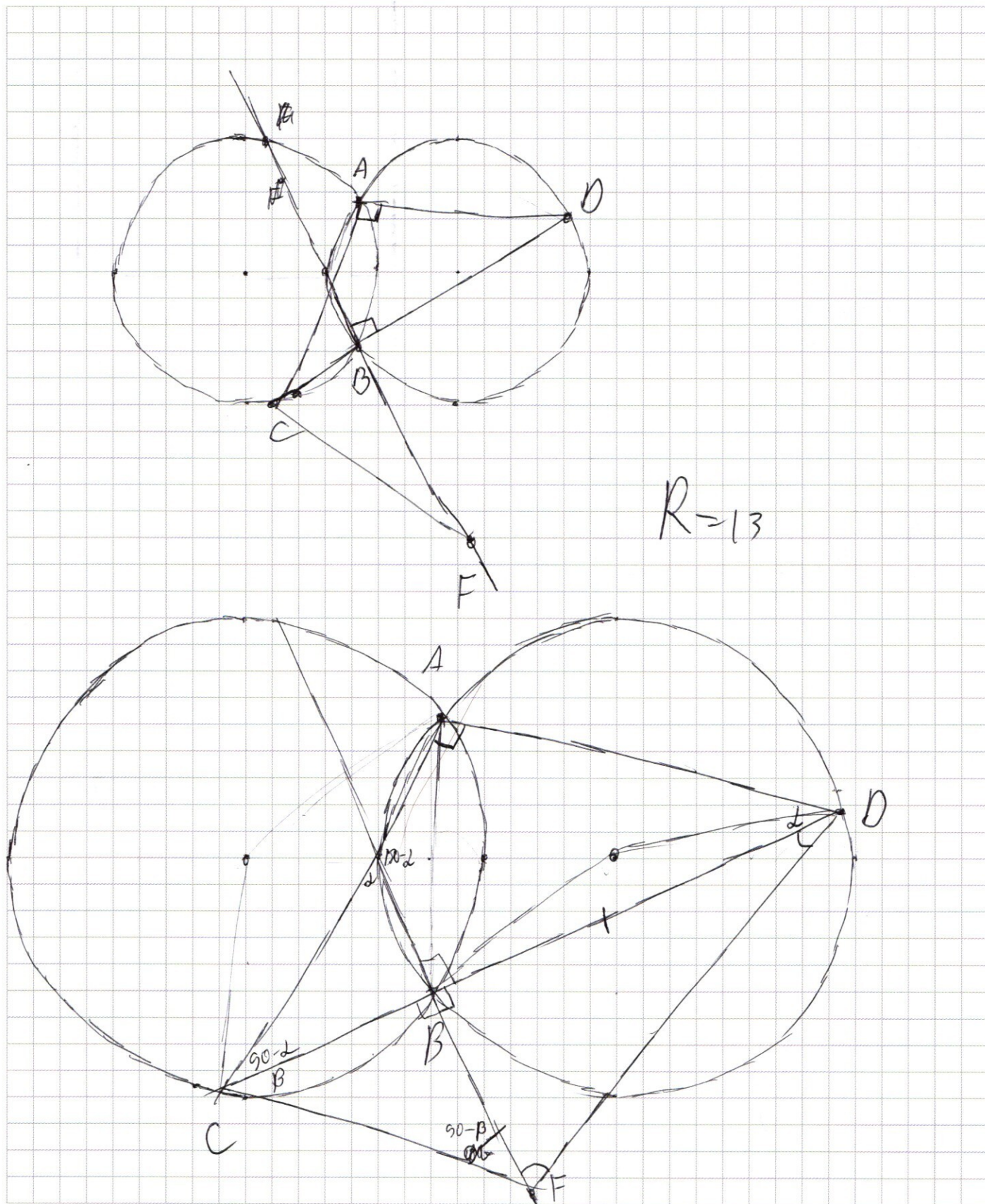
$$\sqrt{12 - 2x} = 12 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

✓ подготавливает отрезок AB $A(0; -6)$ $B(0; 6)$

$$(2) \ a, \ b > 0, \ 2y = 12 \Rightarrow y = 6$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\begin{array}{r|l} 10 & 8 & 7 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & 7 & 5 & 5 \\ 6 & 7 & 5 & & 5 \\ 1 & 3 & 5 & & 5 \\ 2 & 7 & & & 3 \\ & & & & 3 \\ & & & & 3 \end{array}$$

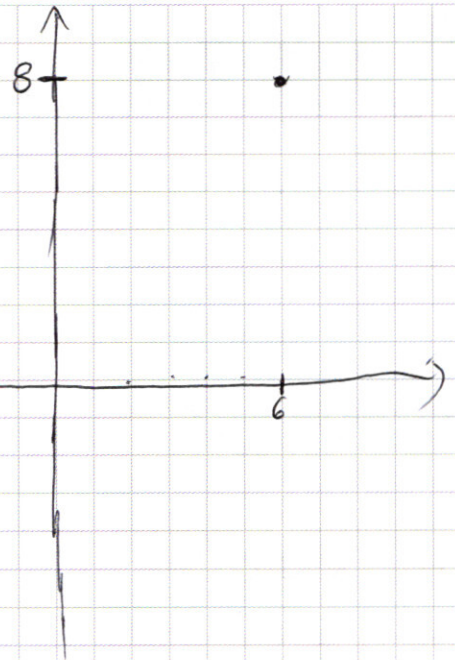
1
2
3
4
5
6
7

3³ · 5⁴ ОК дальше привнеси

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{1/2} = (-x)^{1/2} (xy)^{1/2}$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

~5



$$|x-6-y| + |x-6+y| = 12$$

$$|x-6| + |y-8| = a$$

$$|y+6-x| + |x-6+y| = 12$$

$$a-b=$$

$$|x-y-6| + |x+y-6| = 12$$

$$|y+6-x| + |x+y-6| = 12$$

$$|a| + |b| = 12$$

$$a-b = 12-2x$$

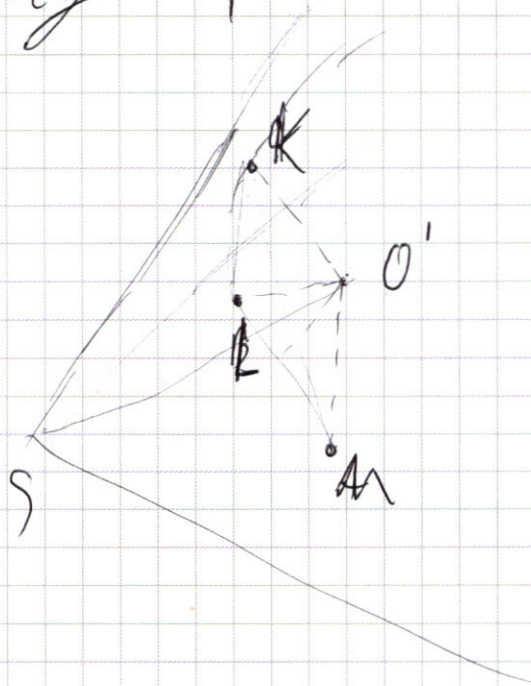
$$a+b = 2y$$

$$-a+b = 2x-12$$

$$-a-b = -2y$$

$$\cos 2\alpha + \cos \beta = 2 \cdot \left(\cos \frac{2\alpha+\beta}{2} \right) \left(\cos \frac{2\alpha-\beta}{2} \right)$$

12



$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

$$a, y > 0$$

$$x^2 + 4x(4+y) + 2y^2 + 8y = 0$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$(x^4)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \cdot (y^2)^{\lg y}$$

$$x^{4 \lg y} = -x^{\lg(-xy)} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$\text{пусть } a = -x$$

$$a^{4 \lg y} = a^{\lg(-xy)} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$a^{4 \lg y + \lg(-xy)} = y^{2 \lg y}$$

$$a^{\lg y(4-a)} = y^{2 \lg y}$$

$$a^{(4-a)} = y^2$$

$$D = (y+4)^2 - (2y^2 + 8y) =$$

$$= y^2 + 8y + 16 + 8y^2 - 8y =$$

$$= 16 - 7y^2$$

$$(3y-4)^2$$

$$x = \frac{(y+4) \pm |3y-4|}{2}$$

$$x = \frac{(y+4) - |3y-4|}{2}$$

$$2y^2 + ay - a^2 + 4a - 8y = 0$$

$$\lg \alpha + \lg \beta =$$

$$x = y - 4$$

$$(y-4)^{\lg y} = (4-y)$$

$$(4-y)^{\lg y} = (4-y)^{\lg(4y-y^2)} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$(4-y)^{\lg y - \lg(4y-y^2)} - y^{2 \lg y} = 0$$

$$y=2 \quad \frac{\lg 16 - \lg 8 - \lg 4}{2} = 2 \lg 4$$

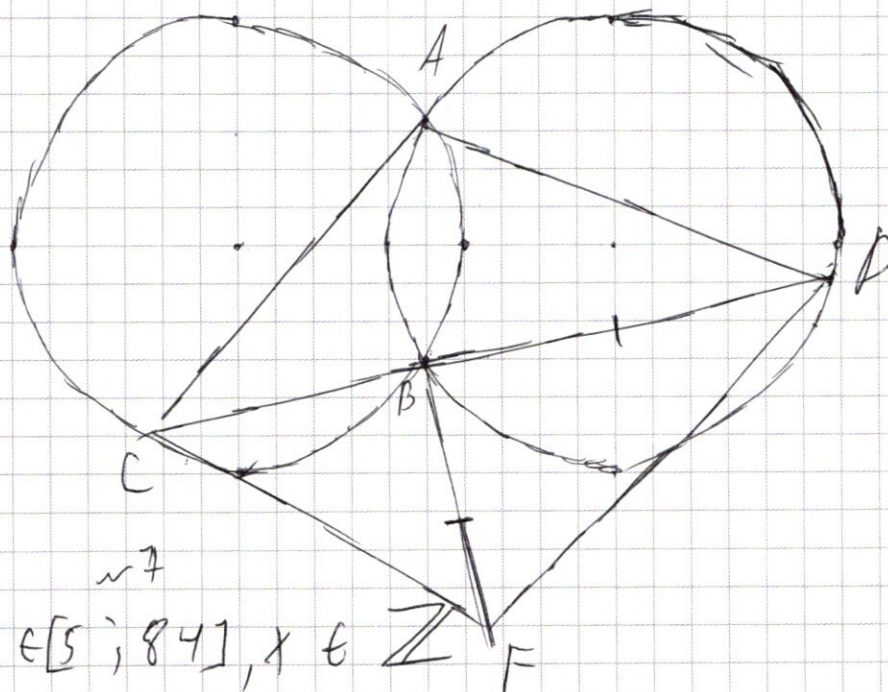
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3^x + 4 \cdot 3^{81} < 85 + x \cdot (3^{81} - 1) \quad \sim 7$$

$$(x - 4) \cdot 3^{81} > 3^x + x - 85$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 4 \\ x = 85 \end{array} \right\} \text{ знак равенства}$$

~ 5



$$x \in [5; 84], x \in \mathbb{Z}$$

$$y \geq 3^5 + 4 \cdot 3^{81} \quad y \geq 3^6 + 4 \cdot 3^{81}$$

$$y < 5 \cdot 3^{81} - 80 \quad y < 6 \cdot 3^{81} - 79$$