

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2 $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x \quad (\Leftrightarrow)$

$(\Leftrightarrow) 2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x$

Делаем ещё преобразования:

$$2 \cos 5x \cos 2x - 2 \sin 5x \cos 2x = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2} \cos 10x = 0$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 0$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) (2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)) = 0$$

①

②

Рассмотрим эти оба случая: (когда одна из скобок равна нулю)

① $\cos 5x = \sin 5x \quad | : \cos 5x \neq 0 \quad (5x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n; n \in \mathbb{Z}; x \neq \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}; n \in \mathbb{Z})$
 $\tan 5x = 1; 5x = \frac{\pi}{4} + \pi k; k \in \mathbb{Z}; x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}; k \in \mathbb{Z};$

② $2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x) = 0$

$$\sqrt{2} \cos 2x = \cos 5x + \sin 5x$$

$$\sqrt{2} \cos 2x = \cos 5x + \cos(\frac{\pi}{2} - 5x)$$

$$\sqrt{2} \cos 2x = 2 \cos \frac{\pi}{4} \cos(\frac{10x - \pi}{2})$$

$$\sqrt{2} \cos 2x = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos(5x - \frac{\pi}{4})$$

$$\cos 2x - \cos(5x - \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$-2 \sin(\frac{7x - \frac{\pi}{4}}{2}) \sin(\frac{\frac{\pi}{4} - 3x}{2}) = 0$$

2.1

2.2

$$(2.1) -2 \sin \left(\frac{7x - \frac{\pi}{4}}{2} \right) = 0; \sin \left(\frac{7x - \frac{\pi}{4}}{2} \right) = 0; \frac{7x - \frac{\pi}{4}}{2} = \pi m; m \in \mathbb{Z};$$

$$7x - \frac{\pi}{4} = 2\pi m; m \in \mathbb{Z}; 7x = \frac{\pi}{4} + 2\pi m; m \in \mathbb{Z}; x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi m}{7}; m \in \mathbb{Z};$$

$$(2.2) \sin \left(\frac{\frac{\pi}{4} - 3x}{2} \right) = 0; \frac{\frac{\pi}{4} - 3x}{2} = \pi l; l \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{4} - 3x = 2\pi l; l \in \mathbb{Z};$$

$$3x = \frac{\pi}{4} - 2\pi l; l \in \mathbb{Z}; x = \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi l}{3}; l \in \mathbb{Z};$$

Итак, с учетом ОДЗ: ответ:

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{5}; x_2 = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi m}{7}; x_3 = \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi l}{3}; k, m, l \in \mathbb{Z}.$$

N5

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\ ((|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

1-ое ур системы задает на декартовой плоскости квадрат, со стороной 12, где угловые точки имеют координаты $(12; 0); (0; 12); (-12; 0); (0; -12)$:

2-ое ур. задает 4-е окружности, с центрами в точках $(6; 8); (6; -8); (-6; 8); (-6; -8)$ с радиусом $= \sqrt{a}$ (Все 4-е окр.)

O_3 и O_4 как и

интересно, как же интересно рассмотреть O_1 и O_2 с радиусами $\sqrt{a}$. Два решения: это когда O_1 и O_2 касаются сторон квадрата.

Тогда наши радиусы $= 2$; $r = \sqrt{a}$; $\sqrt{a} = 2$; $\Rightarrow a = 4$

Ответ: $a \in \{4\}$

$$2\cos 2x (\cos 5x - \cos(\frac{\pi}{2} - 5x)) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$\frac{10x - \frac{\pi}{2}}{2}$$

$$2\cos 2x (-2 \cdot \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin(\frac{10x - \frac{\pi}{2}}{2})) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$-4\cos 2x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin(\frac{10x - \frac{\pi}{2}}{2}) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$-2\cos 2x \cdot \sin(\frac{10x - \frac{\pi}{2}}{2}) = \cos 10x$$

$$\sin 5x \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4} \sin 5x = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x$$

$$-2\cos 2x \cdot \sin(5x - \frac{\pi}{4}) - \cos 10x = 0$$

$$\cos(2x + 5x) = \cos 1x \cos 5x - \sin 1x \sin 5x$$

$$-2\cos 2x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin 5x - \cos 5x) - \cos(2 \cdot 5x) = 0;$$

$$-\cos 2x \cdot \sqrt{2} (\sin 5x - \cos 5x) - (\sin^2 5x - \cos^2 5x) = 0$$

$$2\cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$2\cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2} \cos 10x = 0$$

$$2\cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 0$$

$$2\cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x) = 0$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) / 2\cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x) = 0$$

$$① \cos 5x = \sin 5x \quad / \cos 5x \neq 0;$$

$$\tan 5x = 1; \quad 5x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \quad | \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5}$$

$$② 2\cos 2x = \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)$$

$$\sqrt{2} \cos 2x = \cos 5x + \sin 5x \quad \cos(\frac{\pi}{4} - 5x)$$

$$\sqrt{2} \cos 2x = 2\cos \frac{\pi}{4} \cos(\frac{10x - \frac{\pi}{2}}{2})$$

$$\sqrt{2} \cos 2x = \sqrt{2} \cos(\frac{10x - \frac{\pi}{2}}{2}) \rightarrow \cos 2x = \cos(\frac{10x - \frac{\pi}{2}}{2})$$

$$\cos 2x - \cos(5x - \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$-\sin(\frac{\pi}{4} + 3x) \sin(7x - \frac{\pi}{4}) = 0 \rightarrow 7x - \frac{\pi}{4} = 0;$$

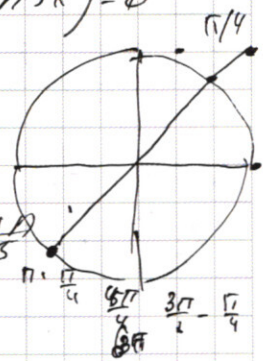
$$7x = \frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$x = \frac{\pi}{28} + \frac{\pi n}{7} \quad ; \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin(\frac{\pi}{4} - 3x) = 0$$

$$\frac{\pi}{4} - 3x = \pi n$$

$$3x = \frac{\pi}{4} - \pi n \quad ; \quad x = \frac{\pi}{12} - \frac{\pi n}{3} \quad ; \quad n \in \mathbb{Z}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1 $16875 \div 9 = 1875$ $= 9 \cdot 1875 = 9 \cdot 3 \cdot 625 = 9 \cdot 3 \cdot 25 \cdot 25 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$

$1875 \div 3 = 625$ $625 = 5^4$

$625 = 5^4$ $27 = 3^3$ $1250 = 2 \cdot 5^4$ $16875 = 3^3 \cdot 5^5$

Т.е. $16875 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ - 7 цифр.

а б в д е ф г х - весы. число

$16875 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 9 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$

$76543211 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$ $54 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

$65432111 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ 3555533

$432111 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$ $321 = 3 \cdot 2 \cdot 1$

$C_4^2 = \frac{A_4}{P_2} = \frac{4!}{2!} = 6$ $C_{2n}^{2n} = 1$

$C_8^7 = 8$ $C_2^2 = 1$ $C_2^1 = 2$ $C_2^0 = 1$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\cos(4x+3x) + \cos 3x - \sqrt{2} \cos(7x+3x) = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cdot (\cos 7x \cos 3x - \sin 7x \sin 3x) = \sin 7x + \sin 3x$$

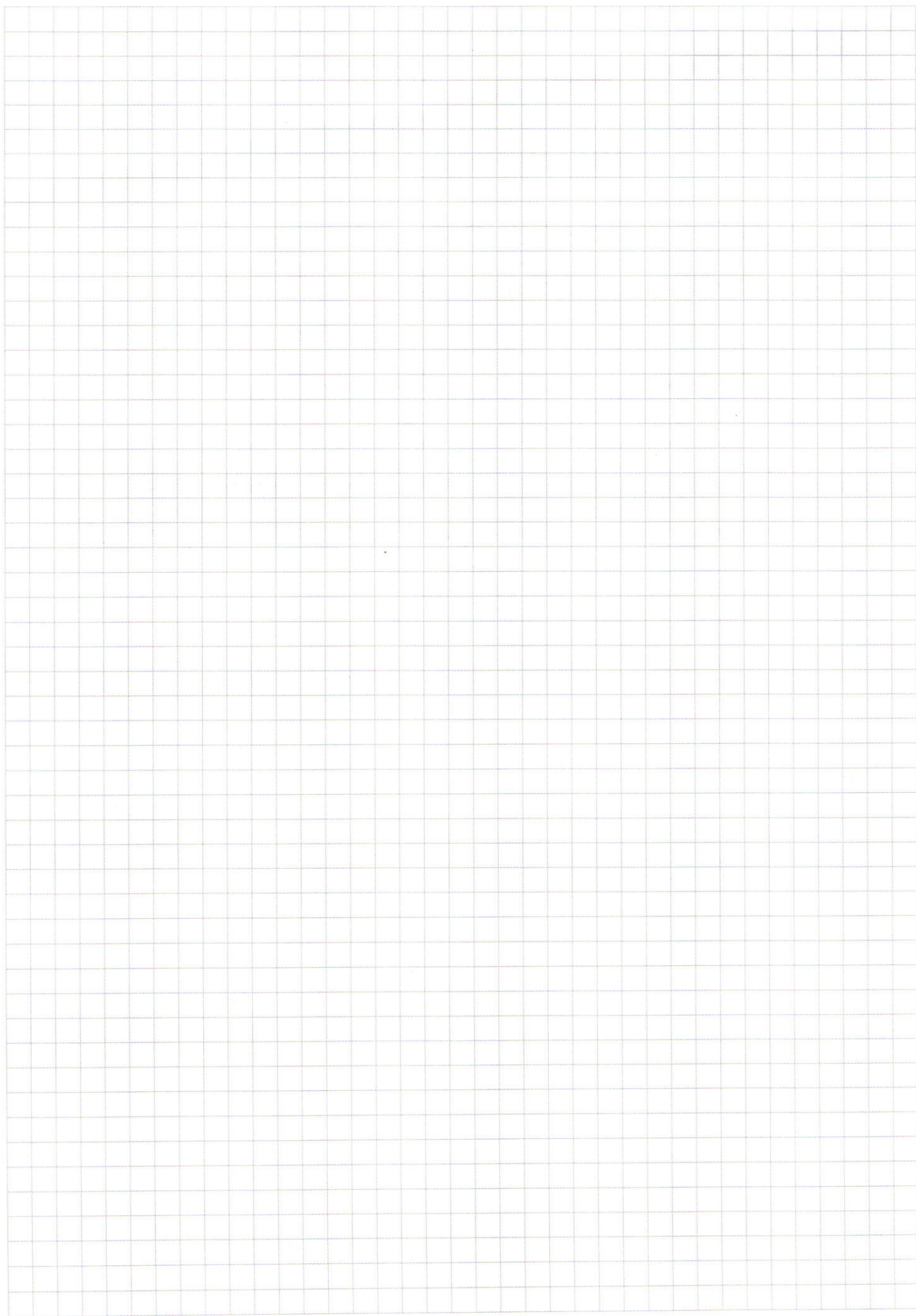
$$\cos 7x + \cos 3x - \cos 7x \cos 3x \sqrt{2} + \sin 7x \sin 3x \sqrt{2} = \sin 7x + \sin 3x = 0$$

$$\cos 7x - \cos 7x \cos 3x \sqrt{2} + \cos 3x - (\sin 7x - \sin 7x \sin 3x \sqrt{2} + \sin 3x) = 0$$

$$\sqrt{2} (\cos 5x \cos 2x) - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - 2 \sin 5x \cos 2x = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} \cos 10x$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 1 $16875 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ (7 цифр)

Нам интересны: 2 набора: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$
 $9 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$

1-ый: 7 цифр, поэтому на ещё одно место приходится 1. Поэтому $C_2^7 \cdot 8$.

2-ой: 6 цифр, поэтому на ещё ~~одно~~ два места приходится 2 единицы: Поэтому $C_2^7 \cdot 8 \cdot 8$.

гон - во тою, что т. А в отр. CN. $\rightarrow$ Рассмотрим $\triangle BMD$ и $\triangle AMN$: $\angle BMD = \angle BDM = 45^\circ$ (т.к. $\angle BDA = \angle ACD = 45^\circ$, то $\Rightarrow \angle BDA = \angle BDM = 45^\circ$, и т.к. $\angle MBD = 90^\circ$, то $\angle BMD = 45^\circ$). $\angle AMN = \angle BMD = 45^\circ$ как вертик., а $\angle CNB = 45^\circ$ тоже, и поэтому в $\triangle ANM$ $\angle MAN = 180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ$ т.е. он прямой, $\Rightarrow$ это т.к. $\angle CAD = 90^\circ$ и $\angle MAN = 90^\circ$, и в сумме они дают 180° , то т. А в отр. CN).

б) Из $\triangle CBF$ ($\angle CBF = 90^\circ$) находим, что $BF = \sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{576} = 24$. $BD = BF = 24$. Рассмотрим $\triangle NBD$: ($\angle NBD = 90^\circ$). ~~NB~~ $NB^2 = \sqrt{26^2 - 24^2} = \Rightarrow NB = 10 = BE$. Рассмотрим $\triangle NCB$ ($\angle NBC = 90^\circ$): $CN^2 = 10^2 + 10^2$; $CN^2 = 200$. $\Rightarrow CN = 5\sqrt{8} = 10\sqrt{2}$. $S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CF \cdot \sin(\angle ACF)$.

Найдем AC: $CD = 10 + 24 = 34$. Из $\triangle CAD$: ~~cos~~ $\cos(\angle ACD) = \frac{AC}{CD}$; $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{AC}{34} \Rightarrow AC = 17\sqrt{2}$;

$\angle BEF = \arcsin\left(\frac{24}{26}\right)$; $\Rightarrow \angle ACF = \frac{\pi}{4} + \arcsin\frac{24}{26}$

Найдем $S_{\triangle ACF}$: $S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CF \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + \arcsin\frac{24}{26}\right)$

$$= \frac{1}{2} \cdot 17\sqrt{2} \cdot 26 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{24^2}{26^2}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{24}{26} \right) =$$

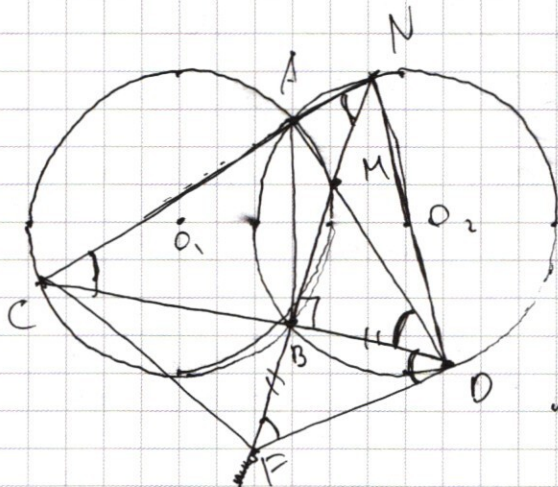
$$= 17\sqrt{2} \cdot 13 \cdot \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{100}{676}} + \frac{24}{26} \right) = 17 \cdot 13 \cdot \left(\frac{10}{26} + \frac{24}{26} \right) =$$

$$= 17 \cdot 13 \cdot \frac{34}{26} = 17^2 = 289$$

Ответ: $CF = 26$; $S_{\triangle ACF} = 289$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 6



$$\angle CAD = 90^\circ$$

$$BF = BD \Rightarrow \angle BFD = \angle BDF = 45^\circ \quad (\triangle BFD - \text{isosceles}).$$

C F - ?

Решение:

Пьерс, прогнел FB 90

пересекается с второй окружн., т. N - там где эта прямая пересекает окр O_2 , т. M - там где пересекает AD.

$\angle MBD = 90^\circ \Rightarrow \triangle MBD$ - прямоугольный. а также $\triangle NBD$ прямоугольный, гипотенуза его лежит на диаметре окружности $O_2 \Rightarrow ND = 26$. Соединим точки A и N .

$\angle AOB = \angle ANB$ как вписанные, опирающиеся на одну дугу.

т.к. окруж. O_1 и O_2 равны, то и $\angle ACB = \angle ADB = 45^\circ$ ($\angle CAD = 90^\circ$). $\angle CNB = \angle BFD = 45^\circ \Rightarrow$, т.к. $NI \perp$

выражает все прираще, $CN \parallel FD$ ($\angle CNF = \angle NFD$ как
накр. лежащ.). Тогда: $CNDF$ трапеция, где CN и

FD основана: $\Delta CBN \sim \Delta FBD$ по 2-ум углам; а следовательно $\Delta NBD \sim \Delta CBF$. (Имеем, что гран.

CNDF парков, где $NO = CF$). Т.о. (так как $\Delta NBO =$
 ΔCBF по 2-му ст. и при этом $CF =$

$\therefore ND = 26.$ (ПРИМЕЧАНИЕ: я упустил

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

13) $\int \left(\frac{x^4}{y^2} \right) dy = (-x) \lg(-xy)$

$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$ (5)

② $2y^2 - 8y - x^2 - 4x - xy: 2y(y-4) - x(x+4)$

~~$4xy + xy - x^2 - 4x - 8y = 0$~~ ; $x^2 + 4xy + 4y^2$

~~$2xy + 2xy - 4xy = (x+2y)^2$~~

$6y^2 + xy - 4x - 4y = (x+2y)^2$

6
 $\angle 45^\circ =$

$|6-y| + |-6+y| = 12$
-18 18

$|y| + |y| = 12$

$|6-y| + |6+y| = 12$

$|12-y| + |-12+y| = 12$

$|3+y| + |-3-y| = 12$
3 9

$|-2+y| + |-2-y| = 12$

