МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР 2 0 0 0 3 1 1 5

Заполняется ответств... рём

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 4 и 9.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12, \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90°$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)\,x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$16875=3^3\cdot 5^4$. Произведение цифр восьмизначного числа равно 16875, когда оно составлено одним из двух следующих наборов цифр:

1) 1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5 — $\frac{8!}{3!\cdot 4!}=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2}=8\cdot 7\cdot 5=40\cdot 7=280$ чисел;

2) 1, 1, 3, 5, 5, 5, 5, 9 — $\frac{8!}{2!\cdot 4!}=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{2}=8\cdot 7\cdot 5\cdot 3=280\cdot 3=840$ чисел.

Итого $280+840=1120$ чисел.

Ответ: 1120 чисел.

№2.

Вспомогательное утверждение:

$\cos\alpha-\sin\alpha=\cos\alpha-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-2\sin\left(\frac{\alpha+\frac{\pi}{2}-\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\frac{\pi}{2}+\alpha}{2}\right)=-2\sin\frac{\pi}{4}\times$

$\times\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$

Решение уравнения:

$\cos 7x+\cos 3x-\sqrt{2}\cos 10x=\sin 7x+\sin 3x$

$(\cos 7x-\sin 7x)+(\cos 3x-\sin 3x)-\sqrt{2}\cos 10x=0$

преобразуем скобки, используя вспомогательное утверждение

$-\sqrt{2}\sin\left(7x-\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{2}\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{2}\cos 10x=0 \;\Big|\cdot -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin\left(7x-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)+\cos 10x=0$

$2\sin\left(\frac{7x-\frac{\pi}{4}+3x-\frac{\pi}{4}}{2}\right)\cos\left(\frac{7x-\frac{\pi}{4}-3x+\frac{\pi}{4}}{2}\right)+\cos 10x=0$

$2\sin\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)\cos 2x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-10x\right)=0$

$2\sin\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)\cos 2x-\sin\left(10x-\frac{\pi}{2}\right)=0$

$2\sin\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)\cos 2x-2\sin\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)=0$

$$2\sin\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left(\cos 2x-\cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)\right)=0$$

$\sin\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)=0$

$5x-\frac{\pi}{4}=\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

$5x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

$x=\frac{\pi}{20}+\frac{\pi n}{5},\ n\in\mathbb{Z}$

или

$\cos 2x-\cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)=0$

$-2\sin\left(\frac{2x+5x-\frac{\pi}{4}}{2}\right)\sin\left(\frac{2x-5x+\frac{\pi}{4}}{2}\right)=0$

$\sin\left(\frac{7}{2}x-\frac{\pi}{8}\right)\sin\left(-\frac{3}{2}x+\frac{\pi}{8}\right)=0$

$\sin\left(\frac{7}{2}x-\frac{\pi}{8}\right)=0$ или $\sin\left(-\frac{3}{2}x+\frac{\pi}{8}\right)=0$

$\frac{7}{2}x-\frac{\pi}{8}=\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

$\frac{7}{2}x=\frac{\pi}{8}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

$x=\frac{2}{7}\cdot\frac{\pi}{8}+\frac{2\pi k}{7}=$

$=\frac{\pi}{28}+\frac{2\pi k}{7},\ k\in\mathbb{Z}$

$-\frac{3}{2}x+\frac{\pi}{8}=\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$

$-\frac{3}{2}x=-\frac{\pi}{8}+\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$

$x=\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{8}+\frac{-2\pi m}{3}=$

$=\frac{\pi}{12}-\frac{2\pi m}{3},\ m\in\mathbb{Z}$

$x=\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi l}{3},\ l\in\mathbb{Z}$

Ответ: $\frac{\pi}{20}+\frac{\pi n}{5};\ \frac{\pi}{28}+\frac{2\pi k}{7};\ \frac{\pi}{12}+\frac{2\pi l}{3};\ n,k,l\in\mathbb{Z}$.

№3.

$$\begin{cases}\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y}=(-x)^{\lg(-xy)}\\ 2y^2-xy-x^2-4x-8y=0\end{cases}$$

Решим вначале второе уравнение (выразим x через y), а ОДЗ первого уравнения определим далее, в каждом из получившихся случаев.

$2y^2-xy-x^2-4x-8y=0$

$-x^2-x(4+y)-2y(4-y)=0$

$x^2+x(4+y)+2y(4-y)=0$

$D=(4+y)^2-4\cdot 2y(4-y)=16+8y+$

$+y^2-32y+8y^2=9y^2-24y+16=$

$=(3y)^2-2\cdot 3y\cdot 4+4^2=(3y-4)^2\geq 0$

$x_1=\frac{-y-4+3y-4}{2}=\frac{2y-8}{2}=y-4$

$x_2=\frac{-y-4-3y+4}{2}=\frac{-4y}{2}=-2y$

Знак $3y-4$ при этом не важен, так как $x=\pm\frac{\sqrt{D}}{2a}-\frac{b}{2a}$.

Случай 1: $x=y-4$.

$\left(\frac{(y-4)^4}{y^2}\right)^{\lg y}=(4-y)^{\lg y(4-y)}$

Случай 2: $x=-2y$.

$\left(\frac{(-2y)^4}{y^2}\right)^{\lg y}=(2y)^{\lg 2y\cdot y}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

ОДЗ: $4-y\geq 0;\ y>0;\ 4-y>0$

$y>0;\ y<4 \Rightarrow y\in(0;4)$

$$\frac{(4-y)^{4\lg y}}{y^{2\lg y}}=(4-y)^{\lg y+\lg(4-y)}$$

$$\frac{(4-y)^{4\lg y}}{100}=(4-y)^{\lg(4-y)}\cdot(4-y)^{\lg y}$$

$$\frac{1}{100}(4-y)^{4\lg y}=10(4-y)^{\lg y}$$

$$\frac{1}{100}(4-y)^{3\lg y}=10$$

$$(4-y)^{3\lg y}=10^3=y^{3\lg y}$$

$4-y=y \Rightarrow y=2$ — $(-2;\ 2)$

корень — $(-2;\ 2)$.

ОДЗ: $y>0$

$$\left(\frac{16y^4}{y^2}\right)^{\lg y}=(2y)^{\lg 2y+\lg y}$$

$$(16y^2)^{\lg y}=(2y)^{\lg 2y}\cdot(2y)^{\lg y}$$

$$16^{\lg y}\cdot y^{2\lg y}=10\cdot 2^{\lg y}\cdot y^{\lg y}$$

$$16^{\lg y}\cdot 100=10\cdot 2^{\lg y}\cdot 10$$

$$16^{\lg y}=2^{\lg y}$$

$2^{4\lg y}=2^{\lg y} \Rightarrow 4\lg y=\lg y \Rightarrow \lg y=0$

$y=1$ — $(-2;\ 1)$

$$(2y^2)^{\lg y}=(2y)^{\lg 2y^2}$$

$$2^{\lg y}\cdot y^{2\lg y}=2^{\lg 2y^2}\cdot y^{\lg 2y^2}$$

$$2^{\lg y-\lg 2y^2}=y^{\lg 2y^2-\lg y^2}$$

$$2^{\lg y-\lg 2y^2}=y^{\lg 2}$$

$$(16y^2)^{2\lg y}=1$$

$$(16y^2)^{\lg y}=(2y)^{\lg 2y^2}$$

$$\left(\frac{16y^2}{2y}\right)^{\lg y}=\frac{(2y)^{\lg 2y^2}}{(2y)^{\lg y}}$$

$$(8y)^{\lg y}=(2y)^{\lg 2y}$$

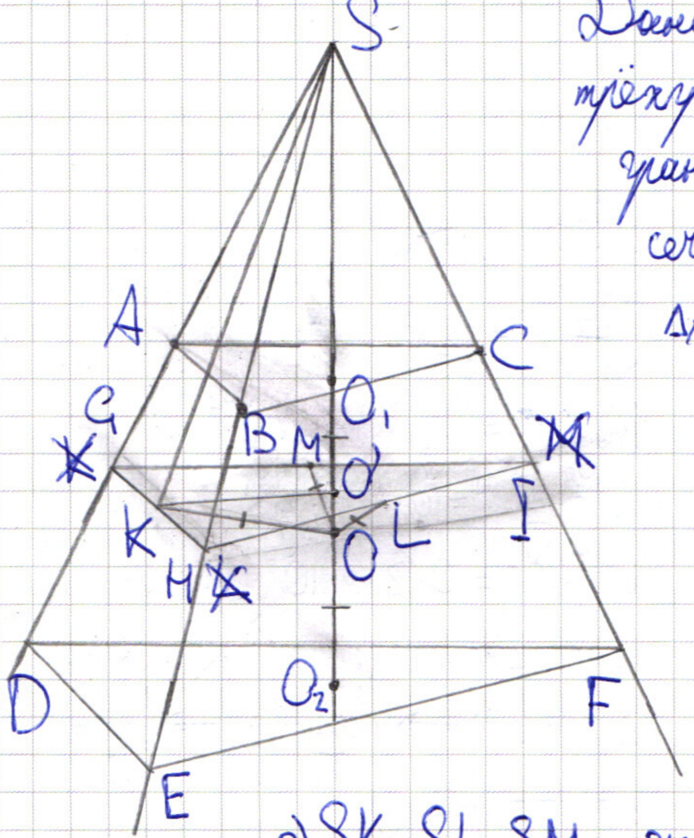
$$\left(\frac{8y}{2y}\right)^{\lg y}=(2y)^{\lg 2}$$

$$4^{\lg y}=2^{\lg 2}\cdot y^{\lg 2}$$

№5.

Дано: сфера $(O; R)$ вписана в трёхгр. $\angle$ с вершиной S, касается граней в точках K, L и M, сечения угла из условия — $\triangle ABC$ и $\triangle DEF$, $S_{ABC}=4$, $S_{DEF}=9$.

Найти: $\angle KSO$, S сечения угла плоскостью (KLM).



Решение: 1) $SO \cap (ABC) = O_1$, $SO \cap (DEF) = O_2$, сечение угла плоскостью (KLM) — $\triangle GHI$, $SO \cap (KLM) = O'$.

2) $SK = SL = SM$ — отрезки касательных. $KO = LO = MO$ — радиусы. $\triangle SKO = \triangle SLO = \triangle SMO$ по трём сторонам. $\angle SOL = \angle SOK = \angle SOM \Longrightarrow \triangle KOO' = \triangle LOO' = \triangle MOO' \Rightarrow SO \perp (KLM) \Longrightarrow (KLM) \parallel (ABC) \parallel (DEF)$.

3) Треугольные пирамиды, отсекаемые тремя параллельными плоскостями от трехгранного $\angle$, подобны. $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, $k = \sqrt{\frac{S_{ABC}}{S_{DEF}}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$. SO_1 — высота ~~пр~~ пирамиды $SABC$, SO_2 — высота пирамиды $SDEF \Longrightarrow SO_2 \cdot k = SO_1$. $SO_2 \cdot k + 2R = SO_2 \Longrightarrow 2R = SO_2(1-k) \Longrightarrow R = SO_2 \cdot \frac{1-k}{2} = \frac{1}{6} SO_2 = \frac{3}{2} SO_1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{4} SO_1$.

4) $SK \perp KO$, т. к. SK — касательная. $\sin \angle KSO = \frac{KO}{SO} = \frac{R}{4R+R} = \frac{1}{5} \Longrightarrow \angle KSO = \arcsin \frac{1}{5}$.

5) $SK = \sqrt{SO^2 - KO^2} = \sqrt{(5R)^2 - R^2} = R\sqrt{24} = 2R\sqrt{6}$. $KO' \perp SO$, т. к. $KO' \subset (GHI)$. $\cancel{KO' = \sqrt{SK}}$ $KO' = SK \sin \angle KSO = 2R\sqrt{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2\sqrt{6}}{5} R$.

$SO' = \sqrt{SK^2 - KO'^2} = \sqrt{4R^2 \cdot 6 - \frac{4R^2 \cdot 6}{25}} = 2R\sqrt{6} \cdot \sqrt{\frac{24}{25}} = 2R\sqrt{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot 2\sqrt{6} = \frac{24R}{5}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

б) $SABC \sim SGHI$, $SO_1 = 4R$ — высота $SABC$, $SO' = \frac{24R}{5}$ — высота $SGHI \Longrightarrow k' = \frac{SO_1}{SO'} = \frac{4}{24} \cdot 5 = \frac{5}{6}$, $S_{GHI} = \frac{S_{ABC}}{k'^2} = 4 \cdot \frac{36}{25} = \frac{16 \cdot 36}{100} = 5{,}76$

Ответ: $\angle KSO = \arcsin\frac{1}{5}$; $S_{GHI} = 5{,}76$.

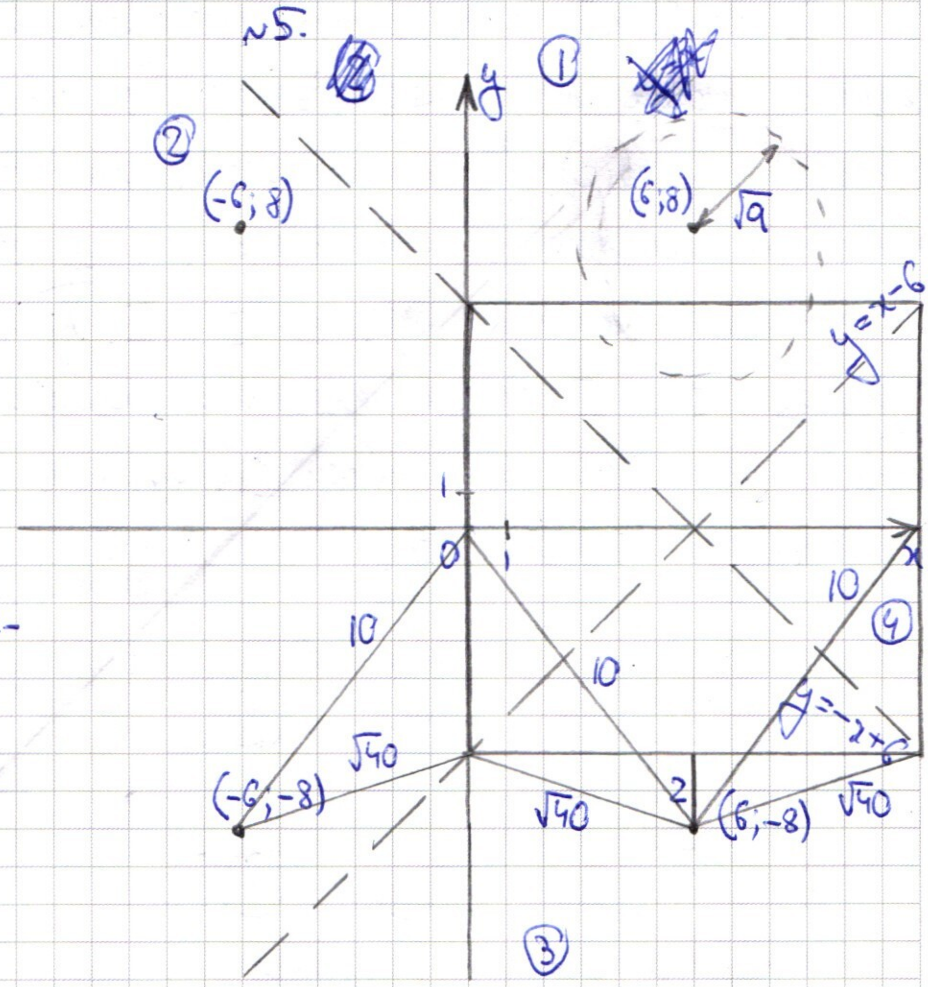
№5.

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

$x-6-y=0 \Longrightarrow y = x-6$

$x-6+y=0 \Longrightarrow y=-x+6$

Построим график $|x-6-y|+|x-6+y|=12$, раскрывая модули в каждой из обозначенных на рисунке областей плоскости.



① $-\cancel{x}+\cancel{6}+y+\cancel{x}-\cancel{6}+y=12$

$y=6$

② $-x+\cancel{6}+\cancel{y}-x+\cancel{6}-\cancel{y}=\cancel{12}$

$x=0$

③ $\cancel{x}-\cancel{6}-y-\cancel{x}+\cancel{6}-y=12$

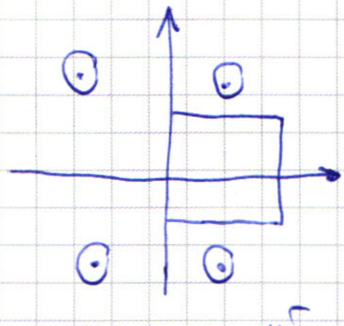
$y=-6$

④ $x-6-\cancel{y}+x-6+\cancel{y}=12$

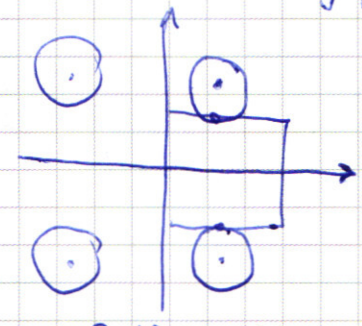
$x=12$

Теперь найдем вид графика $(|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a$. В каждой координатной четверти он представляет собой пересечение окружности и этой координатной четверти. Центры окружностей по четвертям: I — (6; 8), II — (−6; 8), III — (−6; −8), IV — (6; −8).

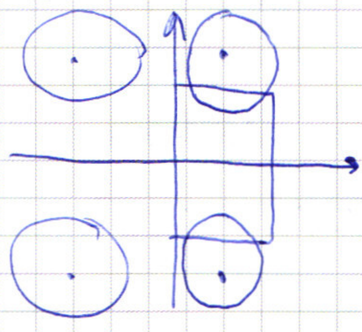
Система не будет иметь решений при $a<4$. При $a=4$ окружности из I и IV четвертей коснутся квадрата (графика первого уравнения). При дальнейшем увеличении a эти две окружности будут пересекать квадрат в 4-ёх точках. При ~~$a=\sqrt{6^2+2^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$~~ $a=6^2+2^2=40$ квадрата коснутся окр. из II и III четвертей. Они будут пересекать квадрат в двух разных точках при $a<6^2+8^2=100$. При $a=100$ эти точки совпадут в $(0;0)$. В то же время при $a=40$ окр. из I и IV пересекут квадрат в 4-ёх точках, 2 из которых совпадут с точками касания окр. из II и III. При $a>40$ и $a<100$ окр. из I и IV будут пересекать квадрат в ~~двух~~ четырёх точках. При $a=100$ эти две точки совпадут в $(12;0)$, другие две — в $(0;0)$. При $a>100$ решений у системы нет.



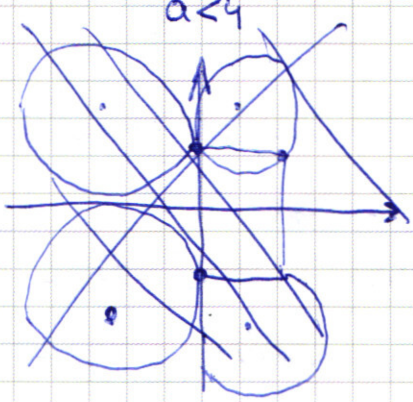
нет решений $a<4$

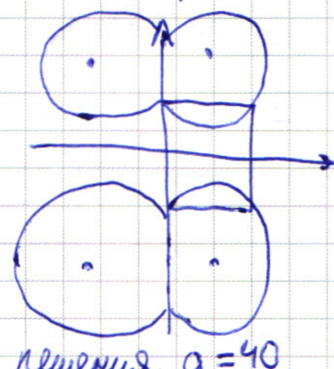


2 решения $a=4$

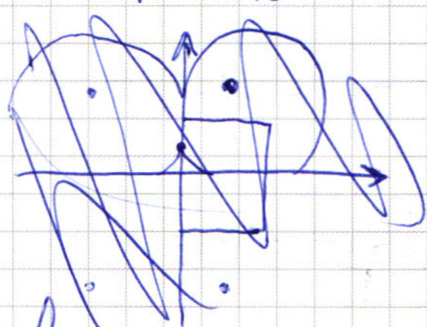


4 решения $4<a<40$





4 решения $a=40$



Ответ: $a=4$; $a=100$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r|l} 16875 & 5 \\ 3375 & 5 \\ 675 & 5 \\ 135 & 5 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$16875 = 3^3 \cdot 5^4$

$1,\ 3\times 9,\ 5\times 4$

$$\frac{8!}{3!\cdot 4!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2} = 280$$

$$C_8^1 \cdot C_7^3 \cdot C_4^4 = \frac{8!}{7!}\cdot\frac{7!}{3!\cdot 4!}\cdot 1 = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{3!}$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times\ 25 \\ \hline 125 \\ +\ 50\ \ \\ \hline 625 \\ \times\ 27 \\ \hline 4375 \\ +\ 1250\ \ \\ \hline 16875 \end{array}$$

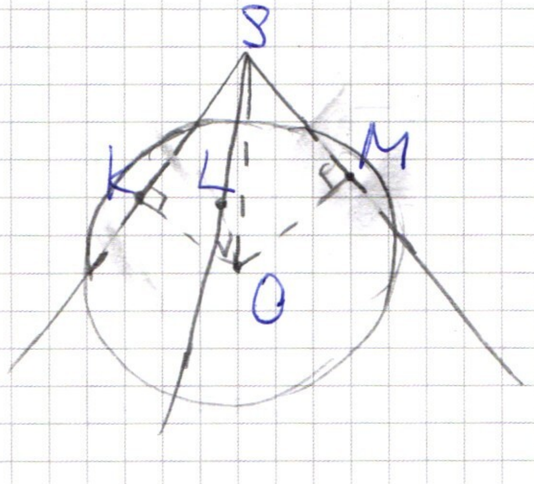
$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right) = 2\times$$
$$\times\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}\right) = 2\times\left(\cos^2\frac{\beta}{2} - \cos^2\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}\right) = 2\times$$
$$\times\left(\cos^2\frac{\beta}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right) = 1 - \sin^2\frac{\beta}{2} + \cos^2\frac{\beta}{2} - 1 + \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = \cos\alpha + \cos\beta$$

$$\frac{(y-4)^{4\lg y}}{y^{2\lg y}} = (4-y)^{\lg y + \lg(4-y)}$$

$f'(x^a)$ $(x^a)' = ax^{a-1}$

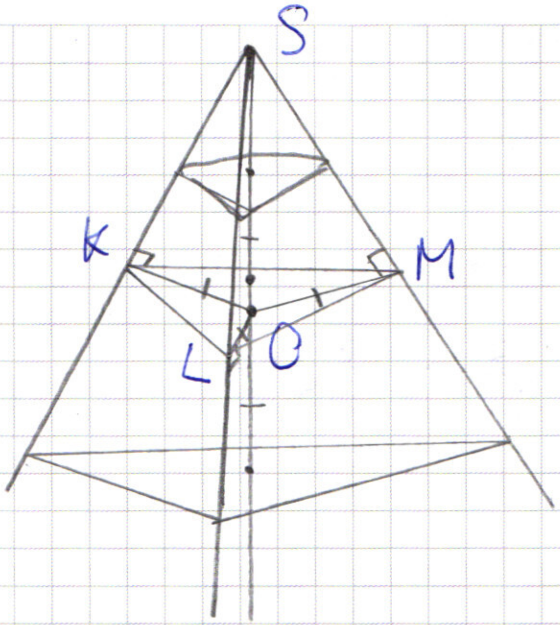
$$(4-y)^{4\lg y} = y^{2\lg y}\cdot(4-y)^{\lg y}$$

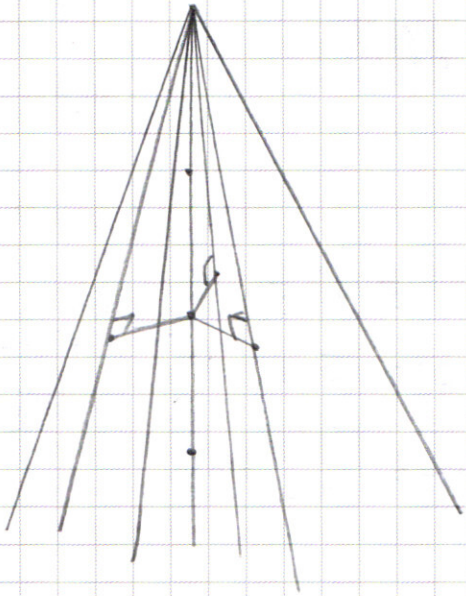
$$(4-y)^{3\lg y - \lg(4-y)} - y^{2\lg y} = 0$$

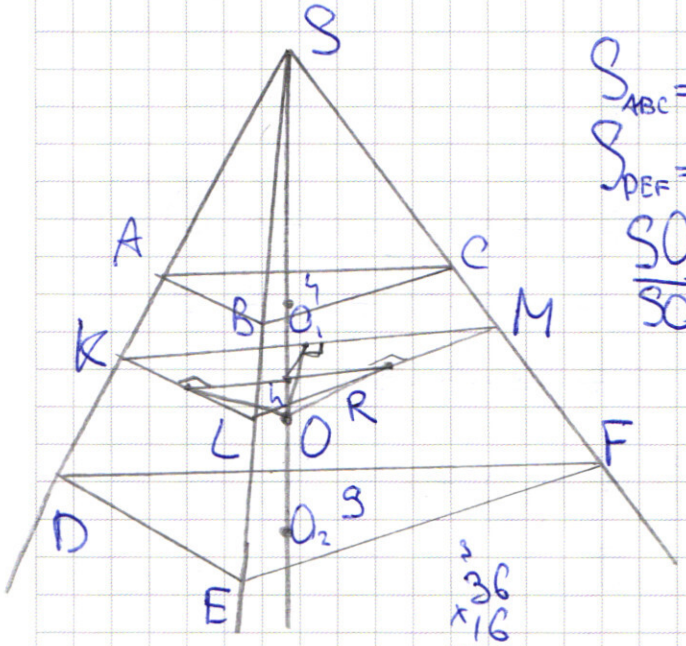


$$(4-y)^{3\lg y - \lg(4-y)} - y^{2\lg y} = 0$$

$f'(y) =$







$S_{ABC} = p_{ABC} r_{ABC}$

$S_{DEF} = p_{DEF} r_{DEF}$

$\frac{SO_1}{SO_2} = \frac{p_{ABC}}{p_{DEF}} = \sqrt{\frac{S_{ABC}}{S_{DEF}}}$

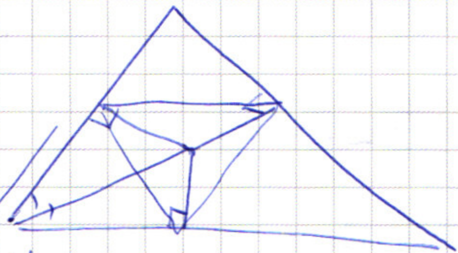
$k = \frac{2}{3}$

$SO_1 = \frac{2}{3} SO_2$

$r = \frac{1}{6} SO_2$

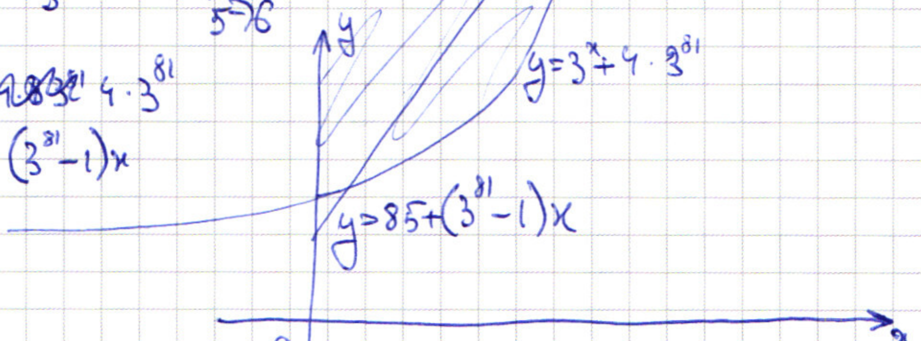
$\sqrt{1-\frac{1}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times\ 16 \\ \hline 216 \\ 36 \\ \hline 576 \end{array}$$



$y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81}$

$y < 85 + (3^{81}-1)x$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$16875 = 3^3 \cdot 5^4 \Longrightarrow$ произведение цифр восьмизначного числа равно 16875 тогда и только тогда, когда оно записывается следующими цифрами: одной 1, тремя 3 и четырьмя 5.

Ищем количество способов расставить 8 объектов, причём мы не различаем между собой 3 из них и другие 4 из них. Это количество способов равно $\frac{8!}{3!\cdot 4!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2} = 8\cdot 7\cdot 5 = 40\cdot 7 = 280$.

Ответ: 280 чисел.

$$\begin{array}{r} 280 \\ \times\ 4 \\ \hline 1120 \end{array}$$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$2\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right) = \cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2} +$

$+ \cancel{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}} - \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2} = \cos^2\frac{\beta}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$

$= \cos^2\frac{\beta}{2} - \sin^2\frac{\beta}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}$

3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 1

3, 3, 5, 5, 5, 5, 1, 1

$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$

$2\cos 5x \cos 2x - \sqrt{2}\cos 10x = 2\sin 5x\cos 2x$

$\cos 10x = \cos(7x + 3x) = \cos 7x\cos 3x - \sin 7x \sin 3x =$

$= \frac{1}{2}\cos 10x + \frac{1}{2}\cos 4x -$

$2\cos 5x\cos 2x -$

$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 7x\cos 3x + \sqrt{2}\sin 7x \sin 3x - \sin 7x - \sin 3x = 0$

$2\cos 5x\cos 2x - \sqrt{2}\cos^2 5x + \sqrt{2}\sin^2 5x - 2\sin 5x\cos 2x = 0$

$\sqrt{2}\cos 5x\left(\sqrt{2}\cos 2x - \cos 5x\right) + \sqrt{2}\sin 5x\left(\sin 5x - \sqrt{2}\cos 2x\right) = 0$

$\cos 7x + \cos(10x - 7x) - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 7x + \sin(10x - 7x)$

$\cos 7x + \cos 10x\cos 7x + \sin 10x\sin 7x = \sin 7x + \sin 10x\cos 7x - \cos 10x\sin 7x$

$- \sqrt{2}\cos 10x$

$\cos x-\sin x=\cos x-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-2\sin\frac{x-\frac{\pi}{2}+x}{2}\sin\frac{x+\frac{\pi}{2}-x}{2}=-2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4}=-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

$-\sqrt{2}\sin\left(7x-\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{2}\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{2}\cos 10x=0$

$\sin\left(7x-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)+\cos 10x=0$

$2\sin\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)\cos 2x+\cos 10x=0$

$2\sin\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)\cos 2x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-10x\right)=0$

$2\sin\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)\cos 2x-\sin\left(10x-\frac{\pi}{2}\right)=0$

$2\sin\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)\cos 2x-2\sin\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)=0$

$\sin\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)=0$ или $\cos 2x-\cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)=0$

$$\begin{cases}\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y}=(-x)^{\lg(-xy)}\\ 2y^2-xy-x^2-4x-8y=0\end{cases}$$

$-x^2-4x-xy-8y+2y^2=0$

$x^2+x(4+y)-2y^2+8y=0$

$x^2+x(4+y)+2y(4-y)=0$

$D=(4+y)^2-4\cdot 2y(4-y)=$

$=16+8y+y^2-32y+8y^2=$

$=9y^2-24y+16=(3y)^2-2\cdot 3y\cdot 4+4^2=$

$=(3y-4)^2$

$x_1=\frac{-y-4+3y-4}{2}=\frac{2y-8}{2}=y-4$

$x_2=\frac{-y-4-3y+4}{2}=\frac{-4y}{2}=-2y$

I) $\left(\frac{(y-4)^4}{y^2}\right)^{\lg y}=(-y+4)^{\lg(4y-y^2)}$

$-y+4\geq 0\Longrightarrow y\leq 4$

$\frac{|(y-4)|^{4\lg y}}{y^{2\lg y}}=(-y+4)^{\lg(4y-y^2)}$

$\frac{|y-4|^{4\lg y}}{100}=(-y+4)^{\lg(-y+4)\cdot y}$

$\left(\frac{16y^4}{y^2}\right)^{\lg y}=(2y)^{\lg 2y^2}$

$a^{\log_a b}$

$\frac{|y-4|^{4\lg y}}{100}=10(4-y)^{\lg y}$

$(16y^2)^{\lg y}=(2y)^{\lg 2y}\cdot(2y)^{\lg y}$

$2^{\log_2 10}=10$

$(4-y)^{\lg y}\left(\frac{(4-y)^{3\lg y}}{100}-10\right)=0$

$16^{\lg y}\cdot 100=16\cdot 2^{\lg y}\cdot 10$

$\left(\frac{(y-4)^4}{y^2}\right)^{\lg y}=(4-y)^{\lg y(4-y)}$

$\left(\frac{2^4}{2^2}\right)^{\lg 2}=2^{\lg 4}$

$2^{4\lg 1}=2^{\lg 2}$

$\lg 1=0$

$\frac{(4-y)^{4\lg y}}{y^{2\lg y}}=(4-y)^{\lg(4-y)}\cdot(4-y)^{\lg y}$

$4^{\lg 2}=2^{\lg 4}$

$\lg(4-y)\cdot 3\lg y-\lg^2(4-y)-2\lg^2 y=0$

$2^{2\lg 2}=2^{2\lg 2}$

$(4-y)^{3\lg y-\lg(4-y)}=y^{2\lg y}$

$\left(\frac{(y-4)^4}{y^2}\right)^{\lg y}=(4-y)^{\lg y}$

$(4-y)^{\lg\left(y^3\cdot\frac{1}{4-y}\right)}=y^{\lg y^2}$

$\frac{(y-4)^{4\lg y}}{y^{2\lg y}}=(4-y)^{\lg y(4-y)}$

$10^{\lg(4-y)\cdot(3\lg y-\lg(4-y))}=10^{3\lg y}$

$(4-y)^{3\lg y-\lg(4-y)}=y^{2\lg y}$

$\lg(4-y)\cdot(3\lg y-\lg(4-y))=2\lg^2 y$

$(4-y)^{3\lg y-\lg(4-y)}-y^{2\lg y}=0$

черновик   чистовик   Страница №2

(Поставьте галочку в нужном поле)   (Нумеровать только чистовики)