

Рег. №:

Класс участия:

Место проведения:

Дата проведения: 22 февраля 2020 г.

Время начала (местное):

ШК

(заполняется секретарём)



Олимпиада школь:

по математике

Название предмета

Заключительный этап 2020 г.

Анкета участника

Данная анкета предъявляется участником вместе с документом, удостоверяющим личность, при входе на олимпиаду. По окончании написания олимпиады анкета обязательно вкладывается в работу. Работа без предоставления анкеты недействительна и не проверяется. Анкета без подписей недействительна.

Бенов Вова Вл-ович 21.08.02 17
 Фамилия Имя Отчество Дата рождения Возраст
 Россия Москва Златоустовский
 Страна Регион Населенный пункт
 паспорт РФ 4516 187798393 22.09.16 770-127
 Документ, удостоверяющий личность Серия Номер Дата выдачи Код подразделения
 Россия Москва Златоустовский
 Страна школы Регион школы Населенный пункт школы
 М ГБОУ школа 1557 им. Космонавтов
 Класс обучения Полное название образовательного учреждения
 8985936648 bvv688g@ya.ru
 Мобильный телефон Доп. телефон E-mail

Согласие на обработку персональных данных

Я согласен(-на) на сбор, хранение, использование, распространение (передачу) и публикацию своих персональных данных, а также олимпиадных работ, в том числе в сети "Интернет". Я согласен(-на), что мои персональные данные будут ограничено доступны организаторам олимпиады для решения административных и иных рабочих задач. Я проинформирован(а), что под обработкой персональных данных понимаются действия (операции) с персональными данными в рамках выполнения Федерального закона №152 от 27 июля 2006 г., конфиденциальность персональных данных соблюдается в рамках исполнения Операторами законодательства Российской Федерации. Я согласен(-на) на получение информационных писем от организаторов олимпиады на E-mail, указанный при регистрации.

Я подтверждаю, что все указанные мной данные верны и в указанном виде будут использованы при печати дипломов олимпиад в случае их получения. Я согласен(-на) на передачу данных в государственный информационный ресурс о детях, проявивших выдающиеся способности, созданный во исполнение Постановления Правительства Российской Федерации № 1239 от 17 ноября 2015 г.

Я подтверждаю, что ознакомлен с Положением и Регламентом проведения олимпиады школьников «Физтех», а также с правилами оформления и условиями проверки работы.

«22» фев 2020

Подпись участника олимпиады

Бенов В-мир

ФИО законного представителя

Осуж

Степень родства

Подпись законного представителя

Викторювич

Анкета без подписи недействительна.

Анкета обязательно должна быть вложена в работу!

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР



2 0 0 0 8 7 7 3

Заполняется ответственным секретарём

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №1

$$16875 = 5^4 \cdot 3^3$$

2 Вар число состоит из

I ипотерки

2 едн

1 десят

1 Тройки

Возм сканд цифр

$$\frac{8!}{4!2!}$$

II ипотерки

3 Тройки

1 едн

$$\frac{8!}{4!3!}$$

чтого всего ит

$$\frac{8!}{4!2!} + \frac{8!}{4!3!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2} + \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{6}$$

$$= 1120$$

~~$\cos 7x + \cos 3x = \sqrt{2} \cos 2x = \sin 7x + \sin 3x$~~

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases}$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$(2y + x)(y - x - 4) = 0$$

$y + y = x$ не подходит тк $-xy$ должно быть больше 0 и y тоже

$-2y = x$

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ x = -2y \end{cases}$$

~~$16x^2 \lg y = 4xy \lg 2y^2$~~

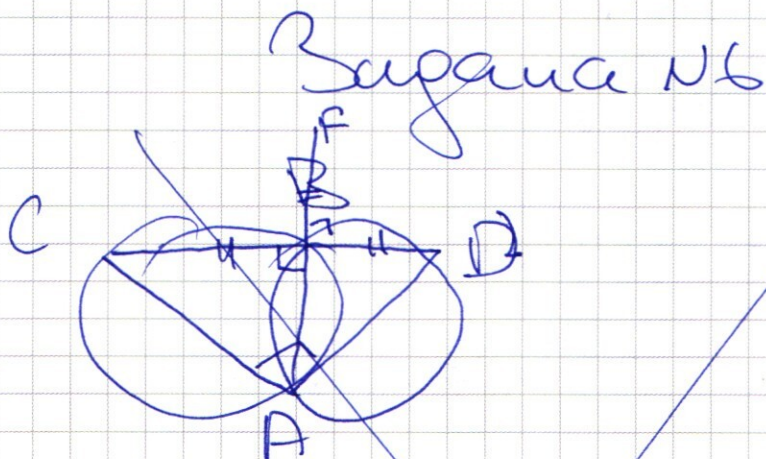
ОДЗ $y > 0$

$-xy > 0$

~~$y > 0$~~



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



1) Докажем что $\angle CAD$ прямой
на концы CD окружности равны
 $\angle BCA = \angle BDA$

2) ~~Так как $\angle CAD$ прямой то $AF \perp CD$~~
так это же равноср. окр. то
 $CB = BD$; $AF \perp CD$

№3 предложение

~~4~~ $16y^2 \lg y = 2y \lg 2y^2$

~~4~~ $4 \lg y = (2y) \lg 2$

где возр функции
могут иметь только одно
пересечение.

$$y = 2$$

$$x = -2y = -4$$

Одна они пертождет дрз
cos

~~12~~ $\cos 5x + \sin 5x =$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача на $\sqrt{2}$ произведение

$$(\cos 5x - \sin 5x)(\sqrt{2} \cos 2x - \cos 5x - \sin 5x) = 0$$

$$(\cos 5x - \sin 5x)(\sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2}(\sin x - \frac{\pi}{4})) = 0$$

$$\sqrt{2}(\cos(\frac{5x + \pi}{4})) \cdot \sqrt{2}(-2 \sin \frac{7x - \pi}{2} \cdot \sin(-\frac{3x + \pi}{2})) = 0$$

$$\cos(\frac{5x + \pi}{4}) = 0$$

$$\sin(\frac{7x - \pi}{2}) = 0$$

$$\sin(-\frac{3x + \pi}{2}) = 0$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5} \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{2\pi n + \pi}{7}$$

$$\frac{5x + \pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{7x - \pi}{2} = \pi n \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$-\frac{3x + \pi}{2} = \pi n$$

$$x = -\frac{2\pi n + \pi}{3}$$

Задача N2

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin \frac{\pi}{4} + \sin 3x$$

$$(\cos 7x - \sin 7x) + (\cos 3x - \sin 3x) =$$

$$= \sqrt{2} \cos 10x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + 7x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right) =$$

$$= \cos 10x$$

$$2 \cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos(2x) = \cos 10x$$

$$2 \cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) \cos 2x = 2 \cos^2 5x - \sin^2 5x$$

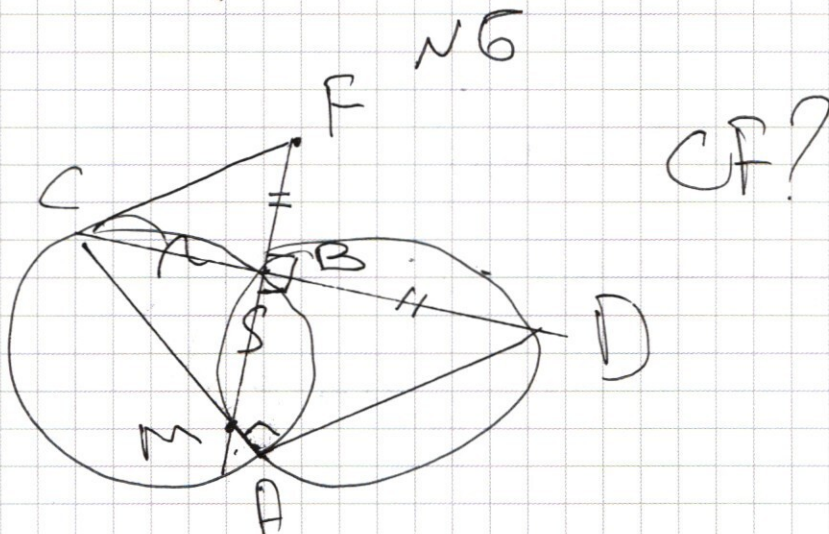
$$\sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) \cos 2x = \cos 5x + \sin 5x$$

$$= (\cos 5x - \sin 5x)(\cos 5x + \sin 5x)$$

$$(\cos 5x - \sin 5x)(\sqrt{2} \cos 2x) = \cos 5x + \sin 5x$$

$$= 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



a) $\triangle CAD$ прѡтвр $\angle CDA = \angle BCA$
 брѡс љѡт ѡнѡ
 ѡа сѡѡ ѡ љѡѡ
 љѡѡ)

$$\angle DCA = 45^\circ = \angle CDA$$

2) $\triangle CBA$ p/TK $\angle BCA = 45^\circ$
 $\angle CBA$ n/p $\angle CBA = 90^\circ$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow CB = BM$$

$$3) CB = BA; BF = BD; \angle CBF = \angle MBD$$

№6 и продолжение

⇓

$$CF = MD$$

$$4) \angle MBD + \angle MAD = 180^\circ \Rightarrow$$

вокруг MBDA можно описать окружность

⇓

$$2 \cdot \frac{MD}{\sin \angle ABD}$$

$$= \frac{BD}{\sin \angle BDA} = R = 13$$

~~MD = 26~~

$$5) MD = 26 = CF$$

~~6) S_{ACF} = ?~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

Продолжение.

$$1) S_{ACF} = \frac{1}{2} \sin \angle CFA \cdot CF \cdot FM$$

2) $\triangle CBF$ $\angle CBF$ прямой

$$CB^2 + FB^2 = CF^2$$

$$26^2 = 10^2 + FB^2$$

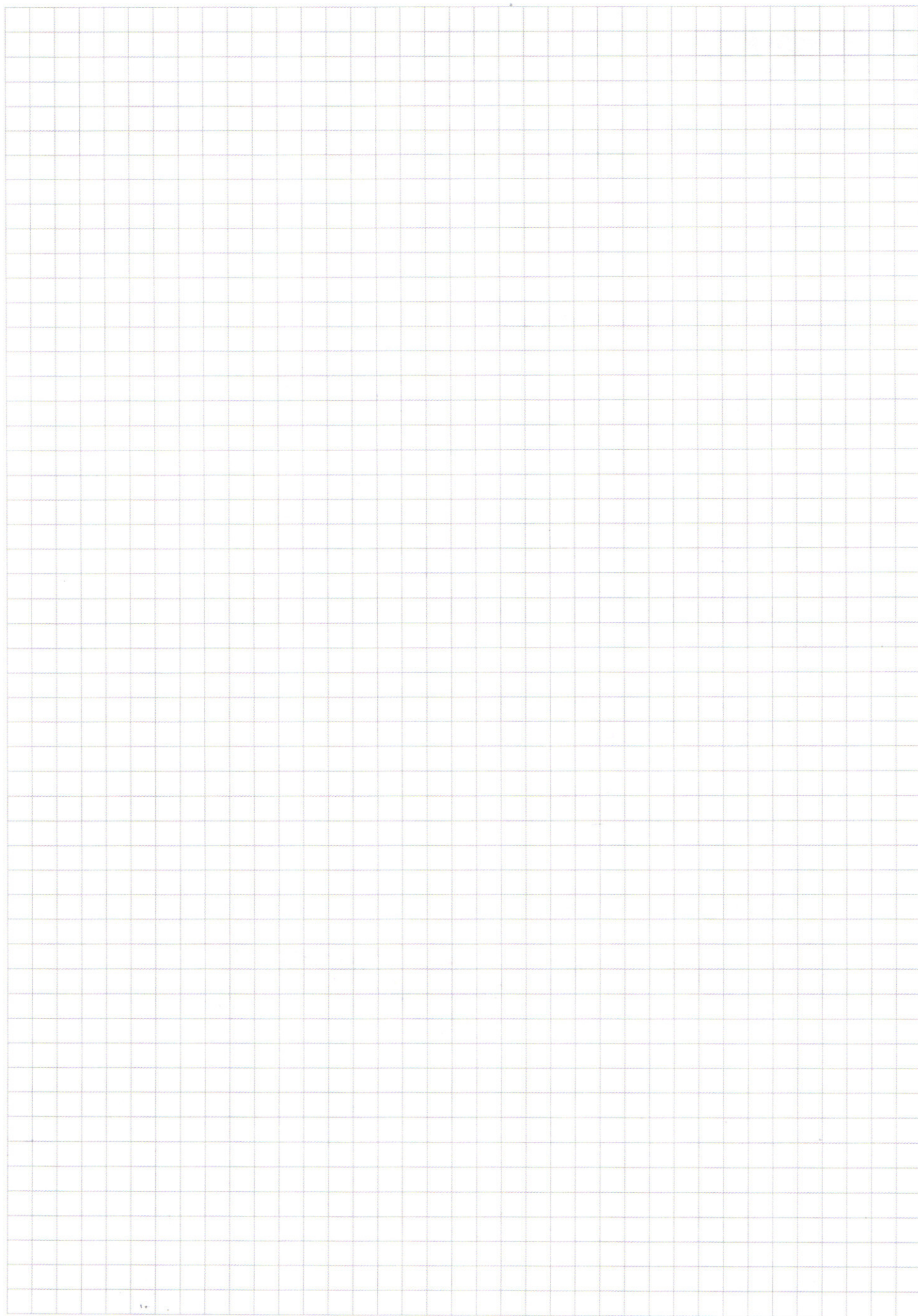
$$16 \cdot 36 = FB^2$$

$$FB = 24$$

$$3) \sin \angle CFB = \frac{CB}{CF} = \frac{26}{26} = \frac{10}{26}$$

$$4) S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot \sin \angle CFB \cdot CF \cdot (FB + CB) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{26} \cdot 26 \cdot 34 = 170$$



☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

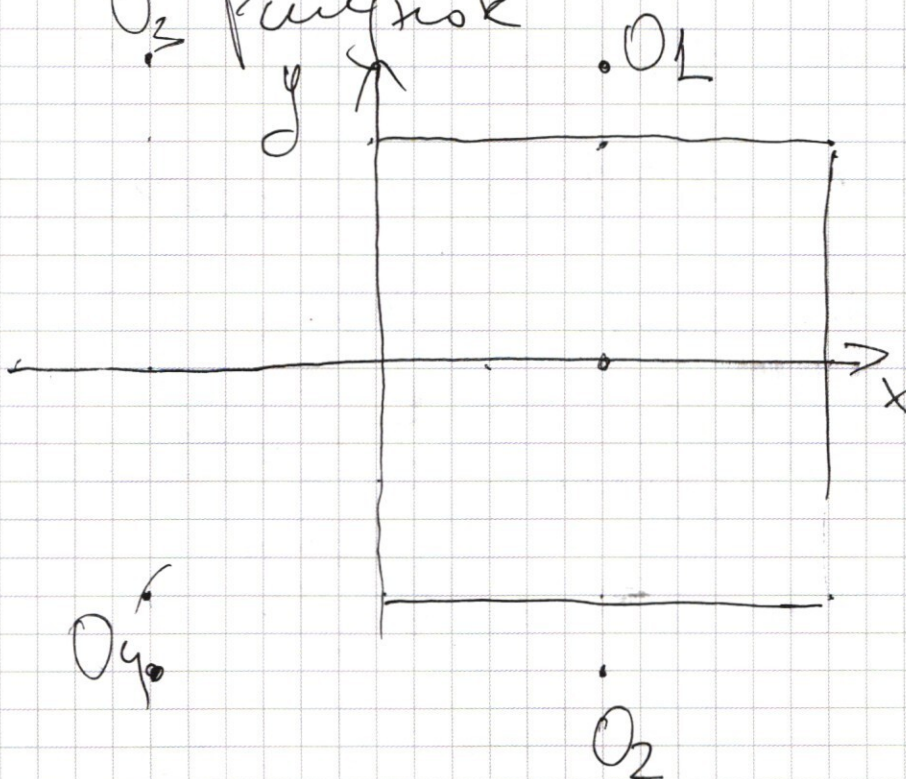
Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №5

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\ (x-6)^2 + (y-8)^2 = a \end{cases}$$

Рисунок



кр O_1 имеет столько же
решений сколько O_2 ; ~~тогда~~
~~если O_1 имеет столько же~~

NS продолжение

~~О₁ и О₂ не~~

окр O_2 будет иметь столько
же внутренних точек, что и окр
 O_1 . Тогда либо O_1 и O_2 смежны
внутри, либо O_2 и O_1

2) O_1 имеет ~~одну~~ одну или
более точек касания
с внешним окружением

когда внешний $\gamma a = 2$,

когда $\gamma a = 14$

$a = 4$; ~~имеет~~ $a = 14^2$

тогда при $a < 4$ не имеет
решения

при $4 < a < 14^2$ 2 решения
при $a > 14^2$ не все



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$18^2 + 19^2$$

$$\sqrt{a} = \sqrt{(8-6)^2 + 6^2} = \sqrt{40}$$

когда бузре нисет

$$\sqrt{a} = \sqrt{(-12-6)^2 + (-6-8)^2} = \sqrt{520}$$

н/ч $a > 520$ рублей

каса центр кога O_3 и O_1 имат
по едно и също направление 4.520

Osba: $a = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

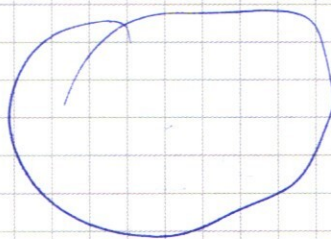
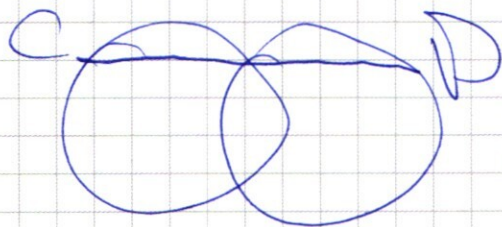
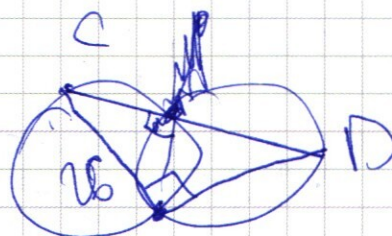
$$16y^{2\lg y} = 2y^{\lg 2y^2}$$

$$4^{\lg y} \cdot 2^{\lg y} = 2y^{\lg 2y^2}$$

$$4^{\lg y} = (2y)^{\lg 2}$$

$$\lg \cdot \lg 2y^4 = \lg 2$$

$$2\cos(2x) \cdot (\cos 5x + \frac{1}{2}) = \cos 10x$$



$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x =$$

$$= \sin 7x + \sin 3x$$

$$64^{\lg 2} = 4^{\lg 8}$$

$$16y^2 \lg y = 2y \lg 2y^2$$

~~$$16(4y)^{2 \lg y} = 2y$$~~

~~$$4^{\lg y} (2y)^{2 \lg y} = 2y \lg 2y^2$$~~

~~$$4^{\lg y} = 2y \lg 2$$~~

~~$$4^{\lg y} = 2y \lg 2$$~~

$$4^{\log_2 1} = 1$$

$$4^{\log_2 2} = 4$$

~~$$\lg \lg 2y = \lg 2$$~~

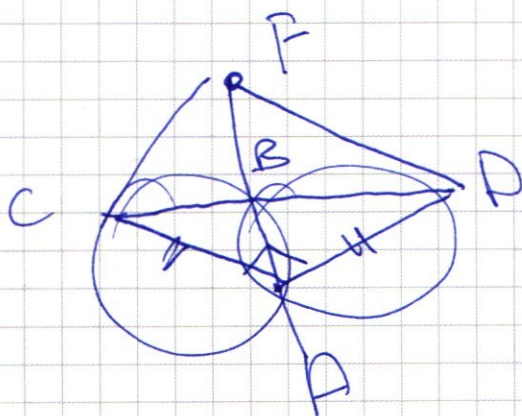
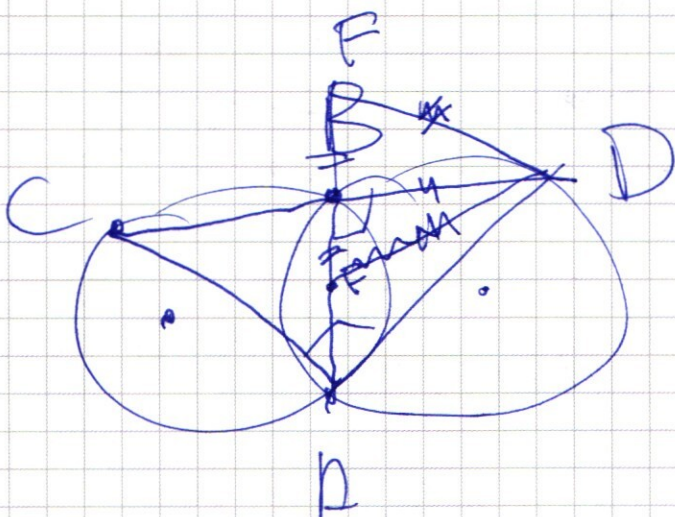
$$\lg y = \lg 2 (\lg 4 + \lg 2y)$$

$$4^{\log_2 \frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

$$4^{\log_2 1} = 1$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned} \cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cdot \cos 7x \cdot \cos 3x &= \\ &= \sin 7x + \sin 3x - \sqrt{2} \sin 7x \cdot \sin 3x \end{aligned}$$

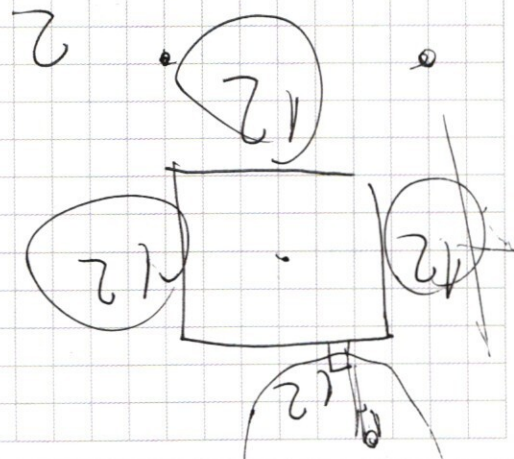
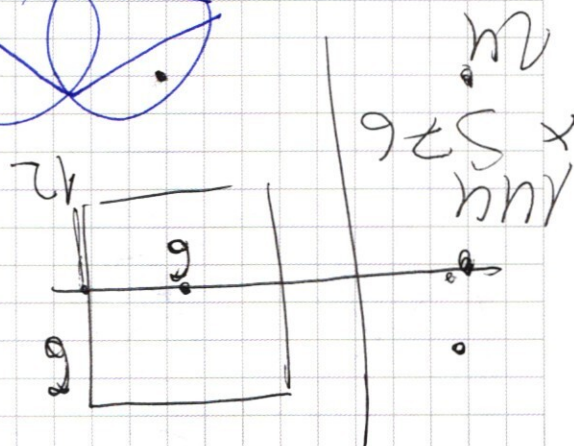
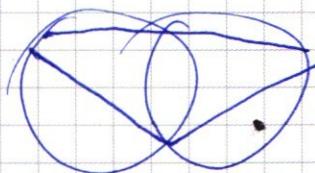


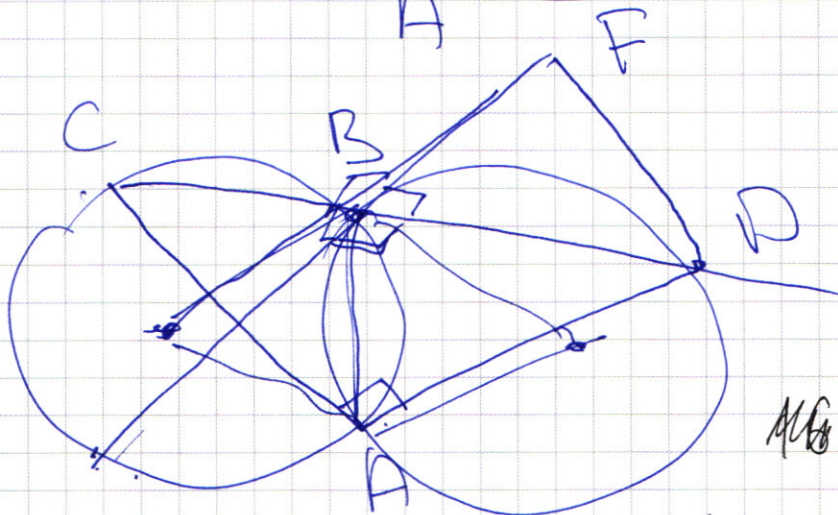
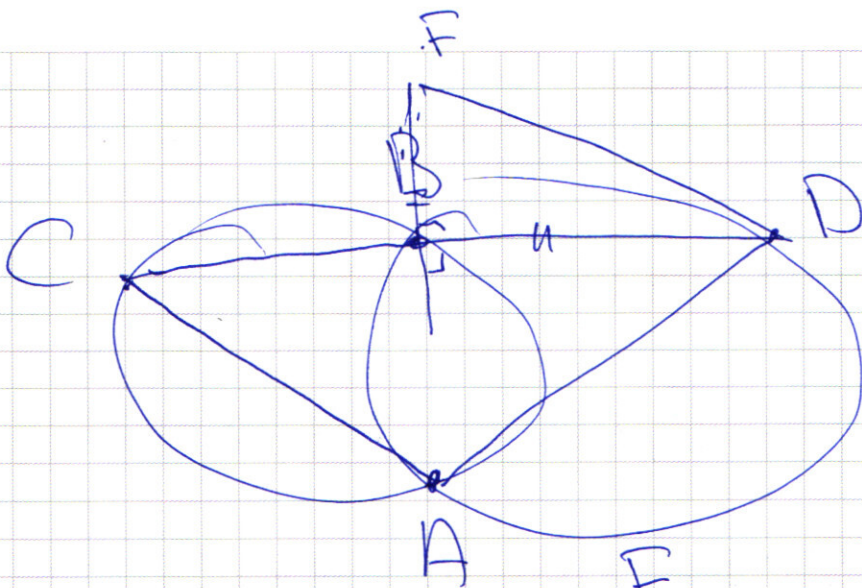
$$b = \frac{1}{2}(2-h) + \frac{1}{2}(9-x)$$

$$0 < h$$

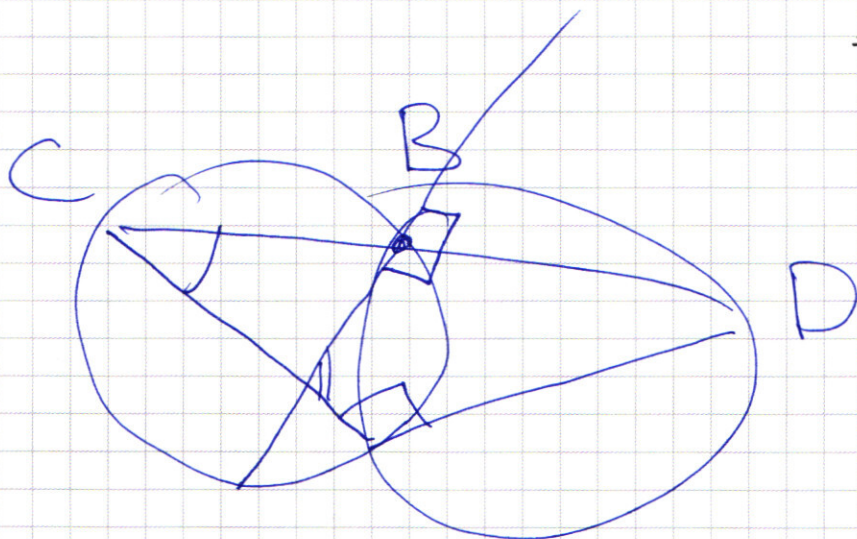
$$0 < x$$

$$\begin{array}{r} 324 + 81 \\ \hline 405 \\ 81 \\ \hline 486 \end{array}$$





$$\begin{array}{r}
 33,8 \\
 - 34 \\
 \hline
 1352 \\
 169.2 \quad 1014 \\
 \hline
 169.2 \quad 11492 \\
 \hline
 = 33,8
 \end{array}$$



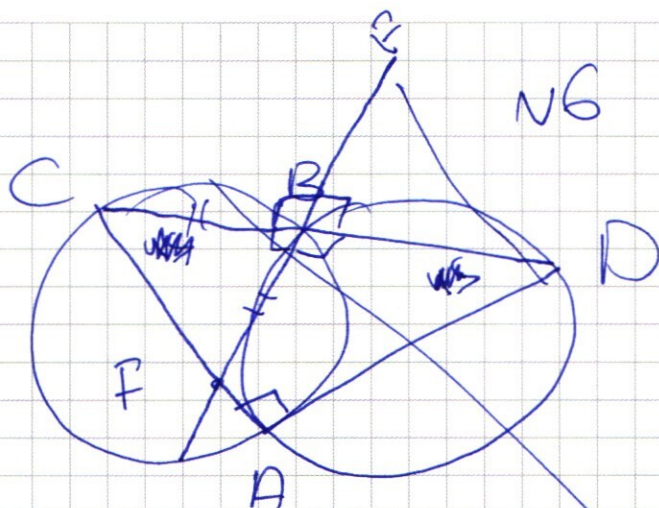
$$\begin{array}{r}
 2652 \\
 884 \\
 \hline
 11492
 \end{array}$$

26.

$$\begin{array}{r}
 261 \\
 39 \\
 \hline
 104 \\
 78 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \times 884 \\
 13 \\
 \hline
 2652
 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА


$$r = 13$$

~~1. Докладчик что информация из
ФБН по делу не из А; было 2го~~

MC TAK, TOROK

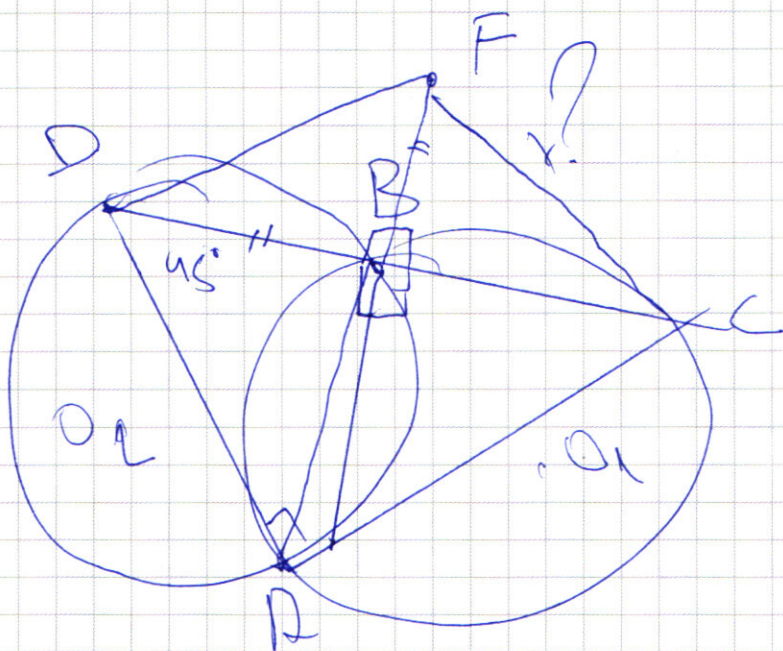
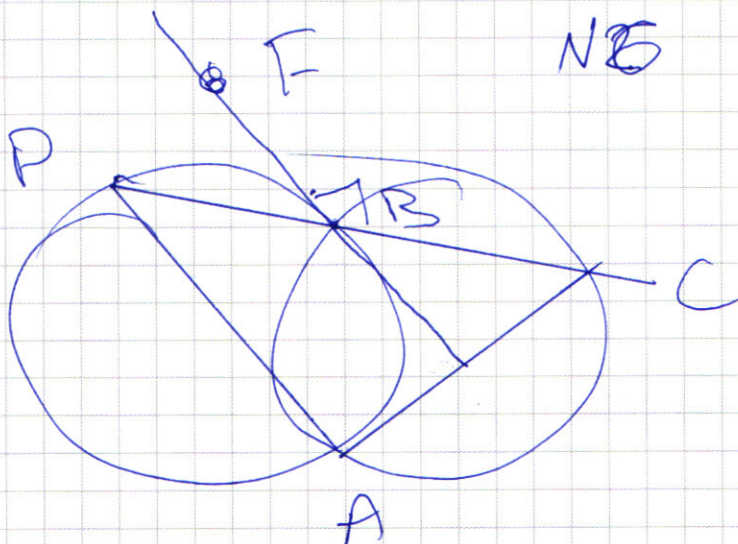
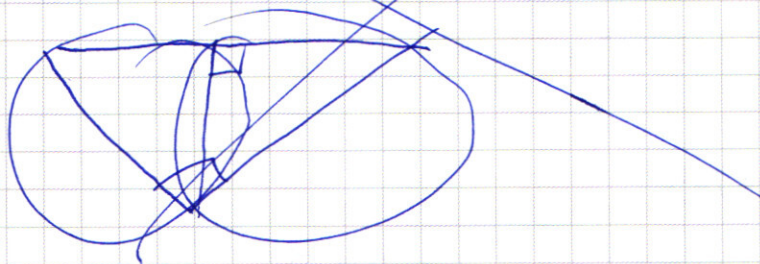
$$\angle BFA + \angle BDA = 180$$

огнако

$$\angle BDA = \angle BCA \Rightarrow$$

$$\angle BFA + \angle BCA = 180^\circ \text{ и то же}$$

№6 продолжение



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 16875 \mid 5 \\ 15 \\ \hline 18 \\ 15 \\ \hline 37 \\ 35 \\ \hline 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3375 \mid 5 \\ 30 \\ \hline 35 \\ 25 \\ \hline 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3375 \mid 5 \\ 3 \\ \hline 17 \\ 15 \\ \hline 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 135 \mid 5 \\ 10 \\ \hline 27 \end{array}$$

$$5^4 \cdot 3^3 = 16875$$

$$\begin{array}{r} 7 \\ 413 \end{array}$$

Вар 4 пог 1-30111
1 дуб 2 урн

1 пог
3 Пшени
1 урн

$$\frac{8!}{4!2!} + \frac{8!}{4!3!} \text{ Other.}$$

N2

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x - \sqrt{2} \cos 10x$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cdot \cos 2x$$

$$2 \cos(2x) \cdot (\cos 5x - \sin 5x) =$$

$$= \sqrt{2} \cos 10x$$

$$\begin{aligned} a - b &= 2x \\ a + b &= 5x + \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$\sqrt{2} \cos 10x = \sqrt{2} (\cos 7x \cdot \cos 3x - \sin 7x \cdot \sin 3x)$$

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2} (\cos 45^\circ \cdot \cos x - \sin 45^\circ \cdot \sin x)$$

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos(45^\circ + x)$$

$$\sqrt{2} \cos(45^\circ + 7x) + \sqrt{2} \cos(45^\circ + 3x) =$$

$$= \sqrt{2} \cos 10x$$

$$56(S + 15)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos(10x - 3x) + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x =$$

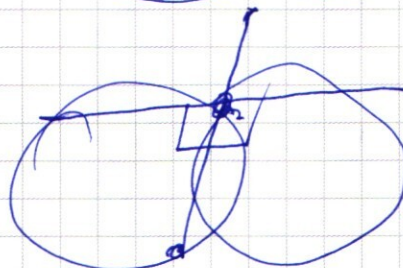
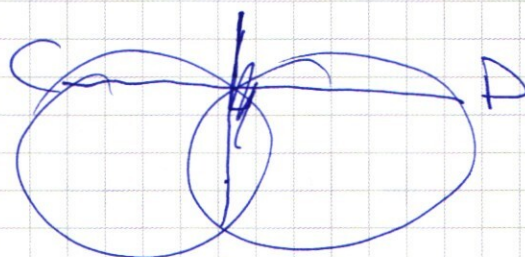
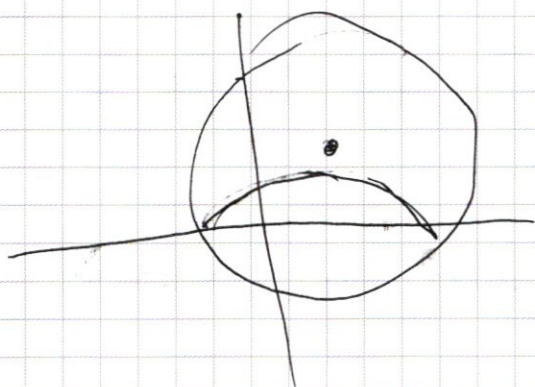
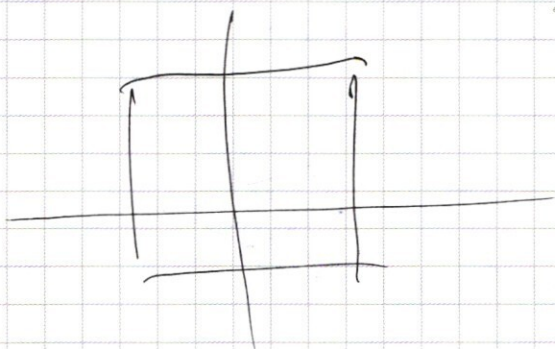
$$= \sin(10x - 3x) + \sin 3x$$

$$\cos 10x \cdot \cos 3x + \sin 10x \cdot \sin 3x + \cos 3x -$$

$$- \sqrt{2} \cos 10x = \sin 10x \cdot \cos 3x - \sin 3x \cdot \cos 10x +$$
~~$$a - ab + a - bc + - cd + d$$~~

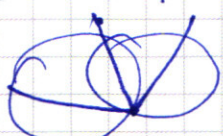
$$+ \sin 3x$$

* и окр
1 генпр
6, 8



$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x + 2\cos 5x \cdot \cos 2x - \sqrt{2} \cos^2 5x =$$

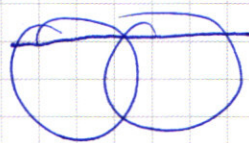
$$= \cancel{\sin 5x} 2\sin 5x \cdot \cos 2x - \sqrt{2} \sin^2 5x + \sqrt{2} \cos 5x$$

$$\cos 5x (2\cos 2x - 1) =$$


$$= \sin 5x (2\cos 2x - \sqrt{2} \sin 5x)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{x}{y^2}\right)^4 \lg y &= (-x) \lg(-xy) \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y &= 0 \end{aligned} \right.$$


$$\left(\frac{x^2}{y}\right)^2 \lg y$$



$$2y^2 + xy - 2xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$y(2y+x) - x(2y+x) - 4(2y+x) = 0$$

$$(2y+x)(y-x-4) = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(2y+x)(y-x-4) = 2y^2 - 2yx - 8y + xy - x^2 - 4x$$

$$-4x = 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y$$

$$x = -2y \quad \text{не подходит}$$

$$x = y + 4 \quad \text{не подходит}$$

$$y > 0$$

$$\frac{2y}{y^2} = (2y) \cdot \frac{1}{y^2}$$

$$16y^2 = 4y^2 \cdot 4$$

$$(16y^2) \log y = 4(2y) \log 2y^2$$

$$4y \log y^2 = (2y) \log 2y^2$$

$$\log y \cdot \log (16y^2) =$$

$$= \log 2y^2 \cdot \log 4y$$

$$7y^2 + 2y^2 - 4y^2 + 8y - 6y$$