

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО М.

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФ:

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N2

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (\cos 7x - \sin 7x) + \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos 3x - \sin 3x) = \cos 10x$$

$$\cos\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos 10x$$

$$(\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2})$$

$$2 \cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) \cos 2x = \cos 10x$$

$$x = y + \frac{\pi}{4}$$

$$2 \cos\left(5y + \frac{3\pi}{2}\right) \cos\left(2y + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(10y + \frac{5\pi}{2}\right) \Leftrightarrow 2(\sin 5y \cdot$$

$$\Leftrightarrow \sin 2y) = \sin 10y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 5y \sin 2y = \sin 5y \cos 5y \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \sin 5y = 0 \\ \sin 2y = \cos 5y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\pi \cdot k}{5} \\ \sin 2y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 5y\right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi k}{5} + \frac{\pi}{4} \\ 2y = \frac{\pi}{2} - 5y + 2\pi k \end{cases}$$

$$2y = \frac{\pi}{2} - 5y + 2\pi k$$

$$2y + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - 5y\right) = \left[\pi + 2\pi k \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi k}{5} + \frac{\pi}{4} \\ y = \frac{\pi}{14} + \frac{2\pi k}{7} \\ y = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi k}{5} + \frac{\pi}{4} \\ x = \frac{\pi}{14} + \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{7} \\ x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi k}{5} + \frac{\pi}{4} \\ x = \frac{9\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

$16875 = 3^3 \cdot 5^4$ число возмозможное, поэтому
возможно лишь два варианта: 1) 13335555
2) 11355555

с точностью до перестановки выдел

1) выбрать 4 цифры 5: $\binom{4}{4}$, выбрать три тройки

$$\binom{3}{4} : \binom{4}{8} \cdot \binom{3}{4} = \frac{1}{1}$$

2) выбрать 4 пятёрки: $\binom{4}{4}$; выбрать
~~две~~ единицы $\binom{2}{4}$, выбрать $\binom{2}{8}$ ~~и~~

$$\binom{4}{2} : \binom{4}{8} \cdot \binom{2}{4} \cdot \binom{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\binom{4}{8} = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 70$$

$$\binom{3}{4} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 4$$

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$$

$$\binom{1}{2} = \frac{2!}{1! \cdot 1!} = 2$$

$$S_1 = 70 \cdot 4$$

$$S_2 = 70 \cdot 6 \cdot 2 = 70 \cdot 12$$

$$S_1 + S_2 = 70 \cdot 4 + 70 \cdot 12 = 70 \cdot 16 = 1120$$

Ответ: 1120

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, & (1) \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 & (2) \end{cases}$$

(2): $2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4(x - 2y) = 0$$

$$2y^2 - xy - x^2 = 0 : x^2 \neq 0$$

$$2\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \left(\frac{y}{x}\right) - 1 = 0 \quad * \frac{y}{x} = t$$

$$2t^2 - t - 1 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \begin{cases} 1 = t_1 \\ -\frac{1}{2} = t_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = 1 & , y = x \\ \frac{y}{x} = -\frac{1}{2} & 2y + x = 0 \end{cases}$$

$$2y^2 - xy - x^2 = (2y + x)(y - x)$$

$$(2y + x)(y - x) - 4(x + 2y) = 0$$

$$(2y + x)(y - x - 4) = 0$$

$$\begin{cases} y = -\frac{x}{2} \quad (3) \\ y = x+4 \quad (4) \end{cases}$$

③

$$y = -\frac{x}{2}, \quad 2y+x=0$$

④

$$\begin{aligned} & \log\left(\frac{x^4}{\frac{x^2}{4}}\right) = \log\left(-\frac{x}{2}\right) \\ & \log\left(\frac{x^4}{\frac{x^2}{4}}\right) = (-x)^{\log\left(+\frac{x^2}{2}\right)} - \frac{x}{2} > 0 \Leftrightarrow x < 0 \end{aligned}$$

$$(4x)^{\log} = (-x)^{\log\left(\frac{x^2}{2}\right)}$$

$$\log(\log 4x^2) = \log\left(\frac{x^2}{2}\right) \cdot \log(-x)$$

$$(\log(-x) - \log(2)) (\log 4 + 2 \cdot \log(-x)) = 2 \log(-x) - \log(2)$$

$$(\log(-x) - \log(2)) (2 \log 2 + 2 \log(-x)) = (2 \log(-x) - \log(2)) \cdot \log(-x)$$

$$(t-a)(2a+2t) = (2t-a)t, \quad \log(-x)=t$$

$$\log(2)=a$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2at + 2t^2 - 2a^2 - 2a^2 - 2at = 2t^2 - at$$

$$2t^2 - 2a^2 = 2t^2 - at$$

$$-2a^2 = -at \quad | : a \neq 0$$

$$2a = t$$

$$\lg(-x) = 2 \lg 2 \Leftrightarrow \lg(-x) = \lg 4 \Leftrightarrow x = -4$$

$$4(1) : \left(\frac{x}{(x+4)^2} \right)^{\lg(x+4)} = (-x) \lg(-x \cdot (x+4)), \quad x+4 > 0$$

$$\Leftrightarrow x > -4$$

$$-x(x+4) > 0 \Leftrightarrow x \in (-4; 0)$$

$$\frac{(-x)^{4 \lg(x+4)}}{(x+4)^{2 \lg(x+4)}} = (-x)^{\lg(-x) + \lg(x+4)}$$

$$\lg(-x) = b$$

$$\lg(x+4) = a$$

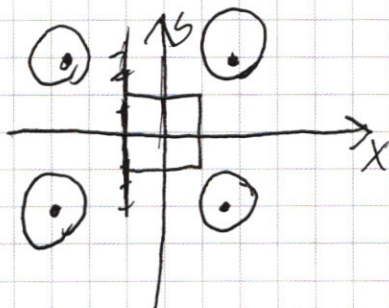
$$(-x)^{4a} = (x+4)^{2a} \cdot (-x)^{(a+b)}$$

$$(-x)^{(3a-b)} = (x+4)^{2a}$$

$$\lg(-x) \cdot (3a-b) = \lg(x+4) \cdot (2a)$$

$$b(3a-b) = a(2a)$$

$$3ab - b^2 = 2a^2 - 3ab - b^2 = 0$$



~~составлена из частей ~~каждой~~ ~~каждой~~~~

составлено из частей окружности

нужно для решения такое возможно только в двух случаях.

I $R = \sqrt{a} = 2 \Rightarrow a = 4$

II Верхняя и нижняя окруж. пересек квад. в точках $(12, 0) (0, 0)$ $R = \sqrt{a} = 10 \Rightarrow a = 100$

других вариантов быть не может

т.к: 1) при $R < 2$ решений нет

2) при $R \in (2, 10)$ каждая правая окружность пересекает квадрат в двух точках

3) при $R > 10$ пересечений нет

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(a-b)(2a-b)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} a=6 \Leftrightarrow \lg(x+4) = \lg(-x) \Leftrightarrow x+4 = -x \Leftrightarrow 2x = -4 \\ \cancel{2a=26} \end{array} \right. \Leftrightarrow \boxed{x = -2}$$

$$\text{L } 2a = 26 \Leftrightarrow 2 \lg(x+4) = \lg(-x) \Leftrightarrow x^2 + 8x + 16 = -x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 9x + 16 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-9 \pm \sqrt{81-64}}{2} = \frac{-9 \pm \sqrt{17}}{2} \in (-4; 0)$$

$$\frac{-9 + \sqrt{17}}{2} \rightarrow -4$$

$$-9 + \sqrt{17} > \cancel{10} - 2$$

$$\sqrt{17} > 1$$

$$17 > 1 \text{ also } \frac{-9 + \sqrt{17}}{2} < 0$$

$$\sqrt{17} < 9$$

17 < 81 верно

$$\frac{-9 - \sqrt{121}}{2} < -1 \quad (-4; 0)$$

$$-9 - \sqrt{17} < -8$$

$$-\sqrt{17} < 1 \text{ верно}$$

$$\text{Ответ: } x = -4; -2; \frac{-9 + \sqrt{17}}{2}$$

$$x = -4 \Rightarrow y = 2$$

$$x = -2 \Rightarrow y = 2$$

$$x = \frac{-9 + \sqrt{17}}{2} \Rightarrow y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

НБ

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 & (1) \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a & (2) \end{cases}$$

①

$$y \geq 0, x-6 = t \geq 0 \Rightarrow y-t+y+t=12$$

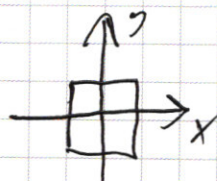
$$y=6$$

②

$$y \leq t \leq 0 \Rightarrow -y+t(-t-y)=12 \quad y=-6$$

$$y-t(t-y)=12 \Rightarrow t=-6 \Rightarrow x=0$$

$$\begin{cases} t-y > 0 \\ t+y < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t < 0 \\ y > t \end{cases}$$



$$-y+t+t+y=12 \Rightarrow t=6 \Rightarrow y=12$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N2

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos^2 5x + \sqrt{2} \sin^2 5x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

N1

$$----- = 16875$$

N3

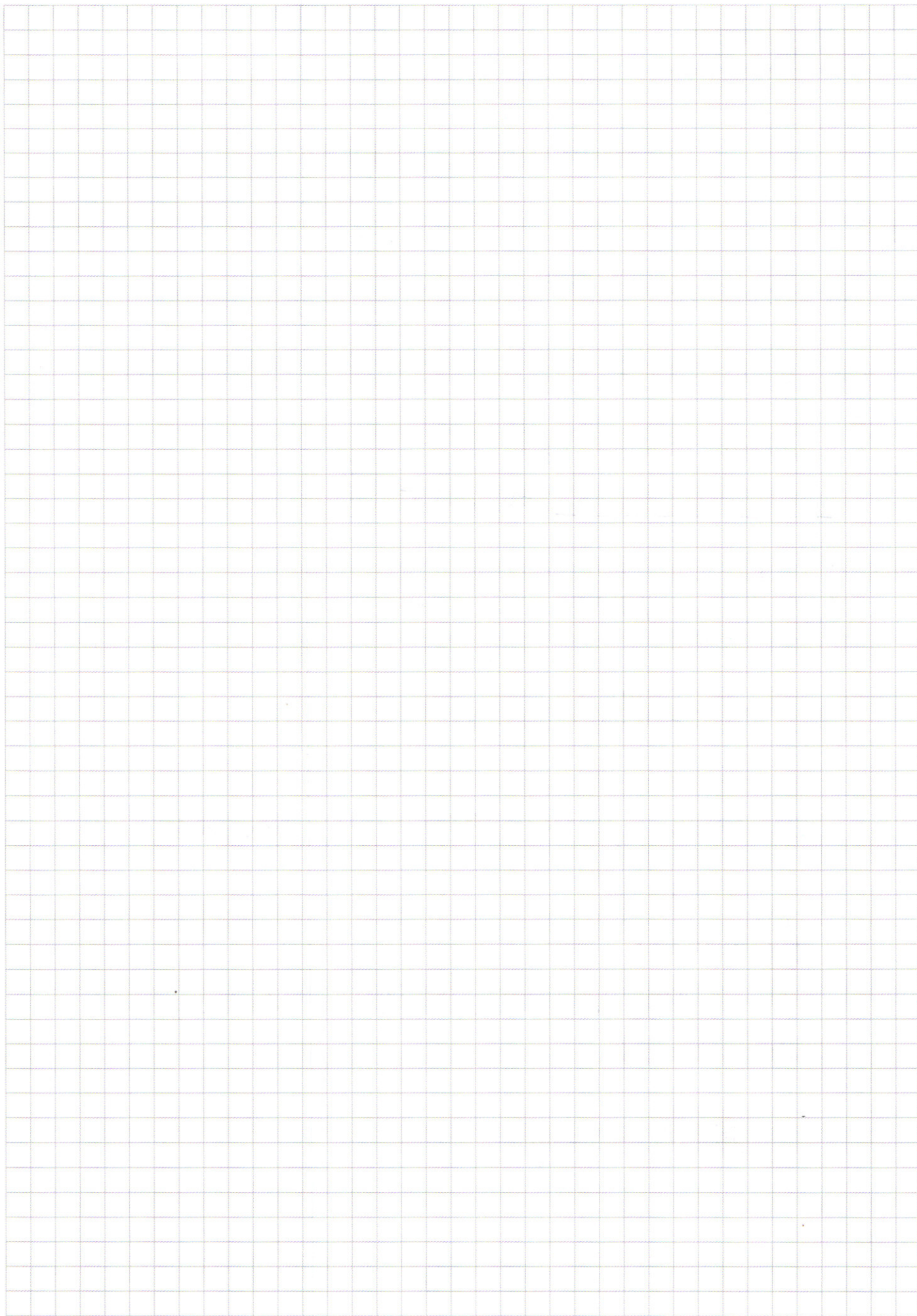
$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-x)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases}$$

каково наибольшее значение $(x; y)$ выражения

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

ответ в виде целого. сумма не более двух
знаменательных

~~Решение~~



☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 10
(Нумеровать только чистовики)